MALYNÁR

Číslo **2** — Ročník **33** — **malynar.strom.sk**

Ahoj!

Tvojmu pohľadu zjavne neuniklo ďalšie vydanie MALYNÁRa, v ktorom nájdeš nielen poradie po prvej sérii tohto semestra, ale aj naše vzorové riešenia. Nezabúdaj však, že sme ešte len v polčase, tak určite nepoľavuj a pusti sa do druhej série. S radosťou očakávame Tvoje ďalšie riešenia!

vedúci MALYNÁRa

Ako bude

Minisústredenia na školách

Naším cieľom je zaujať krásou matematiky čo najviac žiakov, avšak máme pocit, že obchádzame veľkú skupinu žiakov, ktorá nerieši naše semináre. Preto by sme radi niektoré zážitkové a vzdelávacie aktivity, ktoré robíme, priniesli trošku bližšie aj k tejto skupine žiakov v podobe krátkeho matematického sústredenia priamo na škole. V spolupráci so školami organizujeme 1 alebo 2-dňové matematické „minisústredenia“ pre 30 až 60 žiakov 5. - 9. ročníka (vždy rozsah najviac 4 ročníkov). Sústredenia prebiehajú priamo v priestoroch školy. Viac sa dozviete na `https://malynar.strom.sk/sk/aktivity/minisustredenia/`.

Tábor mladých matematikov

Drahí šiestaci, ak premýšľate, čo s časom počas ďalších letných prázdnin, máme pre vás dobré správy! Už vieme, kedy a kde sa bude konať TMM, teda Tábor mladých matematikov! V kalendároch si rezervujte 29. júla až 5. augusta 2024, pretože práve vtedy sa ocitneme v Rekreačnom stredisku Zelený breh na najúžasnejšej akcii roka. Pozvánka a prihlasovanie pribudnú na stránku niekedy ku koncu tohto roka po zmene grafikonu ZSSK.

Nevieš, čo je TMM? Tábor mladých matematikov je ako sústredenie, avšak je o 2 dni dlhšie, takže o 2 dni lepšie! Viac informácií (a neskôr aj samotnú pozvánku a prihlasovanie nájdeš na `https://malynar.strom.sk/tmm/`.

Vzorové riešenia 1. série úloh zimného semestra

1

opravovali: **Eva Krajčiová**, **Sarah Klopstock** a **Števo Vašak** • 75 riešení
najkrajšie riešenie: Artem Pivnenko

Zadanie

Na lúke rastú tri druhy rastlín, z každého druhu je tam aspoň jedna. Modré rastliny majú vždy jeden kvet a dva listy. Žlté rastliny majú vždy dva kvety a jeden list. No a napokon červené rastliny majú tri kvety a tri listy. Robin napočítal spolu na lúke 24 kvetov a 24 listov. Jeho kamarát John ale napočítal 25 kvetov a 25 listov. Jeden z nich počítal správne. Kto to bol a prečo? Vysvetlite, prečo ten druhý nemohol mať pravdu.

Riešenie

Robin aj John napočítali, že na lúke je rovnaký počet kvetov ako listov. To znamená, že počet modrých a žltých rastlín musí byť rovnaký, keďže súčet ich kvetov je rovnaký ako súčet ich listov. Inak by sme mali buď viac kvetov, alebo viac listov. Jedna žltá a jedna modrá rastlina majú spolu $2 + 1 = 3$ kvety a $1 + 2 = 3$ listy a červená rastlina má 3 kvety a 3 listy. Preto počet kvetov aj listov musí byť vždy deliteľný číslom 3. Keďže 24 je deliteľné číslom 3 a 25 nie je, tak s toho vyplýva, že Robin počítal správne.

Komentár

Často sme museli ubrať body kvôli nedostatočnému objasneniu riešenia. Myšlienky, ktoré v riešení používate musíte aj vysvetliť, inak si nemôžeme byť istí ich správnosťou. Ďalšou častou chybou bola úvaha, že z každej farby musí byť rovnaký počet rastliniek. To Vás následne viedlo k argumentácii pomocou deliteľnosti šiestimi a nie tromi. Táto úvaha bola nesprávna, pretože síce žltých a modrých rastlín muselo byť rovnako veľa, no červených mohol byť iný počet.

2

opravovali: **Martin „Šmili“ Šmilňák** a **Mišo Ferdinandy** 72 riešení
najkrajšie riešenie: Artem Pivnenko

Zadanie

Piati kamaráti Anica, Ellie, Robin, John a Zara sa rozprávali. Vieme, že chodia do dvoch tried (z každej triedy je aspoň jedno dieťa), teda sú to dve skupiny spolužiakov. Žiaci z jednej triedy vždy buď všetci klamú, alebo všetci hovoria pravdu. Povedali tieto výroky:

- Anica: Som v triede sama.
- Ellie: John klame. Robin je môj spolužiak.
- Robin: Zara je moja spolužiačka.
- John: Anica nie je moja spolužiačka.
- Zara: Obe triedy majú aspoň dvoch žiakov.

Ako mohli byť deti rozdelené do tried a žiaci z ktorých tried klamali a z ktorých hovorili pravdu? Nájdite všetky možnosti.

Riešenie

Najprv sa pozrime na výroky Ellie a Johna. Ellie tvrdí, že John klame. Ak by obaja hovorili pravdu, došli by sme k sporu, pretože by nebola pravda, že John klame. Ak by obaja klamali, tak by bola pravda, že John klame, čo by ale opäť bol spor, pretože Ellie v tomto prípade klame. Z dvojice Ellie a John je teda jeden klamár a jeden pravdovravec, čiže nesmú byť spolu v triede. Nech je teda, povedzme, Ellie v triede 1 a John v triede 2. Zatiaľ nevieme, v ktorej triede sú klamári a v ktorej pravdovravci, no vieme, že tieto triedy nebudú rovnaké.
Ďalej sa pozrime na Anicu. Tá tvrdí, že je v triede sama. My už vieme, že v triede 1 je Ellie a v triede 2 je John, a teda splniť túto podmienku už nie je možné. Anica preto určite klame.
Teraz sa vráťme k Johnovi a Ellie a rozoberme si dve možnosti:

1. Ak by Ellie hovorila pravdu a John klamal: V tomto prípade je pravda, že Robin je Ellin spolužiak a tiež je pravda, že Anica je Johnova spolužiačka (čo sedí, o Anici vieme, že klame, a teda musí byť v triede s Johnom, ktorý teraz tiež klame).

   Keďže je Robin v triede s Ellie, tak vieme, že tiež hovorí pravdu, a teda je s ním Zara v triede.

   Zarin výrok pre tento prípad sedí, a teda máme jedno správne riešenie: trieda 1 (pravdovravná) - Ellie, Robin a Zara, trieda 2 (klamárska) - John a Anica.

2. Ak by Ellie klamala a John hovoril pravdu: V tomto prípade nie je pravda, že Robin je Ellin spolužiak a je pravda, že Anica nie je Johnova spolužiačka. Máme teda dvojice Ellie, Anica a John, Robin.

   Opäť sedí, že Anica klame a opäť platí, že Robin hovorí pravdu, a teda je Zara jeho spolužiačka. Môžme si skontrolovať, že Zarina podmienka je opäť pravdivá.

   Máme teda druhé správne riešenie: trieda 1 (klamárska) - Ellie a Anica, trieda 2 (pravdovravná) - John, Robin a Zara.

Toto sú jediné 2 správne možnosti, ku ktorým sme sa dopracovali rozobratím všetkých možností.

3

opravovali: **Benjamín „Benji“ Mravec** a **Nina Betáková** 58 riešení
najkrajšie riešenia: Hana Lascsáková, Paulína Pokorná

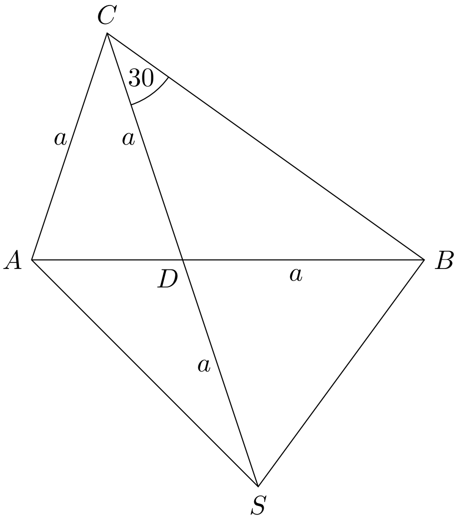
Zadanie

Na mape boli zaznačené 4 mestá Aris, Blei, Caun a Dlin. Mestá Aris, Blei a Dlin ležia na jednej priamke, pričom mesto Dlin leží medzi mestami Aris a Blei. Mesto Caun na tejto priamke neleží. Vzdialenosť miest Aris a Caun je rovnaká ako vzdialenosť miest Caun a Dlin a miest Dlin a Blei. Uhol medzi cestami, ktoré vedú z mesta Caun do miest Dlin a Blei je 30 stupňov. Ellie sa rozhodla všetko lepšie preskúmať, a tak sa vydala po ceste z mesta Caun do mesta Dlin, ale miesto toho, aby zastala v meste Dlin, pokračovala rovnakým smerom a prešla ešte raz toľko. Presne

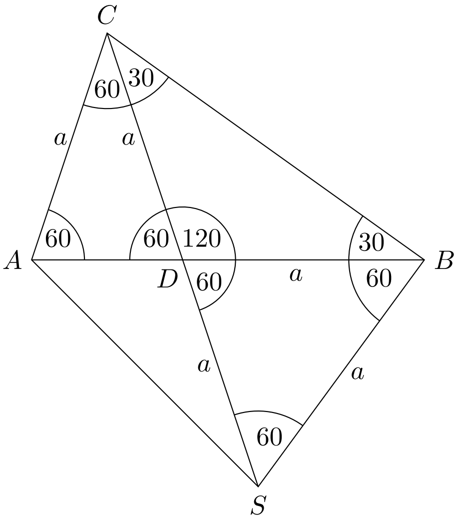
na mieste, kde zastala, našla studňu. Dokážte, že cesta spájajúca studňu s mestom Aris je rovnobežná s cestou spájajúcou mestá Blei a Caun. Všetky cesty na mape sú znázornené úsečkami.

Riešenie

Najprv si načrtnime obrázok. Miesta si zakreslime ako body podľa ich začiatočných písmen. Začnime od bodov A, D a B, ktoré umiestnime na jednu priamku s D medzi A, B. Následne umiestnime bod C nad úsečku AB (ak by sme ho umiestnili pod AB, riešenie by bolo rovnaké, len pootočené). Zo zadania vieme, že $|AC| = |CD| = |DB|$. Označme si túto vzdialenosť spoločným písmenkom a. Ďalej vieme, že bod S je taký, že leží na polpriamke CD (Ellie išla rovno z C do D) a platí $|CD| = |DS|$ (Ellie prešla ešte raz toľko). Z druhej podmienky vieme povedať, že aj $|DS| = a$, pretože $|CD| = a$. Ešte vieme, že uhol $DCB = 30°$.



Pozrime sa na trojuholník BCD. Jeho dve strany DC a DB sú rovnako dlhé. Preto je tento trojuholník rovnoramenný a platí preň, že uhly pri jeho základni (tretej strane) DCB a DBC sú rovnaké. Preto aj uhol $DBC = 30°$. Zo súčtu uhlov v trojuholníku následne vieme povedať, že uhol BDC má veľkosť $180° - 30° - 30° = 120°$. Uhol ADC však potom musí mať veľkosť $180° - 120° = 60°$, pretože je susedný s uhlom BDC. V trojuholníku ADC platí, že $|AC| = |DC|$, preto je aj tento trojuholník rovnoramenný a jeho uhly budú $DAC = ADC = 60°$ a $ACD = 180° - 60° - 60° = 60°$. Všimnime si, že všetky uhly v tomto trojuholníku majú rovnakú veľkosť - trojuholník je teda rovnostranný.
Následne sa pozrime na trojuholník SBD. Jeho uhol SDB je vrcholový s uhlom ADC, a teda má tiež $60°$. Tento trojuholník je tiež rovnoramenný, pretože $|SD| = |BD|$. Uhly pri jeho základni DSB a DBS teda vieme dorátať ako $(180° - 60°) \div 2 = 60°$. Tento trojuholník je opäť rovnostranný, pretože má všetky uhly rovnaké. Vieme teda, že aj $|SB| = a$.



My máme dokázať, že CB je rovnobežné s AS. Všimnime si úsečky AC a SB. Obe majú rovnakú dĺžku a a obe sú kolmé na BC, pretože uhly ACB a SBC vieme už teraz vypočítať ako $60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$. Z toho vieme povedať, že aj bod A, aj bod S sú rovnako vzdialené od priamky CB, čo platí len vtedy, keď priamka vedená cez tieto 2 body je rovnobežná s priamkou CB . No a to je práve tá naša priamka AS, čím sme dokázali tvrdenie zo zadania.

4 opravovali: **Mišo Vodička** a **Bianka Gurská**

najkrajšie riešenie: Filip Saxa

68 riešení

Zadanie

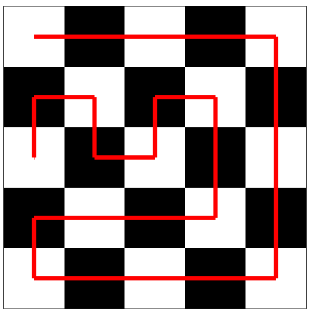
Väzenie má tvar šachovnice s rozmermi 5×5 a na nej jedno políčko ako vchod a jedno ako východ. Aby sa deti dostali von, musia prebehnúť cez šachovnicu, pričom vstúpia vchodom a chcú z nej vyjsť východom. Vždy sa vedia pohnúť len na jedno z políčok, ktoré s tým, na ktorom stoja, susedí hranou. Po vyjdení z políčka sa už do neho nemôžu znova vrátiť. Zistite cez koľko najviac políčok vedia prebehnúť, ak:

- vchod je v prvom políčku v prvom riadku a východ v prvom políčku v treťom riadku.

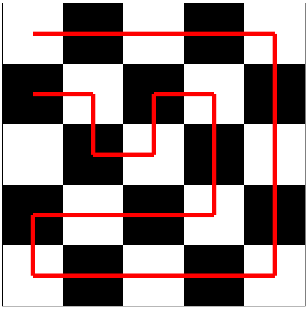
- vchod je v prvom políčku v prvom riadku a východ v prvom políčku v druhom riadku.

Riešenie

Ak je vchod v prvom políčku v prvom riadku a východ v prvom políčku v treťom riadku, tak ako ste skúšaním asi zistili, vieme prebehnúť cez všetkých 25 políčok šachovnice. Existuje viacero spôsobov ako to spraviť, jeden z nich je napríklad tento:



Ak je vchod v prvom políčku v prvom riadku a východ v prvom políčku v druhom riadku, tak sa nám podarí prebehnúť najviac cez 24 políčok šachovnice. Na to, aby sme našli, ako sa to na 24 políčok dá, nám stačí napríklad trochu upraviť predchádzajúci obrázok:



V tejto chvíli vieme, že na 24 políčok to ide a potrebujeme ešte ukázať, prečo to nemôže byť viac. Teda prečo určite nevieme prejsť cez všetkých 25 políčok.

Všimnime si, že keď sme si väzenie naozaj ofarbili ako šachovnicu, tak v tomto prípade je vchod v políčku bielej farby a východ v políčku čiernej farby. Zároveň pri šachovnicovom ofarbení platí, že zakaždým, keď prejdeme na susedné políčko, prejdeme na políčko inej farby. Takže ak začíname na bielom a musíme skončiť na čiernom políčku, tak medzi tým musíme urobiť nepárny počet ťahov, keďže farby sa na našej ceste striedajú. Na to, aby sme prešli cez všetkých 25 políčok, by sme museli spraviť 24 ťahov. To je ale párny počet, a teda sa to nedá.

Komentár

Väčšina z Vás k správnym výsledkom prišla, čo nás veľmi teší. V mnohých riešeniach ale chýbal dôkaz, že nájdený výsledok je skutočne najväčší počet políčok, po ktorých vedia deti prebehnúť a je jedno, ako by išli, cez viac by ich neprešli. Preto do budúcna na túto dôležitú časť nezabúdajte, aby ste zbytočne nestrácali body. :)

5

opravovali: **Veve Vodičková** a **Ľubo Vargovčík**

najkrajšie riešenie: Lucka Erdélyiová

57 riešení

Zadanie

Na papier napísal 6 modrých za sebou idúcich celých kladných čísel a 6 žltých za sebou idúcich kladných čísel, pričom najmenšie modré číslo je menšie ako najmenšie žlté číslo. Potom napísal nových 36 zelených čísel, ktoré vznikli tak, že medzi sebou vynásobí vždy jedno modré číslo s jedných žltým a prejde všetky možné kombinácie (medzi zelenými číslami sa nám môžu čísla aj opakovať). Vieme, že medzi zelenými číslami sa nachádza 49, že žiadne zelené číslo nie je násobkom čísla 64 a že medzi zelenými číslami existuje číslo, ktoré je väčšie ako 80. Aké dvojice čísel môže dostať ako najmenšie modré a najmenšie žlté číslo? Nájdite všetky možnosti.

Riešenie

Pozrime sa na podmienku, že medzi zelenými číslami sa nachádza číslo 49. Súčin 49 vie vzniknúť dvomi rôznymi spôsobmi, a to ako 1×49 a 7×7. To znamená, že máme 2 možnosti: medzi modrými číslami bude 1 a medzi žltými bude 49, alebo medzi modrými aj žltými číslami bude číslo 7. Nemôže platiť, že by medzi modrými číslami bolo 49 a medzi žltými 1, lebo najmenšie modré číslo musí byť menšie ako najmenšie žlté číslo, a takto by bolo najmenšie žlté číslo 1 a modré by mohlo byť najmenej 44.
Pozrime sa teraz na dve možnosti z prvého odseku, pričom zakomponujeme aj podmienku o násobku čísla 64. V možnosti, kde medzi modrými číslami je 1, budú musieť byť ďalšie modré čísla od 2 do 6, keďže počítame iba s kladnými číslami. Vieme, že medzi modrými číslami je 49. Nemôže už medzi nimi byť 48, pretože medzi modrými číslami máme 4 a $48 \times 4 = 192$, čo je 3×64, čiže násobok čísla 64. Žlté čísla teda budú od 49 po 54. Je ľahké overiť, že nevznikne žiaden násobok čísla 64. Platí aj posledná podmienka, keďže napríklad 6×54 je viac ako 80.
Druhá možnosť je, že v oboch skupinách čísel je číslo 7. Číslo 8 nemôže byť v oboch skupinách naraz, lebo by bola porušená druhá podmienka, keďže $8 \times 8 = 64$. Pozrime sa na to, aké vie byť najväčšie modré číslo. Keby to bolo menej ako 7, tak by 7 nevedelo patriť do skupiny modrých čísel. Keby to však bolo viac ako 7, tak by medzi modrými číslami muselo byť aj číslo 8, a teda už by 8 nemohlo byť medzi žltými číslami. To by však znamenalo, že najmenšie modré číslo je väčšie ako najmenšie žlté, čo platiť nemôže. Najväčšie modré číslo teda musí byť 7. Najväčšie žlté číslo by mohlo byť najviac 12, ak by tam boli čísla od 7 po 12. Vtedy by bola splnená aj posledná podmienka, keďže $12 \times 7 = 84$. Nie je tu medzi súčinmi žiaden násobok 64, čiže táto možnosť je správna. Keby sme znížili najväčšie žlté číslo na 11, tak už by bol najväčší súčin len 77, teda by nebola splnená posledná podmienka.
Máme teda dve možnosti pre najmenšie modré a žlté číslo a sú to 1 a 49, respektíve 2 a 7.

Komentár

Niektorým z Vás sa úlohu podarilo pekne vyriešiť a tým aj získať 9 bodov. :) Častou chybou bolo to, že ste si neuvedomili, že súčin 49 môžeme získať dvomi spôsobmi. Väčšinou ste prišli na možnosť 7×7, teda pre najmenšie modré 1 a najmenšie žlté 7, ale zabudli ste na možnosť 1×49. V mnohých riešeniach taktiež chýbalo vysvetlenie, ako ste k týmto číslam prišli. Preto nezabúdajte, že v takýchto úlohách je potrebné nie len nájsť riešenie, ale aj zdôvodniť, že fungujú a iné neexistujú. :)

6 opravovali: **Taly Poliačiková** a **Paťo Paľovčík**
najkrajšie riešenie: Viktoriia Boyko

52 riešení

Zadanie

Toto námestie má tvar šesťuholníka. V každom vrchole šesťuholníka stojí dom s kladným celým číslom a medzi každými dvoma susednými domami je na chodníku napísaný súčet čísel týchto dvoch domov. Pre každé číslo od 1 do 12 platí, že sa na námestí nachádza práve raz, buď ako číslo domu alebo ako súčet napísaný na chodníku. Ukážte, že ak je vo vrcholoch na domoch napísaných najviac nepárnych čísel ako je celkovo možné, tak v jednom z vrcholov sa určite nachádza dom s číslom 3.

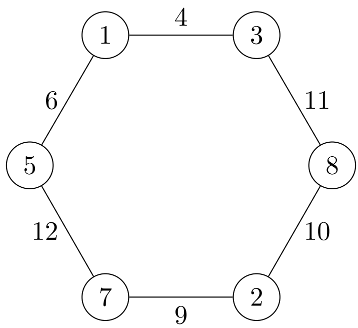
Riešenie

Máme k dispozícii čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 a každé musíme použiť práve raz. Každé z čísel je preto napísané buď na dome, alebo na chodníku. Všimnime si, že máme šesť párnych a šesť nepárnych čísel.
Domy s párnym číslom budeme skrátene nazývať *párne domy* a domy s nepárnym číslom zas *nepárne domy.*
Jediný spôsob zápisu 2 ako súčet dvoch kladných celých čísel je $2 = 1 + 1$. My však máme k dispozícii len jednu 1, lebo každé z čísel je použité práve raz. Číslo 2 teda musí byť napísané na dome.

Teraz skúsme zistiť, koľko najviac nepárnych čísel môže byť napísaných na dome, t.j. koľko najmenej párnych čísel musí byť napísaných na dome. Vieme, že 2 je číslo na dome. Ak by oba susedné domy domu s číslom 2 mali nepárne číslo, tak na susedných chodníkoch by boli napísané nepárne čísla, pretože párne číslo plus nepárne číslo je nepárne číslo. Nepárnych čísel je len šesť a dve z nich budú na chodníku, takže na domoch môžu byť maximálne štyri nepárne čísla. Ak by na nejakom susednom dome domu č. 2 bolo párne číslo, tak by sme mali dva domy s párnym číslom. Potom by bol počet nepárnych domov tiež maximálne štyri. Tým sme ukázali, že najväčší možný počet nepárnych domov je štyri. To však ešte neznamená, že sa to so štyrmi nepárnymi domami dá vyriešiť! Treba nájsť aspoň jedno riešenie so štyrmi nepárnymi domami.

Váš postup hľadania konkrétneho riešenia mohol byť iný a mohli ste sa dopracovať k inému výsledku. Tu si uvedieme iba príklad, ako sa dalo rozmýšľať.
Zadanie napovedá, že ak nejaké riešenie so štyrmi párnymi domami existuje, tak 3 by malo byť číslo domu. Tento poznatok nám trochu uľahčí hľadanie konkrétneho riešenia. (Tu však treba byť opatrný, nie je to totiž argument, iba potenciálna pomôcka. Nemôžme sa na to spoliehať, pretože zadanie by mohlo byť aj chyták a riešenie by vôbec nemuselo existovať.)
Číslo 1 nevieme dostať ako súčet dvoch rôznych kladných celých čísel, preto 1 musí

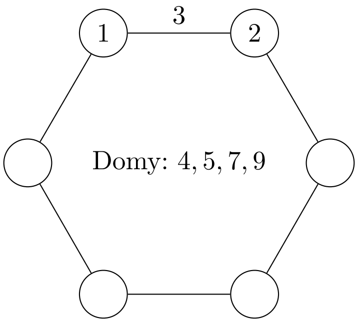
byť napísané na dome. Skúsme napríklad, nech 1 a 3 sú čísla napísané na susedných domoch. Potom 4 musí byť napísané na chodníku medzi domami s číslami 1 a 3, lebo $4 = 1 + 3$. Povedzme, že 6 je napísané na chodníku. Číslo 6 dostaneme ako $6 = 1 + 5 = 2 + 4$. Číslo 4 sme už použili na chodník, teda 5 musí byť číslo domu susediaceho s domom č. 1 a medzi domami s číslami 1 a 5 je chodník s číslom 6. Teraz $8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5$ a z každej dvojice sme už niečo použili, teda 8 musí byť číslo domu. Nemôže susediť s domom č. 5, lebo $8 + 5 = 13 > 12$, ale môže susediť napríklad s domom č. 3. Na chodníku medzi domami s číslami 3 a 8 je potom napísané 11. Ešte musíme použiť dom č. 2 a posledný dom musí byť nepárny, čiže na ňom bude napísané jedno z čísel 7 a 9. Ani jedno z nich nemôže susediť s 8 a iba 7 môže susediť s 5, inak by bol súčet väčší ako 12. Na chodníku medzi domami č. 5 a č. 7 je napísané 12, zostávajúci dom má číslo 2. Na chodníkoch vedúcich z domu č. 2 sú napísané čísla 9 a 10.



Našli sme aspoň jedno možné riešenie pre štyri nepárne domy a ukázali sme, že nemôže byť viac nepárnych domov. Ešte treba ukázať, že každé riešenie so štyrmi nepárnymi domami obsahuje dom s číslom 3. To je to isté ako ukázať, že neexistuje riešenie so štyrmi nepárnymi domami také, že číslo 3 je napísané na chodníku.

Ukážeme to rozobratím všetkých možností. Jediný spôsob, ako možno 3 zapísať ako súčet dvoch rôznych kladných celých čísel je 3=1+2. Z toho vyplýva, že ak je 3 napísané na chodníku, musí spájať domy č. 1 a č. 2. Šesťuholník môžeme otáčať, stále však bude rovnaký. To, či nejaké riešenie bude, resp. nebude fungovať nezávisí od toho, ako šesťuholník otočíme. Môžeme si preto povedať, že číslo 1 je vždy napísané na dome, napr. v ľavom hornom vrchole a dom č. 2 susedí s domom č. 1 sprava. Tým si znížime počet možností, ktoré treba skúšať a tiež sa vyhneme zbytočnému skúšaniu rovnakých možností. Ďalej vieme, že 4 musí byť číslo domu. Totiž, 4 sa dá napísať ako súčet dvoch rôznych kladných celých čísel len ako $4 = 1 + 3$, lenže 3 sme už použili ako číslo na chodníku.

Potrebujeme štyri nepárne domy na námestí, preto tri zvyšné domy už musia mať na sebe napísané niektoré z čísel 5, 7, 9. Dom č. 9 môže susediť len s domami s číslami 1 a 2 (3 je už napísané na chodníku) inak by bol súčet napísaný na chodníku väčší ako 12. Zároveň dom č. 9 potrebuje mať dvoch susedov, teda musí susediť s domom č. 1 aj s domom č. 2 naraz. To však nie je možné, lebo domy č. 1 a č. 2 musia nutne susediť spolu (aby bolo napísané 3 na chodníku).



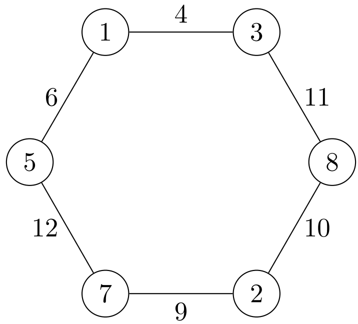
Tým sme ukázali, že neexistuje riešenie so štyrmi nepárnymi domami, ktoré by malo napísané na chodníku číslo 3. Zistili sme, že štyri je maximálny počet nepárnych domov. Potvrdili sme to nájdením aspoň jedného riešenia. To znamená, že v každom riešení so štyrmi nepárnymi domami, musí byť číslo 3 napísané na dome, čo sme chceli ukázať.

Iné riešenie

Súčet čísel, ktoré dopĺňame, teda od 1 do 12, je 78. Môžeme si uvedomiť, že každé číslo na dome sa vyskytne v dvoch súčtoch na chodníkoch. Súčet čísel na chodníkoch sa teda rovná dvojnásobku súčtu čísel na domoch. Ak si rozdelíme súčet 78 na tretiny, vyjde nám, že na domoch musí byť súčet čísel 26 a na chodníkoch súčet 52.

Čísla 1 a 2 musia byť na domoch, keďže nevedia byť napísané ako súčet dvoch rôznych menších čísel. Naopak, čísla 11 a 12 musia byť na chodníkoch, keďže nevedia s 2 ďalšími rôznymi susednými číslami dávať súčet do 12.

Chceme na domoch dosiahnuť čo najviac nepárnych čísel. Vieme, že 11 tam nemôže byť, naopak 2 musí. Keby sme chceli na domoch 5 nepárnych čísel, súčet by bol $1+2+3+5+7+9=27$, avšak my potrebujeme 26. Najviac tam teda budú musieť byť 4 nepárne čísla. Keby sme vynechali číslo 3, tak by vedel byť najmenší možný súčet $1+2+4+5+7+9=28$, čo je viac ako 26. Už len stačí ukázať, že existuje konkrétne rozloženie pre 4 nepárne čísla s 3 vo vrchole, a to je napríklad takéto:



Vždy sa na námestí teda nachádza dom s číslom 3.

Komentár

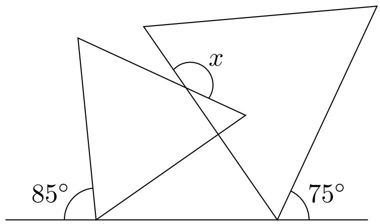
Viacerí z Vás mali pekné myšlienky, napríklad ohľadom toho, že čísla 1 a 2 musia byť na domoch a 11 a 12 musia byť na chodníkoch. Často ste však potom ukázali len jedno konkrétne rozloženie domov, kde 3 je na dome. To však pri úlohe, kde treba niečo dokázať, nestačí a je potrebné ukázať, že to platí pre každé rozloženie. Taktiež bolo potrebné ukázať, čo je maximálny počet nepárnych čísel, od čoho sa potom odvíjal zvyšok riešenia, čo ste viacerí len odhadli bez dokázania.

Zadania 2. série úloh zimného semestra

Riešenia pošlite najneskôr do **20. novembra 2023**

Úloha 1

Na obrazci sú dva rovnostranné trojuholníky ako na obrázku. Aká je veľkosť uhla označeného ako x?



Úloha 2

Deti Anica, Ellie, Robin, John a Zara našli na námestí kamene. Keď si ich podávali a pozerali, zistili, že už nikto nedrží kameň, ktorý našiel. Platia 4 tvrdenia:

- *Robin a Zara našli rovnako veľké kamene.*
- *Kameň, ktorý našiel John má rovnaký človek, ktorého kameň má John.*
- *Zara drží kameň, ktorý je menší ako kameň, ktorý našla.*
- *Robin dostal Anicin kameň.*

Kto mohol dostať kameň, ktorý našla Ellie? Nájdite všetky možnosti.

Úloha 3

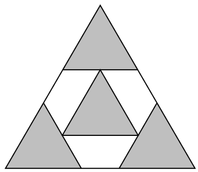
Ukáže im mriežku 1×100 políčok. V prvých dvoch políčkach sú položené dve mince. Hru hrajú dvaja hráči, pričom ťah vyzerá tak, že si hráč vyberie jednu z dvoch mincí a posunie ju o ľubovoľný počet políčok doprava. Pri posune nesmie minca preskočiť inú mincu a nesmie byť položená na políčko, kde je práve iná minca. Hra končí, keď sa mince nachádzajú v predposlednom a poslednom políčku mriežky. Vyhráva hráč, ktorý ako posledný urobil ťah. Pre ktorého z hráčov existuje výherná stratégia a aká? Výherná stratégia je postup, podľa ktorého, keď jeden hráč hrá, tak vyhrá bez ohľadu na ťahy súpera.

Úloha 4

Štvorcová šachovnica s rozmermi $n \times n$ (teda so stranou dlhou n políčok) je zafarbená tak, že každé políčko je buď červené, modré, alebo zelené. Nájdite najmenšie číslo n také, že bez ohľadu na to, ako zafarbíme políčka šachovnice $n \times n$, tak v každom riadku a v každom stĺpci budú nejaké tri políčka rovnakej farby. Ukážte, prečo to pre toto n bude vždy platiť. Tiež ukážte, že pre akékoľvek menšie n vieme šachovnicu $n \times n$ ofarbiť tak, aby v žiadnom stĺpci a v žiadnom riadku neboli tri políčka rovnakej farby.

Úloha 5

Štyri rovnostranné trojuholníky rovnakej veľkosti sú usporiadané vo vnútri väčšieho rovnostranného trojuholníka tak, ako je znázornené na obrázku (vrcholy vnútorného sivého trojuholníka ležia v stredoch strán rohových sivých trojuholníkov). Strany menších trojuholníkov sú rovnobežné so stranami väčšieho trojuholníka. Obsah väčšieho trojuholníka je 50. Aký je obsah sivej časti?



Úloha 6

Špeciálny výťah má tri trubice, v ktorých sú guľôčky. Po každej minúte z každej trubice jedna guľôčka zmizne a všetky tri zmiznuté guľôčky sa zjavia v niektorej z týchto trubíc. Ak v nejakej trubici už nie je žiadna guľôčka, objavia sa v každej trubici dve nové guľôčky. Môže nastať situácia, kedy bude vo všetkých troch trubiciach rovnako veľa guľôčok, ak sú na začiatku v trubiciach počty 15, 20 a 25 guľôčok?

Poradie po 1. sérii zimného semestra

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1. - 5.	Lucia Erdélyiová	Z5	ZPankBA	9	9	9	9	9	6	54
	Viktoriia Boyko	Z5	ZBudimir	9	9	9	9	9	9	54
	Hana Lascsáková	Z6	ZHronKE	9	9	9	9	9	9	54
	Artem Pivnenko	Z5	ZBudimir	9	9	9	9	9	9	54
	Filip Foldes	Z4	GESChar	9	9	9	9	9	1	54
6.	Filip Saxa	Z5	ZsvVorPHA	9	9	9	9	7	-	52
7.	Dorota Feňovčíková	Z5	ZBeleKE	9	9	9	6	9	-	51
8. - 9.	Bruno Kovács	Z5	ZŠmerPO	9	9	8	7	9	4	50
	Andrej Mišuth	Z4	ZŠMA	8	9	9	6	5	9	50
10. - 11.	Marko Vasiľ	Z6	GAlejKE	9	9	7	9	9	6	49
	Branislav Jendroľ	Z6	ZČeskáBA	9	8	9	7	7	9	49
12.	Tomáš Budaj	Z6	ZPAngKE	9	9	9	6	9	4	46
13. - 14.	Elena Mikušová	Z6	GAMČABA	9	9	9	9	-	9	45
	Adam Kšenžigh	Z5	ZSNPBB	9	9	7	6	5	7	45
15.	Matúš Varhoľák	Z6	ZSCaMKE	9	9	9	6	7	4	44
16.	Lucia Babjakova	Z6	GsvTAKE	9	9	8	9	8	-	43
17.	Peter Pavol Ihnát	Z4	ZKrPole	3	6	9	6	5	8	42
18.	Júlia Rusnáková	Z6	ZKe30KE	9	5	9	6	4	8	41
19. - 20.	Michal Višňovský	Z5	ZLipany	9	9	2	6	7	1	39
	Zoran Pšenica	Z6	GAlejKE	6	7	6	9	5	6	39
21.	Zuzana Šándorová	Z6	ZLipany	9	6	7	6	7	3	38
22.	Richard Palenčar	Z5	ZKro4KE	6	9	3	6	4	5	35
23. - 24.	Ivana Kiselá	Z5	ZKro4KE	9	4	3	6	5	5	34
	Daniel Feher	Z4	ZPAngKE	9	7	-	9	-	-	34
25. - 26.	Nikolas Kondžura	Z4	ZMájNPO	4	9	-	6	7	-	33
	Marek Žežula	Z6	GAlejKE	9	9	-	6	9	-	33
27. - 28.	Adam Feher	Z6	ZPAngKE	6	9	-	9	5	3	32
	Filip Komjáti	Z6	GAlejKE	6	5	4	8	5	4	32
29.	Slávka Humeníková	Z6	GAlejKE	9	5	6	6	5	-	31
30. - 31.	Richard Závodský	Z6	ZSR	5	8	5	6	2	2	28
	Patrik Novotný	Z5	ZJuhVnT	3	5	3	6	8	0	28
32.	Elena Švecová	Z6	GsvESKE	6	5	-	6	9	-	26
33. - 36.	Peter Keller	Z5	ZSNPBB	3	5	3	6	5	1	25
	Simon Smoliga	Z6	ZTJMMI	3	2	4	6	7	3	25
	Pavol Fejko	Z6	ZZalužice	8	1	7	6	1	2	25
	Samuel Bittner	Z5	ŠpMNDaG	9	1	8	-	-	6	25
37.	Jakub Strizko	Z6	GAMČABA	9	9	-	6	-	-	24
38.	Margaréta Škriabová	Z5	ZKro4KE	4	9	9	-	-	-	22
39. - 40.	Lenka Falatová	Z5	ZLipany	5	9	-	5	1	0	21
	Mirra Volchenko	Z6	GAlejKE	7	4	1	6	3	0	21
41. - 42.	Matej Martinec	Z5	ZSNPBB	3	2	2	6	5	1	20
	Karin Kožušková	Z5	ZLipany	5	2	3	6	2	0	20
43. - 44.	Šimon Gabona	Z5	ZKro4KE	9	1	1	3	3	1	18
	Michal Klobušník	Z6	GAlejKE	4	2	1	6	2	3	18
45. - 47.	Diana Kosturová	Z6	GAlejKE	5	6	2	0	1	3	17
	Pavol Murín	Z5	ZKro4KE	9	8	-	-	-	-	17
	Bianka Petríková	Z5	ZLipany	5	1	0	6	3	1	17
48. - 49.	Nina Koleničová	Z6	GAlejKE	3	5	2	3	3	0	16
	Cyril Hreus	Z5	ZKro4KE	9	7	-	-	-	-	16

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
50. - 53.	Filip Šoltys	Z5	ZLipany	5	1	1	3	4	1	15
	Paulína Pokorná	Z5	ŠpMNDaG	-	-	9	6	-	-	15
	Viliam Frischer	Z4	ZPAngKE	9	3	-	-	-	-	15
	Laura Musinska	Z5	ZKro4KE	3	2	2	6	-	-	15
54. - 55.	Maximilián Ledl	Z6	ZMRSTV	3	1	1	5	3	1	14
	Jakub Madžo	Z5	ZKro4KE	3	0	1	6	3	0	14
56.	Dávid Borták	Z6	ZKro4KE	-	6	-	6	-	-	12
57.	Chiara Mária Bujňačková	Z6	ZLipany	3	0	7	1	0	0	11
58. - 59.	Richard Varecha	Z6	ZKro4KE	5	5	-	-	-	-	10
	Ludovit Kovanic	Z6	GAlejKE	6	4	-	-	-	-	10
60. - 63.	Patrik Lehocký	Z5	ZKro2KE	9	-	-	-	-	-	9
	Timea Pačanová	Z6	ZLipany	5	2	1	0	0	1	9
	Ivana Kuľbagová	Z6	ZLipany	7	1	1	0	0	0	9
	Jakub Vadovič	Z2	ZKošiBA	9	-	-	-	-	-	9
64. - 66.	Filip Urda	Z5	ZLipany	8	0	0	0	0	0	8
	Marko Minarčik	Z5	ZKro4KE	-	2	-	6	-	-	8
	Peter Sabol	Z6	ZLipany	5	0	1	0	1	1	8
67. - 68.	Dominika Futejová	Z6	ZLipany	0	1	2	4	0	0	7
	Katarína Majtnerová	Z6	ZLipany	4	1	2	0	0	0	7
69. - 72.	Zoja Čarnogurská	Z6	ZPAngKE	-	-	-	6	-	-	6
	Patrik Bielak	Z6	ZLipany	5	-	1	-	-	0	6
	Matúš Szabo	Z6	ZKomeMI	5	1	-	0	-	-	6
	Tomáš Smetanka	Z6	ZLipany	3	1	0	0	1	1	6
73. - 77.	Jakub Kovaľ	Z5	ZJuhVnT	3	1	-	0	1	-	5
	Roman Schütz	Z6	ZKro4KE	5	-	-	-	-	-	5
	Oliver Emanuel Tomečko	Z6	GAlejKE	5	0	0	0	-	0	5
	Peter Burinský	Z5	ZKro4KE	4	0	0	0	1	0	5
	Lukáš Smetanka	Z6	ZLipany	3	1	0	0	0	1	5
78.	Jana Cvejkušová	Z5	ZJuhVnT	1	0	0	2	1	-	4
79.	Patrik Požonský	Z5	ZLipany	3	-	-	-	-	-	3
80.	Andrej Onderisin	Z6	ZKro4KE	-	-	-	0	-	-	0

Názov:	MALYNÁR – korešpondenčný matematický seminár Číslo 2 • September 2023 • Zimný semester 33. ročníka
Web:	`malynar.strom.sk`
E-mail:	`malynar@strom.sk`
Riešenia:	Prijímame odovzdaním na webe, poštou a len v prípade poruchy na adrese `riesenia@strom.sk`
Organizátor:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.