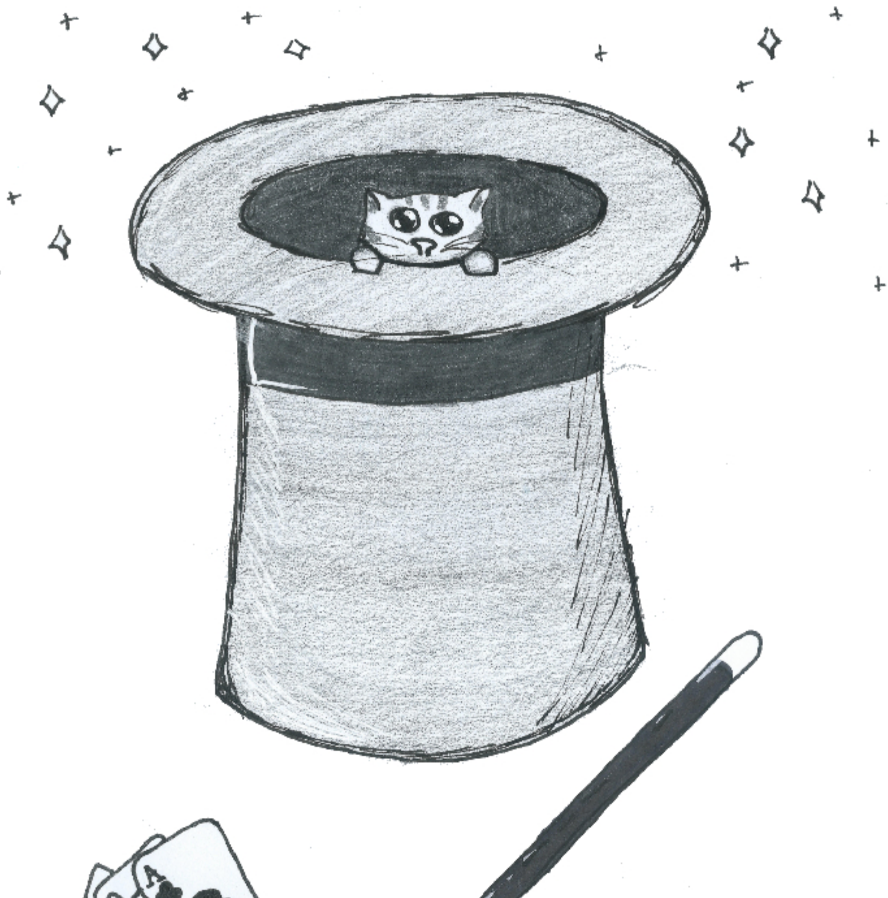
MALYNÁR

Číslo **6** — Ročník **31** — **malynar.strom.sk**



Ahoj!

Je tu ďalší časopis MALYNÁRa, ktorý prináša vzorové riešenia druhej série. Okrem toho, že je posledný v tomto semestri, je výnimočný aj tým, že s ním prichádzajú aj pozvánky pre tých najšikovnejších z vás. Tí sa môžu tešiť na odmenu vo forme týždňového netradičného sústredenia v obklopení skvelými účastníkmi a vedúcimi. Ak sa ti tam tentoraz nepodarilo dostať, nezúfaj. Pevne veríme, že nabudúce sa s tebou uvidíme!

vedúci MALYNÁRa

2% z daní

Aj tento rok je možné venovať 2% (v niektorých prípadoch dokonca až 3%) daní verejnoprospešným organizáciám, ako sme my.

Peniaze získané z 2% využívame na pokrytie časti nákladov spojených s aktivitami pre vás (kopírovanie časopisov, poštovné, ceny na súťažiach, aktivity na sústredeniach...). Chceme vás preto poprosiť, aby ste rodičom, členom svojej blízkej aj vzdialenej rodiny, susedom a pokojne aj cudzím ľuďom na ulici porozprávali o našich aktivitách a poprosili ich, aby svojou troškou podporili našu dobrovoľnícku činnosť a pomohli tým skupine mladých cieľavedomých ľudí zabezpečujúcich chod týchto úžasných seminárov, ktoré tak zbožňujete. Porozprávajte im, čo pre vás znamená sústredenie, čo vám dáva riešenie úloh seminára, a vysvetlite im, že takto podporia aj váš rozvoj a prispejú k zmysluplnému tráveniu vášho voľného času.

Potrebné informácie o tom, ako darovať 2%, nájdete na stránke nášho združenia `https://zdruzenie.strom.sk/sk/zdruzenie/2percenta/` a radi vám odpovieme na ľubovoľné otázky ohľadom našej podpory aj mailom na `info@strom.sk`.

Ďakujeme!

Tábor mladých matematikov

V termíne od 12. do 19. augusta 2022 sa udeje ten najlepší tábor tohoto roka – Tábor mladých matematikov! Bude sa konať na Chate Radzim pri obci Vyšná Slaná. Všetky podrobné informácie nájdete v pozvánke na `seminar.strom.sk/media/uploads/pozvankaucastniktmm2022.pdf`.

Pýtate sa, čo je Tábor mladých matematikov? Je to tábor určený pre budúcich siedmakov základných škôl až pre budúcich druhákov stredných škôl (a, samozrejme, prislúchajúce ročníky viacročných gymnázií). Program tábora pripomína obľúbené sústredenia, je však o dva dni dlhší, a preto o dva dni lepší!

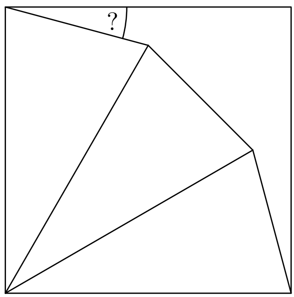
Neváhajte pridlho, kapacita tábora je obmedzená. Tešíme sa na vás!

Vzorové riešenia 2. série úloh letného semestra

1 opravovali: **Mirka** a **Adel Horváthové**
najkrajšie riešenia: Hana Ihnátová a Natália Kropuchová
42 riešení

Zadanie

Na obrázku je štvorec, v ktorom sa nachádzajú 3 schody, ktoré mali tvar rovnakých rovnoramenných trojuholníkov. Strany štvorca, ktoré zvierajú uhol hore vpravo, sú steny veže. Aký veľký je uhol medzi bočným schodom a stenou veže?



Riešenie

Vieme, že trojuholníky na obrázku sú zhodné a taktiež rovnoramenné s ramenom o dĺžke a (ak a je strana štvorca na obrázku). Rovnoramenný trojuholník pozostáva z dvoch ramien rovnakej dĺžky a základne, pri ktorej sú uhly (ktoré zviera základňa a jedno rameno) zhodné.

Keďže máme na obrázku 3 zhodné rovnoramenné trojuholníky, tak vieme povedať, že aj zodpovedajúce si uhly v týchto trojuholníkoch budú zhodné. To znamená, že budú mať zhodné aj uhly oproti základni. Tieto 3 uhly nám dokopy tvoria vnútorný uhol štvorca, a teda vieme, že dokopy dávajú súčet 90 stupňov. Jeden uhol pri vrchole trojuholníka odtiaľ bude rovný 30 stupňom.

V rovnoramennom trojuholníku platí, že jeho uhly pri základni sú zhodné. Keďže už poznáme uhol pri vrchole, ďalšie dva dopočítame. Ak od 180 stupňov (súčtu vnútorných uhlov v trojuholníku) odpočítame uhol pri vrchole, ktorý má 30 stupňov, tak dostaneme súčet dvoch zhodných uhlov pri základni, $180 - 30 = 150$ stupňov. Ak to vydelíme dvomi, dostaneme jeden uhol pri základni rovný $75°(150 : 2 = 75)$.

Ak sa teraz pozrieme na ľavý horný uhol štvorca (ktorý má 90°), tak si môžme všimnúť, že je tvorený práve jedným takýmto 75-stupňovým uhlom a naším hľadaným uhlom (?). Veľkosť hľadaného uhla môžeme teda ľahko dorátať ako $90 - 75 = 15$ stupňov.

Poznámka: Vo vzorovom riešení sme používali pojem „zhodné“, ktorý sa často objavuje v zadaniach a znamená rovnaké, rovnako veľké.

Komentár

Takmer všetkým z vás sa podarilo úlohu vyriešiť správne a získať tak 9 bodov, čo nás veľmi teší. :)

Zvyšným z vás, ktorým sa kamsi vytratilo pár bodíkov, chýbalo poriadnejšie vysvetlenie toho, čo presne sa vo vašom riešení deje.

Aby ste sa takýmto stratám nabudúce vyvarovali, je potrebné poriadne opísať svoj postup riešenia (nie vždy si totiž vedúci dokáže z obrázka domyslieť, čo presne ste mu chceli povedať).

2

opravovali: **Štefan Vašak** a **Martin „Kopy“ Kopčány**
najkrajšie riešenie: Hana Erdélyiová

42 riešení

Zadanie

Kúzelník má v krabičke 3 kartičky, na každej z nich je iná cifra v rozmedzí od 1 po 9. Súčet dvoch najmenších dvojciferných čísel, ktoré sa z kartičiek dajú poskladať, je 75, súčet dvoch najväčších je 170. Zistite, aké cifry má kúzelník na kartách.

Riešenie

Cifry na kartičkách označme X, Y a Z, pričom X je najmenšie z trojice a Z je najväčšie. Keďže X je najmenšia z trojice týchto cifier, tak dve najmenšie čísla, ktoré sa dajú poskladať z týchto cifier sú $\overline{XY}$ a $\overline{XZ}$.

Pozrime sa na to, aká cifra môže byť X, ak súčet dvoch najmenších čísel $\overline{XY} + \overline{XZ}$ má byť 75. Keby bolo X rovné 1 alebo 2, tak by $\overline{XY} + \overline{XZ}$ bolo menej ako 60, lebo aj $\overline{XY}$, aj $\overline{XZ}$ by bolo menej ako 30. Je to tak bez ohľadu na to, aké veľké sú cifry Y a Z.

Ak by bolo X rovné 4 alebo viac, tak by $\overline{XY} + \overline{XZ}$ bolo viac ako 80, lebo aj $\overline{XY}$, aj $\overline{XZ}$ by bolo viac ako 40, nech už sú cifry Y a Z akékoľvek.

Tým pádom jediná možnosť, čo môže byť na kartičke X, je 3.

Ak vieme, že X je 3, tak máme dve možnosti, ako dostať súčet 75, a to $36 + 39$ a $37 + 38$.

Ak by boli na kartičkách čísla 3, 6, 9, tak by bol súčet najvyšších dvoch čísel, ktoré je možno poskladať, rovný $96 + 93 = 189$. Tým pádom táto možnosť nevyhovuje.

Keď sa pozrieme na možnosť, že je na kartičkách 3, 7 a 8, tak zistíme, že táto možnosť vyhovuje ($83 + 87 = 170$) a je teda jediným riešením.

Poznámka: Zápis s vodorovnou čiarou nad skupinou neznámych značí, že tie neznáme sú ciframi daného čísla. Napríklad $\overline{ABC}$ je číslo, ktoré má na mieste jednotiek cifru C, na mieste desiatok cifru B a na mieste stoviek cifru A.

Komentár

Veľkej väčšine z vás sa podarilo dopracovať k správnemu výsledku, čo nás veľmi teší. Celkovo dopadla táto úloha veľmi dobre. Chybičky sa častejšie vyskytovali len dve. Prvou bolo, že ste svoje riešenie niekedy nevysvetlili tak, ako bolo treba. Niektorí z vás nám napríklad nenapísali odôvodnenie, prečo jednou z cifier musí byť 3 či 8 a rovno to prehlásili za pravdu. Do budúcna sa snažte poriadne opísať svoj myšlienkový postup. Druhou chybičkou bolo to, že ste neoverili, či je vaše riešenie jediné správne. To je pri úlohách tohto typu obzvlášť dôležité. Nesmiete teda iba ukázať, že konkrétna možnosť je správna, ale musíte ukázať, že žiadna iná správna neexistuje. Inak ale veľmi pekne. Len tak ďalej!

3

opravovali: **Tesi Stanová** a **Lenka Hake**
najkrajšie riešenie: Ema Kordošová

42 riešení

Zadanie

V turnaji súťažilo 6 tímov a každý tím odohral 2 zápasy s každým iným tímom. Za výhru získal tím 3 body, za remízu 1 bod a za prehru 0 bodov. Prvé 3 tímy mali rovnako veľa bodov. Aký je najvyšší možný počet, ktorý mohli tieto prvé tri tímy získať? Zdôvodnite, prečo nemohli získať viac bodov.

Riešenie

Na turnaji sa zúčastnilo 6 tímov. Pomenujme si ich napríklad A, B, C, D, E a F, pričom A, B, C budú predstavovať 3 najlepšie tímy. Našou úlohou je zistiť najväčší možný počet bodov, aký mohli A, B a C dosiahnuť za predpokladu, že všetky 3 tímy získali rovnako veľa.

Uvažujme najprv, aký najvyšší počet bodov mohli A, B a C získať dokopy. Každý zo 6 tímov odohral s každým iným tímom 2 zápasy, čiže spolu odohrali $6 \cdot 5 = 30$ zápasov (tím A hral proti tímom B, C, D, E, F, tím B hral proti A, C, D, E, F atď., teda každý zo 6 tímov hral 5 zápasov – ak sa na to pozrieme takto, tak pre každú dvojicu naozaj započítame 2 zápasy, napr. A hralo proti B, ale aj B hralo proti A). Z toho $3 \cdot 2 = 6$ zápasov odohrali D, E a F čisto medzi sebou (rovnaký princíp ako pre celkový počet zápasov), takže prvé 3 tímy mohli reálne získať body len z $30 - 6 = 24$ zápasov. Za zápas, ktorý skončil výhrou jedného tímu, sú spolu udelené $0 + 3 = 3$ body a za remízu spolu $1 + 1 = 2$ body. Z toho vidíme, že najvyšší možný počet bodov je udelený, ak všetkých 24 zápasov skončí výhrou jedného z tímov: spolu dosiahneme

$24 \cdot 3 = 72$ bodov. To zároveň znamená, že každý z tímov A, B, C mohol celkovo získať najviac 24 bodov, keďže všetky 3 tímy museli získať rovnako veľa bodov.

Teraz nám už len stačí ukázať, že takýto priebeh je naozaj možný. Jednoduchý príklad je, ak A, B aj C vyhrajú všetky svoje zápasy proti D, E, F a z ich spoločných zápasov každý proti každému raz vyhrá a raz prehrá (zápasy medzi D, E a F môžu dopadnúť hocijako, keďže nemajú vplyv na bodové zisky prvých 3 tímov). Takto majú A, B aj C po dve výhry nad každým z tímov D, E, F (dokopy 6 výhier), po jednej výhre a po jednej prehre proti obom zvyšným tímom z trojice najlepších, čiže presne $6 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 24$ bodov.

Iné riešenie

Na úlohu by sme sa mohli pozrieť aj takto: keďže hľadáme najväčší možný počet bodov pre A, B, C, budeme predpokladať, že A, B aj C vyhrali všetky vzájomné zápasy s D, E, F. Každý tak vyhral po 2 zápasy proti 3 tímom, čo znamená zisk $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ bodov.

Zápasy odohrané medzi D, E, F nás nezaujímajú, takže nám ostávajú len zápasy medzi A, B a C. Opäť budeme uvažovať, aký najvyšší počet bodov mohli z týchto zápasov A, B a C získať dokopy. Každý s každým odohral 2 zápasy, čiže spolu odohrali $3 \cdot 2 = 6$ zápasov (rovnaký princíp ako pre celkový počet zápasov v 1. riešení), za ktoré mohlo byť dokopy udelených nanajvýš $6 \cdot 3 = 18$ bodov (pri výhre niektorého tímu sú udelené spolu 3 body, pri remíze len 2). Ako dokazuje príklad v 1. riešení, tieto body vieme rovnomerne rozdeliť medzi A, B, a C tak, že každý dostane 6 bodov, a teda celkovo všetky skončia s $18 + 6 = 24$ bodmi.

Spätne si môžeme uvedomiť, že A, B, a C týmto spôsobom získali maximálny možný počet bodov zo zápasov proti D, E, F aj medzi sebou, takže celkové maximum je naozaj 24.

Komentár

Intuitívne by sa mohlo zdať, že aby A, B a C mali rovnaký počet bodov, tak medzi sebou musia remizovať. To však nie je pravda, ako ukazuje vzorové riešenie. Teoreticky by dokonca ani nemuseli mať rovnaké počty výhier, prehier a remíz alebo vyhrať všetky svoje zápasy proti D, E, F. Za iných podmienok by nám taká zdanlivá „nevýhoda“ mohla pokojne priniesť lepší výsledok. Najviac bodov sa postrácalo práve kvôli nedostatočnému vysvetleniu, prečo je 24 naozaj maximum. Ale aj keď veľa riešení malo nejaké menšie nedostatky, celkovo sa našiel celkom pekný počet úspešných riešiteľov. Niektorí sa na úlohu tiež skúsili pozrieť tak, že uvažovali len o 1 *kole*, kde každý hral s každým práve raz a výsledok potom vynásobili 2. To je celkom zaujímavá myšlienka, ale v takom prípade treba dobre obhájiť, prečo pre 2 *kolá* nevieme získať viac ako dvojnásobok toho čo pre jedno.

4

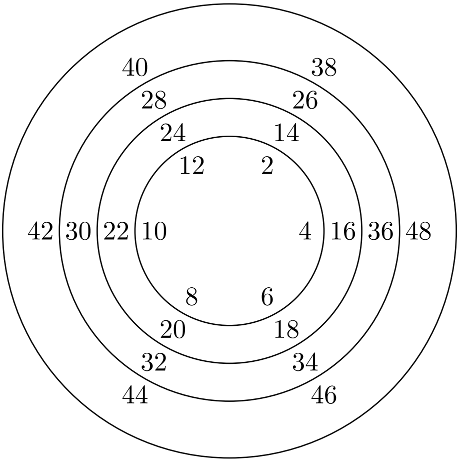
opravovali: **Mimi Hanus** a **Martin „Andy“ Andričík**

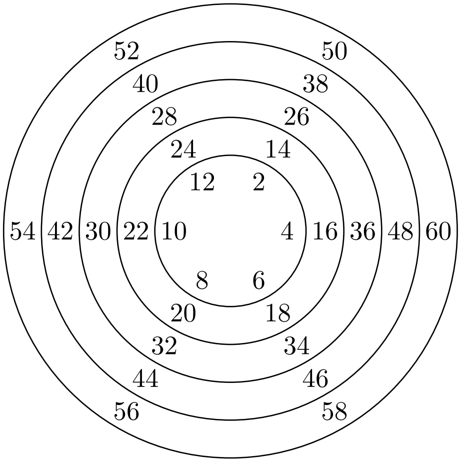
najkrajšie riešenie: Martinka Vojteková

38 riešení

Zadanie

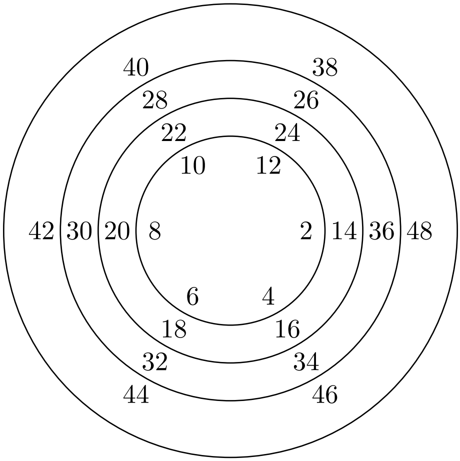
Kúzelník má 2 trezory. Na trezoroch je špeciálny číselný zámok, ktorý sa skladá z otáčateľných kruhových pásov s číslami. Zámok sa otvorí, ak budú čísla usporiadané v šiestich stĺpcoch smerom od stredu a v každom stĺpci bude súčet čísel rovnaký. Dajú sa trezory nižšie otvoriť?





Riešenie

Zámok vľavo vyskúšame pootáčať, až nájdeme, že nasledovné otočenie funguje. (V skutočnosti to nebudeme skúšať náhodne. Na pásoch sú celkom pekné šestice čísel – na každom páse čísla stúpajú o 2 v smere hodinových ručičiek alebo proti nemu. Nuž môžeme jeden z vnútorných dvoch pásov (rastúcich v smere) vyvážiť s jedným z vonkajších dvoch (rastúcich proti smeru) tak, že nastavíme najväčšie číslo oproti najmenšiemu. Zvyšné dva pásy potom vyvážime rovnako. Do odovzdávaného riešenia však nemusíme písať, akým spôsobom sme vyhovujúce otočenie našli, keďže úloha žiada iba dokázať, že nejaké vyhovujúce existuje. Azda najjednoduchšie len vypíšeme štvorice čísel vo výsledných stĺpcoch, ktoré majú mať rovnaký súčet, takto do kruhu alebo aj inak.)



V zámku napravo je súčet všetkých čísel 930. Šesť stĺpcov musí mať rovnaký súčet a súčet všetkých šiestich týchto súčtov musí byť 930, čiže každý jeden stĺpec musí mať súčet $930 : 6 = 155$. Všetky čísla v tomto zámku sú párne, a tak hocijako by sme ním točili, musí nám vyjsť v každom jednom stĺpci párny súčet. Takže sa nemôžeme dotočiť k číslu 155. (Pre porovnanie, v ľavom zámku bol súčet 600 a $600 : 6 = 100$, čo znamená, že v každom vyhovujúcom natočení pásov musel mať každý stĺpec súčet 100. Aj v našom otočení uvedenom vyššie mal.)

Iné riešenie *pravého zámku*

Alternatívne sa môžeme pozrieť na rozdiely medzi susednými stĺpcami. Keď sa súčty všetkých stĺpcov budú rovnať, rozdiely medzi nimi budú nulové. Na každom jednotlivom páse sa však päť susedných dvojíc líši o 2 a jedna o 10. Pri piatich pásoch máme iba päť rozdielov o veľkosti 10, takže určite bude existovať dvojica susediacich stĺpcov, v ktorých na každom páse bude rozdiel medzi číslami 2. No sčítaním a odčítaním piatich dvojok sa nevieme dopracovať k nule, takže tieto dva stĺpce budú mať v súčte nenulový rozdiel.

Komentár

Väčšina riešiteľov odovzdala riešenie tejto úlohy a väčšina riešení bola správna. Prvý zámok sa podarilo otvoriť aj väčšine riešení za menej než deväť bodov.

Napriek tomu niektoré riešenia nepopísali precízne, ako presne treba pásy pootáčať do cieľového stavu. Takýto krok je spravidla jednoduchý, napríklad tu stačilo znázorniť výsledné otočenie graficky, no nemožno ho úplne zanedbať (teda formulácia, že sme si tým nejako otáčali, až sme dostali všade súčet 100, nestačí).

Napokon najčastejším nedostatkom bol nefunkčný dôkaz, že pravý trezor sa otvoriť nedá. Viac riešení overilo jeden vybraný spôsob, ako sa dostať k rovnosti súčtov (najmä vyrovnávať súčty na dvojiciach pásov alebo nechať si súčty na vnútorných štyroch pásoch rovné a dotočiť piaty, nový pás), čo nie je dostatočne všeobecné. Treba ukázať, že ani akákoľvek iná stratégia by nemohla byť úspešná.

5

opravovala: **Janka Baranová**

najkrajšie riešenie: všetky deväťbodové :)

34 riešení

Zadanie

Na stole sú 4 krabice s loptičkami, v každej je na začiatku 10 loptičiek. Zároveň máme pri stole bazén s neobmedzeným množstvom loptičiek. V každom ťahu môžeme urobiť jeden z troch krokov, ak je možné taký krok urobiť:

- Zobrať z každej krabice 1 loptičku a hodiť ich do bazéna.
- Vybrať z niektorej krabice 3 loptičky a rozdeliť ich po 1 do zvyšných 3 krabíc.
- Vybrať z bazéna 4 loptičky a dať 2 z nich do niektorej krabice a zvyšné 2 do inej krabice.

Rozhodnite, či je možné vhodnými ťahmi dosiahnuť, že v krabiciach budú postupne 1, 2, 3 a 4 loptičky.

Riešenie

Na začiatku sú na stole 4 krabice s 10 loptičkami, čiže dokopy je v krabiciach 40 loptičiek. Našou úlohou je pomocou 3 krokov uvedených v zadaní dosiahnuť, aby v krabiciach boli 1, 2, 3 a 4 loptičky, dokopy $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ loptičiek. Chceme teda zo 40 loptičiek odobrať 30 loptičiek, aby nám ich ostalo len 10.

Rozoberme si naše 3 kroky:

1. Zobrať z každej krabice 1 loptičku a hodiť ich do bazéna znamená, že z krabíc celkovo **odoberieme 4 loptičky**.
2. Vybrať z niektorej krabice 3 loptičky a vložiť po 1 loptičke do zvyšných 3 krabíc znamená, že sa nám celkový počet loptičiek v krabiciach **nezmení**. Len prerozdelíme loptičky medzi našimi krabicami.
3. Vybrať z bazéna 4 loptičky a dať ich do 2 krabíc (po 2 loptičkách) znamená, že celkovo **pridáme 4 loptičky**.

Našimi 3 krokmi tým pádom vieme odobrať 4 loptičky, pridať 4 loptičky alebo nezmeniť celkový počet loptičiek (len ich prerozdeliť v rámci krabíc). My potrebujeme odobrať 30 loptičiek, čo ale nie je možné, pretože číslo 30 nie je násobkom 4 a my vieme odoberať a pridávať vždy len po 4 loptičkách.

Žiadnymi ťahmi nevieme dosiahnuť to, aby na konci bolo v krabiciach 10 loptičiek, teda 1, 2, 3 a 4 loptičky.

Iné riešenie

Na začiatku sú na stole 4 krabice s 10 loptičkami, teda každá krabica obsahuje párny počet loptičiek. Našou úlohou je pomocou 3 krokov uvedených v zadaní dosiahnuť, aby v krabiciach boli 1, 2, 3 a 4 loptičky. Potrebujeme dosiahnuť, aby na konci boli 2 krabice s nepárnym počtom loptičiek (1 a 3) a 2 krabice s párnym počtom loptičiek (2 a 4).

Rozoberme si naše 3 kroky:

1. Zobrať z každej krabice 1 loptičku a hodiť ich do bazéna znamená, že ak v krabici bolo párny počet loptičiek, tak po tomto kroku v nej bude nepárny počet loptičiek a naopak – ak v krabici bol nepárny počet loptičiek, tak v nej potom bude párny počet loptičiek. Pretože párne číslo mínus 1 (mínus nepárne číslo) je nepárne číslo a nepárne číslo mínus 1 (mínus nepárne číslo) je číslo párne. Týmto krokom zo 4 párnych alebo 4 nepárnych počtov loptičiek dostaneme znova 4 párne alebo 4 nepárne počty.

2. Vybrať z niektorej krabice 3 loptičky a vložiť po 1 loptičke do zvyšných 3 krabíc znamená, že v jednej krabici sa zmení počet loptičiek o 3, teda z párneho počtu sa stane nepárny počet (lebo párne číslo mínus 3 (nepárne číslo) je nepárne číslo) a naopak z nepárneho počtu párne (lebo nepárne mínus 3 (nepárne číslo) je párne číslo). V ostatných krabiciach sa zväčší počet loptičiek o 1, takže opäť z párneho počtu sa stane nepárny a naopak. Týmto krokom opäť zo 4 párnych alebo 4 nepárnych počtov loptičiek dostaneme len 4 párne alebo 4 nepárne počty.

3. Vybrať z bazéna 4 loptičky a dať ich do 2 krabíc (po 2 loptičkách) znamená, že počty loptičiek v 2 krabiciach sa vôbec nezmenia a do 2 krabíc pridáme 2 loptičky. Ak v týchto 2 krabiciach bol párny počet loptičiek a pripočítame k nemu 2 loptičky, tak dostaneme opäť párny počet (lebo párne číslo plus 2 (čo je párne číslo) je tiež číslo párne). Ak v nich bol nepárny počet loptičiek a pripočítame k nemu 2 loptičky, tak dostaneme opäť nepárny počet (lebo nepárne číslo plus 2 (čo je párne číslo) je tiež číslo nepárne). Aj týmto krokom dostaneme zo 4 párnych alebo 4 nepárnych počtov loptičiek znova iba 4 párne alebo 4 nepárne počty.

Našimi krokmi tým pádom nevieme zo 4 párnych počtov loptičiek dostať 2 párne a 2 nepárne počty, takže ani počty 1, 2, 3 a 4.

Komentár

Wow, bola som nadšená z množstva správnych, a teda deväťbodových riešení. Je vidieť, že máte za sebou už štvrtú sériu a poctivo ste pracovali na peknom spísaní postupu, ako ste úlohu riešili. A tí z vás, ktorí ste stratili nejaké tie bodíky, si nabudúce dajte pozor na to, aby ste každý svoj krok poriadne vysvetlili a bude to už tiež na plný počet bodov. A vy, čo ste nevedeli riešenie vysvetliť, si prečítajte obe riešenia v našom vzorovom riešení, zíde sa vám to do budúcna, pretože úlohy podobného typu sa často riešia podobne. Vždy je fajn sa pri takýchto úlohách zamyslieť nad párnosťou a nepárnosťou čísel či celkovým súčtom a zamerať sa na to, ako sa tieto charakteristiky v jednotlivých krokoch menia alebo nemenia.

6

opravovali: **Erik Novák** a **Ľubomír Vargovčík**

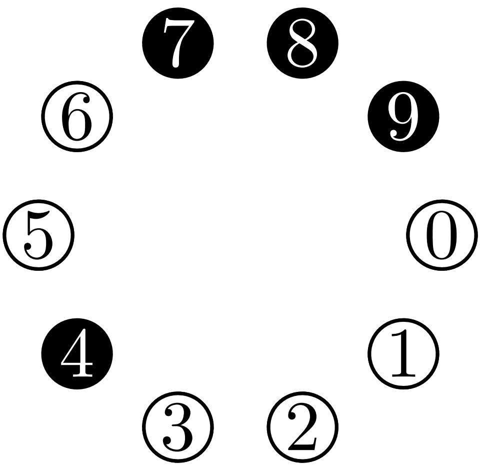
najkrajšie riešenie: Hana Ihnátová

33 riešení

Zadanie

V kruhu leží niekoľko mincí (viac ako 2), pričom na začiatku žiadna dvojica susedných mincí nie je otočená rovnako. Ricardo a Hernan sa striedajú v ťahoch. Ten, čo je na rade, musí otočiť súvislý úsek mincí otočených rovnakou stranou nahor susediaci s mincami otočenými naopak. Prehráva ten, po ktorého ťahu sú všetky mince otočené rovnako. Ricardo vyberá, kto bude začínať. Ako si má Ricardo v závislosti od počtu mincí vybrať, aby bez ohľadu na Hernanove ťahy vždy vyhral?

Dodatok pre lepšiu predstavu: Ak by sme mali 10 mincí rozložených ako na obrázku, potom ten, kto je na ťahu, môže otočiť buď mince 0, 1, 2, 3, alebo iba mincu 4, alebo mince 5 a 6, alebo mince 7, 8 a 9.



Riešenie

Uvedomme si, že keďže na začiatku sa strieda, ako sú v kruhu otočené mince, musí byť mincí otočených hlavou rovnako veľa ako mincí otočených znakom. V prípade, keď sa otočenia striedajú, totižto určite vieme rozdeliť kruh na susediace dvojice hlava-znak. V kruhu je teda toľko znakov aj toľko hláv, koľko je tam týchto dvojíc. Z toho, že ich vieme rozdeliť do párov, zároveň vyplýva, že mincí je iste párny počet.

Zároveň si uvedomme, že prvý hráč môže otočiť iba práve jednu mincu, keďže na začiatku neexistuje žiadna skupina rovnako otočených mincí pri sebe (vďaka tomu, že na začiatku sa mince striedajú).

Pozrime sa na hru s najmenším možným počtom mincí. To je 4, keďže je to najmenšie párne číslo väčšie ako 2. Prvý hráč otočí jednu mincu, čím vytvorí jednu trojicu rovnako otočených mincí a jednu samostatnú mincu otočenú opačne. Druhý hráč potom prehrá nezávisle od toho, či otočí danú trojicu alebo samostatnú mincu, v oboch prípadoch budú po jeho ťahu všetky mince otočené rovnako. V prípade so 4 mincami teda vyhráva prvý hráč.

Pozrime sa teraz na hru s ľubovoľným počtom mincí. Prvý hráč určite otočí jednu mincu, čím vytvorí trojicu rovnako otočených mincí a zvyšok striedajúcich sa mincí. S mincami v tejto trojici však druhý hráč nemôže urobiť nič iné, ako neotočiť ani jednu z nich alebo všetky. Teda si túto trojicu môžeme predstaviť ako iba jednu samostatnú mincu. Po prvom ťahu sme sa, rátajúc s touto predstavou, v podstate dostali do situácie, keď začíname hru na novo, iba ju začína druhý hráč a mincí je o dve menej, respektíve o jednu hlavu a jeden znak menej ako predtým.

Rátajme teda naďalej s tým, že ťah v hre znamená začať novú hru s počtom mincí o dva menším a iným začínajúcim hráčom. Vieme, že hráč, ktorý začína hru pri štyroch minciach, vyhrá. Zároveň vieme, že po párnom počte ťahov sme v situácii, kedy hru začína prvý hráč a z počtu hláv aj znakov ubudol párny počet mincí. Naopak, po nepárnom počte ťahov novú hru začína druhý hráč a z pôvodných počtov hláv a znakov ubudlo po nepárnom počte mincí.

Ak je teda na začiatku v hre nepárny počet hláv a znakov, do situácie so začiatočným počtom mincí 4 sa dostaneme po nepárnom počte ťahov, teda v ňom bude začínať druhý hráč. Naopak, ak je na začiatku v hre párny počet hláv a znakov, hru so 4 mincami bude začínať prvý hráč. Ricardo by teda mal vybrať, nech začína Hernan, ak je na začiatku nepárny počet hláv a znakov, a nech začína on, ak to tak nie je. V takom prípade vyhrá nezávisle od ťahov oboch hráčov.

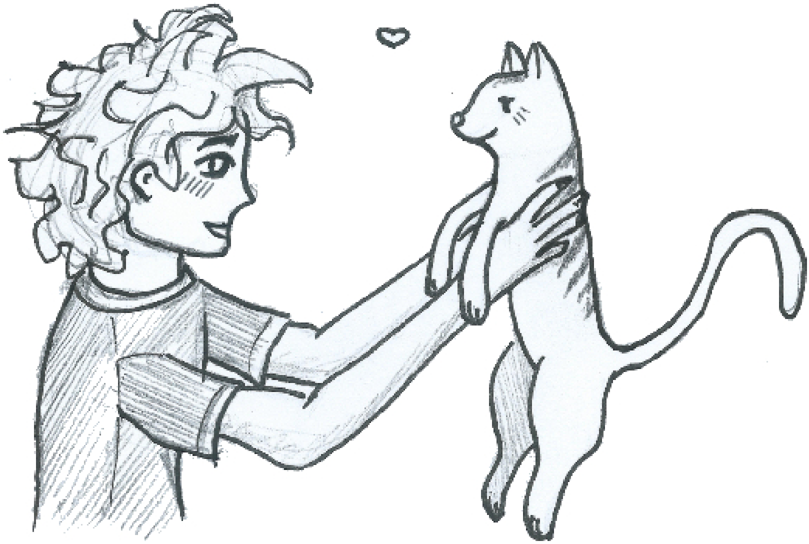
Komentár

Túto úlohu bolo náročné vysvetliť tak, aby v nej nič nechýbalo. Aj preto sme boli pri opravovaní miernejší a dali veľký počet bodov aj riešeniam, ktoré namiesto dôkazu všeobecného ukázali, kto vyhrá, na konkrétnom príklade a následne dostatočne presvedčivo ukázali, že podobne to bude platiť aj pre iné počty. Zároveň vám ako pri väčšine takýchto úloh odkazujem jedno dôležité múdro. Vyskúšať si zahrať hru je úžasný odrazový mostík k nájdeniu stratégie, no nikdy nie samotné riešenie.

Konečné poradie letného semestra 31. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1. - 5.	Michal Hudák	Z5	SZLerKE	54	9	9	9	9	7	9	**108**
	Hana Erdélyiová	Z6	GAMČABA	54	9	9	9	9	9	9	**108**
	Hugo Barta	Z4	ZBajkBA	54	9	9	9	9	9	-	**108**
	Alena Chladná	Z6	GAMČABA	54	9	9	9	9	9	9	**108**
	Olívia Diková	Z3	ISAXL	54	9	9	9	9	-	9	**108**
6. - 7.	Alica Földesová	Z5	VSCharlott	54	7	9	9	9	8	9	**107**
	Richard Semanišin	Z5	ZPAngKE	54	9	9	8	9	9	8	**107**
8. - 9.	Marek Mičko	Z5	ZKro4KE	54	9	7	9	4	9	9	**106**
	Šimon Jonaštík	Z5	ZZnieBA	54	9	9	7	5	9	9	**106**
10. - 11.	Elena Kundríková	Z5	ZKro4KE	54	9	9	4	5	9	9	**104**
	Richard Futáš	Z5	ZPAngKE	50	9	9	9	4	9	9	**104**
12. - 13.	Ondrej Medo	Z5	ZSchmit	49	9	9	8	9	9	9	**103**
	Peter Medo	Z3	ZSchmit	50	9	9	8	9	9	-	**103**
14.	Agáta Halamičková	Z4	SZFelixBA	54	9	9	3	9	-	9	**102**
15.	Matúš Adamuščín	Z3	ZHubeBA	47	9	9	9	9	9	-	**101**
16.	Elena Mikušová	Z4	SZFelixBA	54	9	5	7	9	4	7	**100**
17.	Ema Kordošová	Z4	ZBajkBA	45	9	9	9	9	9	-	**99**
18.	Hana Ihnátová	Z6	ZObcSeč	45	9	9	8	9	9	9	**98**
19. - 22.	Patrik Lehocký	Z3	ZKro2KE	48	9	9	7	9	4	5	**96**
	Adam Adamuščín	Z6	ŠpMNDaG	42	9	9	9	9	9	9	**96**
	Matej Mišun	Z4	CENADABA	54	9	4	7	4	6	8	**96**
	Vojto Bálint	Z6	CZRZaZA	46	9	9	5	9	9	9	**96**
23.	Martina Vojteková	Z4	ZBalPha	53	9	-	7	9	8	-	**95**
24.	Jakub Katrák	Z6	ZPoliKE	46	9	5	7	9	9	9	**94**
25.	Nelka Kleščová	Z6	GĽŠH3ZV	41	9	7	9	9	9	9	**93**
26. - 27.	Tomáš Kováč	Z6	ZZlatáRV	48	9	7	7	9	9	3	**92**
	Jakub Tomasz	Z5	ZKro4KE	40	9	9	7	4	9	9	**92**
28.	Daniela Tkáčová	Z6	ZLevoSN	49	9	7	2	5	9	6	**87**
29.	Natália Kropuchová	Z6	ZKro4KE	42	9	9	8	9	-	9	**86**
30.	Katarína Tóthová	Z5	ZHôrky	45	9	8	6	9	-	2	**85**
31.	Katarína Šestáková	Z5	ZVývoBA	50	9	9	2	9	1	-	**82**
32.	Filip Feher	Z5	ZPAngKE	44	9	6	4	-	2	6	**75**
33.	Emilián Frischer	Z5	ZLNovKE	49	9	2	1	4	6	2	**74**
34. - 35.	Sandra Futášová	Z5	ZPAngKE	46	9	2	2	-	7	4	**72**
	Martina Kováčová	Z5	ZBrusno	36	9	7	0	9	1	5	**72**
36.	Lukáš Gay	Z6	GAlejKE	36	9	9	5	4	-	6	**69**
37.	Filip Prielomek	Z5	ZMHOJas	41	9	5	2	1	1	7	**67**
38.	Šimon Lukačín	Z6	GAlejKE	38	7	6	2	-	-	-	**53**
39. - 40.	Oliver Rohutný	Z5	ŠpMNDaG	40	7	5	0	-	-	-	**52**
	Ladislav Kliment	Z5	ZLNovKE	52	-	-	-	-	-	-	**52**
41. - 42.	Patrik Sklenár	Z5	ZKom6SL	35	8	3	0	4	-	0	**50**
	Alexander Szaszi	Z6	GAlejKE	50	-	-	-	-	-	-	**50**
43.	Mikuláš Basil Pešek	Z2	GAlejKE	48	-	-	-	-	-	-	**48**
44.	Damián Fedor	Z6	ZJuhVnT	21	9	4	-	4	1	-	**39**
45.	Michael Dudáš	Z6	GAlejKE	9	9	9	7	-	-	-	**34**
46.	Bruno Hrehovčík	Z4	ZBajkBA	27	-	-	-	-	-	-	**27**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
47.	Daniela Štulajterová	Z6	ZKro4KE	26	-	-	-	-	-	-	**26**
48.	Jakub Porubsky	Z5	ZPAngKE	18	-	0	1	2	0	1	**22**
49.	Eva Vráblová	Z5	CSO25DK	19	-	-	-	-	-	-	**19**
50.	Stela Juhásová	Z6	GAlejKE	18	-	-	-	-	-	-	**18**
51.	Laura Prevužňáková	Z6	ZKro4KE	16	-	-	-	-	-	-	**16**
52.	Martin Janoško	Z5	ZKro4KE	15	-	-	-	-	-	-	**15**
53.	Barbora Ševcová	Z6	ZKro4KE	14	-	-	-	-	-	-	**14**
54.	Oleg Mauks	Z5	ZKro4KE	12	-	-	-	-	-	-	**12**
55.	Max Hložek	Z6	ZKro4KE	11	-	-	-	-	-	-	**11**
56.	Dorian Korček	Z6	GAlejKE	2	-	-	-	-	-	-	**2**
57.	Adela Polomská	Z6	ZKro4KE	1	-	-	-	-	-	-	**1**



Názov: MALYNÁR – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 6 • Máj 2022 • Letný semester 31. ročníka
Web: `malynar.strom.sk`
E-mail: `malynar@strom.sk`
Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe, poštou a len v prípade poruchy na adrese `riesenia@strom.sk`

Organizátor: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach,
Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice
Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.