Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo **5** — Ročník **22** Internet http://matik.strom.sk

Ahooooooooj!

Vonku si už teraz asi žiadneho snehuliaka nepostavíme, ale aspoň konečne začína byť trošičku teplejšie a prebúdza sa nádherná príroda. To je jasným a nezameniteľným dôkazom príchodu jari. S ňou k vám prichádza aj najnovšie číslo vášho milovaného *MATIK*a, ďalšie pokračovanie príbehu a nová šestica zaujímavých úloh. Už iba táto šestica vás delí od letného sústredenia, na ktoré sa, dúfame, tešíte aspoň tak ako my, a tak sa posnažte potrápiť si trochu hlavičky a poslať nám pekné riešenia.

Vaši obľúbení vedúci

Vzorové riešenia 1. série úloh

1

opravovali **Martin Poli Polačko**

najkrajšie riešenia: Katarína Krajčiová, Viktória Valachová

27 riešení

V tejto úlohe je najdôležitejšie uvedomiť si, kedy je číslo deliteľné 3. Je to práve vtedy, keď ciferný súčet daného čísla je deliteľný 3. Na to väčšina z vás prišla. Teda máme 4-ciferné číslo zložené z cifier 1, 2 a 4. Jeho ciferný súčet môže byť minimálne $1 + 1 + 1 + 1 = 4$ a maximálne $4 + 4 + 4 + 4 = 16$. Takže ak chceme, aby toto číslo bolo deliteľné 3, tak ciferný súčet musí byť 6, 9, 12 alebo 15. Teraz postupne rozoberieme tieto 4 možnosti.

Ciferný súčet je 6.

Ak má byť ciferný súčet 6, tak nemôžeme použiť 4-ku, lebo potom by zvyšné tri cifry museli mať súčet 2, čo nie je možné, keďže nemôžeme použiť 0. Musíme použiť dve cifry 2, lebo ak by sme použili tri, tak by už bol ciferný súčet 6, a teda posledná cifra by musela byť 0 (to nemôže). Jedna cifra 2 by bola málo, pretože potom by súčet troch zvyšných cifier musel byť 4 a môže byť len $1 + 1 + 1 = 3$. Teda použijeme dve cifry 2, a do súčtu nám chýba ešte 2, čo sú presne dve cifry 1. Z cifier 1, 1, 2, 2 vieme vytvoriť šesť 4-ciferných čísel.

Ako na to môžeme ľahko prísť? Najskôr si uvedomme, že každé z týchto štvorciferných čísel je jednoznačne dané tým, na ktorých pozíciách je cifra 2 (na zvyšné dve pozície potom jednoducho dáme cifru 1). Prvú cifru 2 vieme umiestniť na jednu zo 4 pozícií, druhú už len na 3 (pretože jednu pozíciu už máme obsadenú). To je spolu $4 \cdot 3 = 12$ možností. Keby sme ale tieto dve cifry 2 vymenili, tak vytvoríme rovnaké číslo. Preto počet možností predelíme dvoma, teda $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. Máme prvých 6 riešení (1122,1212,1221,2112,2121,2211).

Ciferný súčet je 9.

Pozrime sa teraz na ďalšiu možnosť - ciferný súčet 9. Zrejme musíme využiť jednu cifru 4 (ak by sme nepoužili žiadnu, tak ciferný súčet by mohol byť najviac $2 + 2 + 2 + 2 = 8$, čo je málo; naopak, keby sme využili až dve, tak by sme zo

zvyšných dvoch cifier museli vytvoriť súčet $9 - 8 = 1$, čo nie je možné, keďže 0 použiť nemôžeme). Teraz nám ostali ešte tri cifry, ktoré musia dať súčet $9 - 4 = 5$. Teda musíme použiť dve cifry 2 a jednu cifru 1 (z troch číslic - dvojok a jednotiek - vieme vytvoriť súčet maximálne $2 + 2 + 2 = 6$, teda tento súčet máme zmenšiť o jedna, čo sa nedá inak, ako zmeniť cifru 2 na cifru 1). Takže sme dostali štvoricu čísel 4, 2, 2, 1. Koľko rôznych čísel z nich vieme vytvoriť? Začneme napr. cifrou 4, tú môžeme umiestniť na 4 rôzne pozície. Pre cifru 1 máme už len 3 možnosti a cifry 2 už potom dáme na prázdne miesta, teda $4 \cdot 3 = 12$ riešení.
Ciferný súčet je 12.
Ak by bol ciferný súčet 12, tak musíme použiť dve cifry 4 (tri by už boli veľa, lebo posledná cifra by musela byť 0, čo nemôže, a ak by bola len jedna cifra 4, tak súčet zvyšných troch cifier by musel byť 8, čo nie je možné, keďže $2 + 2 + 2 = 6$). Teda máme zatiaľ dve cifry 4, to je ciferný súčet 8. Do súčtu 12 nám chýba ešte 4, ktorý máme vytvoriť pomocou súčtu dvoch cifier, teda musíme použiť dve 2-ky. Takže sme došli k štvorici čísel 2, 2, 4, 4. Opäť máme dve dvojice rovnakých cifier, teda princíp bude rovnaký ako v prípade ciferného súčtu 6. Možností bude tak isto 6.
Ciferný súčet je 15.
Logicky ciferný súčet 15 z týchto troch číslic vytvoriť nemôžeme, pretože ak by boli všetky štyri cifry 4, tak by bol tento súčet 16. Každú cifru môžeme jedine zmenšiť, ale zmenšiť súčet o 1 nie je možné, keďže cifru 3 použiť nemôžeme.
Spolu teda máme $6 + 12 + 6 = 24$ štvorciferných čísel deliteľných 3.
Úloha sa dala riešiť aj trochu inak. Na to, aby bolo číslo deliteľné 3, musí byť jeho ciferný súčet deliteľný 3. Každé celé číslo vieme rozpísať ako súčet nejakého násobku 3 a zvyšku po delení troma, napr. $4 = 3 \cdot 1 + 1$, $2 = 3 \cdot 0 + 2$, $1 = 3 \cdot 0 + 1$. Všimnime si, že ak sčitujeme čísla, ktoré sú deliteľné 3 (teda dávajú pri delení 3 zvyšok 0), aj ich výsledný súčet bude deliteľný 3 (napr. $3 + 6 = (3 \cdot 1 + 0) + (3 \cdot 2 + 0) = 3 \cdot 3 + 0 = 3 \cdot 3$). Ak ale sčitujeme čísla, ktoré nie sú deliteľné 3 (pri delení 3 dávajú nenulové zvyšky), ich súčet bude deliteľný tromi práve vtedy, ak sa zvyšky jednotlivých čísel sčítajú do čísla deliteľného 3 (napr. $4 + 5 = (3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 1 + 2) = 3 \cdot 2 + (1 + 2) = 3 \cdot 2 + 3 = 3 \cdot 3$ - deliteľné 3). Z hľadiska deliteľnosti 3 nás teda nezaujíma samotné číslo, ale zvyšok, ktorý dáva pri delení 3.
Máme k dispozícii cifry 1, 2, 4. Cifry 1 a 4 dávajú pri delení 3 zvyšok 1, cifra 2 dáva zvyšok 2. Ukážeme teraz, že v našom hľadanom čísle musia byť práve dve cifry 2 a dve iné cifry (1 alebo 4).
Ak nemáme žiadnu cifru 2, máme 4 cifry, ktoré dávajú zvyšok 1. Celkovo teda tieto zvyšky dajú súčet 4, čo nie je deliteľné 3.
Ak mám 1 dvojku, celkový súčet zvyškov je: $1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5$
Ak mám 2 dvojky, celkový súčet zvyškov je: $2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6$
Ak mám 3 dvojky, celkový súčet zvyškov je: $3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 7$
Ak mám 4 dvojky, celkový súčet zvyškov je: $4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 8$
Ďalej je už riešenie jednoduché - vieme, že v našom čísle budeme mať cifry 1, 1, 2, 2 alebo 1, 4, 2, 2 alebo 4, 4, 2, 2. Potom nám zostáva len zistiť počet všetkých

možných usporiadaní, rovnako ako sme to urobili v prvej časti vzorového riešenia.

Komentár. Úlohu sa mnohým podarilo veľmi pekne vyriešiť (nájdenie výsledkov). Zvlášť sa nám páčili riešenia v ktorých bolo ukázané, prečo sa napr. ciferný súčet 9 nedá dosiahnuť inak ako 4+2+2+1=9. Jedna možnosť bola taká, ako vo vzorovom riešení, okrem toho sa ešte dali vypísať všetky možné ciferné súčty (je ich 15) a z nich vybrať tie, ktoré vyhovujú. Väčšina z vás pri tejto úlohe použila vypisovanie. Rada od nás znie: vždy, keď niečo vypisujete, nájdite si systém, podľa ktorého to budete robiť a napíšte ho do riešenia.

2 opravovali **Robo Tóth** a **Feri Kardoš**

najkrajšie riešenia: František Lami, Juraj Polačko

21 riešení

Skôr ako začneme s riešením pripomeňme, že diamanty majú hodnotu 9, a rubíny hodnotu 5. Tak poďme na to. Hľadané číslo nebude veľké, pretože vhodným počtom deviatok (maximálne 9) vieme vytvoriť akúkoľvek poslednú cifru a pripočítavaním dvoch pätiek (čiže desiatky) vieme dotvoriť všetky ostatné cifry. Keďže teda bude stačiť vyskúšať neveľa možností, vhodným spôsobom, ako úlohu vyriešiť, je krátka úvaha: ak existuje 5 za sebou idúcich počtov bodov (resp. prirodzených čísel), ktoré sa dajú dosiahnuť, budú sa dať dosiahnuť aj všetky väčšie. A to všetko iba zbieraním rubínov, čiže piatich bodov. Ukážeme ako:
Ak vieme nazbierať x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4\ldots$ bodov, potom ak ku každému počtu bodov pripočítame jeden rubín, dostávame $x+5, x+6, x+7, x+8, x+9$ teda nasledujúcich 5 čísel. Takto to vieme robiť donekonečna, a teda všetky čísla väčšie alebo rovné ako x už vieme dosiahnuť. Teraz skúšame zaradom a hľadáme päticu za sebou idúcich čísel, čo sa dajú získať. Nakoniec s víťazoslávnym úsmevom na tvári zistíme, že 31 sa nedá, $32 = 3\cdot 9+5; 33 = 2\cdot 9+3\cdot 5; 34 = 9+5\cdot 5; 35 = 7\cdot 5; 36 = 4\cdot 9$. To znamená, že 31 je najväčšie číslo, ktoré sa nedá dosiahnuť.

Komentár. Veľa z vás malo problémy ani nie tak s riešením, ako so zrozumiteľným vyjadrovaním. Ak sa rozhodnete rozoberať väčší počet prípadov, vaše riešenie si priam vyžaduje prehľadné umiestnenie čísel do tabuliek. Je potom oveľa ľahšie sledovať vaše myšlienkové pochody a teda aj ľahšie dať vám plný počet bodov. Okrem toho by bolo fajn, aby ste písali aj veci, ktoré sa vám zdajú zrejmé. Dôkladné riešenie si vyžaduje aj takéto kroky (napr., že násobky 5 sa nedajú získať), pretože opravovatelia sa môžu iba dohadovať, či ste na to prišli naozaj, či ste riešili intuitívne, alebo ste jednoducho zabudli.

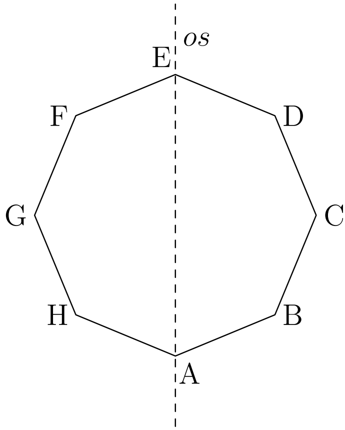
3 opravovala **Katka Povolná** a **Jakub Sedlák**

najkrajšie riešenia: Matúš Čirip

20 riešení

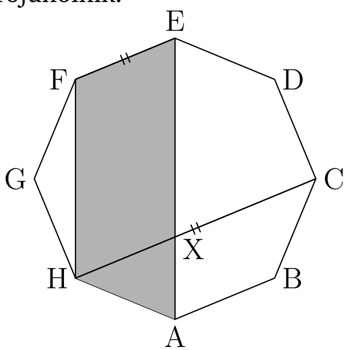
Prvým krokom k vyriešeniu geometrickej úlohy je dobrý obrázok. Pozrime sa teda, ako daná situácia vyzerá.
Úlohou je dokázať, že trojuholníky AXH a XCE sú rovnoramenné. Dôležitou myšlienkou, ktorá výrazne pomôže a na ktorú väčšina z vás prišla, je, že ak je trojuhol-

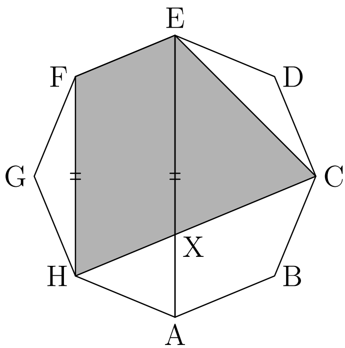
ník rovnoramenný, tak má nielen 2 strany rovnakej dĺžky, ale aj 2 uhly rovnakej veľkosti. Ak máme dokázať, že je nejaký trojuholník rovnoramenný, stačí ukázať len jednu z týchto rovností.



Takmer všetci ste si všimli, že výhodnejšou sa zdá byť rovnosť uhlov. Je niekoľko spôsobov, ako túto úlohu riešiť. Ukážeme jedno veľmi elegantné riešenie „pozriem a ahaho, vidím! “, a potom výpočtové riešenie cez počítanie veľkostí uhlov. Poďme teda na to. Najprv sa poriadne pozrime na obrázok. Pravidelný osemuholník je super v tom, že má pomerne veľa osí súmernosti. Konkrétne všetky jeho hlavné uhlopriečky (úsečky *AE*, *BF*, *CG*, *DH*) a osi všetkých jeho strán sú zároveň osami súmernosti. Vieme potom nájsť veľa dvojíc vrcholov, ktoré sú súmerné podľa nejakej z týchto osí. Napr. v osovej súmernosti podľa osi *AE* sú súmerné vrcholy *B* a *H*, vrcholy *C* a *G* a tiež vrcholy *D* a *F*. To ale znamená, že úsečky *BH*, *CG*, *DF* sú všetky kolmé na úsečku *AE*, a teda sú rovnobežné. Podobne vieme nájsť veľa iných navzájom rovnobežných priamok prechádzajúcich dvojicami vrcholov pravidelného osemuholníka (skúste si ich nájsť sami!). Toto zistenie si dobre zapamätáme, pretože v ďalšom postupe ho budeme často využívať.

Pozrieme sa na obrázok ešte raz. Z toho, čo sme práve povedali, vyplýva, že štvoruholník *AEFH* je lichobežník (lebo $AE \parallel HF$), a dokonca rovnoramenný (lebo $|AH| = |EF|$). Tu sa nám naskytá úžasná možnosť využiť vlastnosti rovnoramenných lichobežníkov. V rovnoramenných lichobežníkoch totiž platí, že ak budeme jedno z ramien posúvať v lichobežníku na opačnú stranu, až do druhého vrchola kratšej základne, tak nám rozdelí pôvodný lichobežník na rovnobežník a rovnoramenný trojuholník.

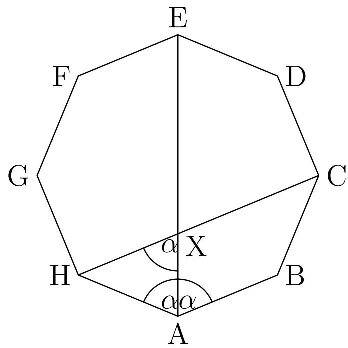




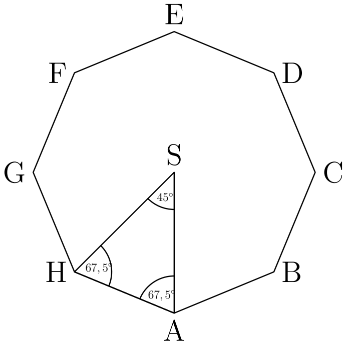
Dôkaz je jednoduchý - vyplýva zo súmernosti rovnoramenného lichobežníka a zhodnosti súhlasných uhlov. Ak teda ukážeme, že $EF \parallel XH$ (teda že *XH* je „posunuté “ rameno *EF*), bude to znamenať, že trojuholník *AXH* je rovnoramenný. Ale ahaho, veď $EF \parallel CH$ (súmernosť podľa osi strany EF), to znamená, že aj $EF \parallel HX$! A dôkaz je hotový.

Veľmi podobne dokážeme, že štvoruholník $HCEF$ je rovnoramenný lichobežník (vyplýva to zo súmernosti osemuholníka podľa osi strany EF) a $HF \parallel XE$ (súmernosť podľa úsečky CG). Z vlastností rovnoramenného lichobežníka potom priamo vyplýva, že trojuholník XCE je rovnoramenný.

Väčšina z vás si vybrala celkom iný prístup k riešeniu, a to numericky ukázať, že v daných trojuholníkoch sú dva uhly rovnako veľké. Ukážme teda aj jednu z možností, ako úlohu riešiť týmto spôsobom:



V trojuholníku AXH nemusíme dokonca ani počítať presnú veľkosť uhlov. Označme $|\sphericalangle HAX| = \alpha$. Keďže hlavná uhopriečka AE nášho osemuholníka je zároveň osou jeho súmernosti, je aj uhol XAB rovnako veľký a má veľkosť α. To, že aj uhol AXH je rovnako veľký, vyplýva z toho, že je striedavý s uhlom XAB ($AB \parallel HC$. Ukázali sme teda, že $|\sphericalangle HAX| = |\sphericalangle HXA|$, a teda trojuholník AXH je rovnoramenný. Čo sa týka trojuholník XCE, tu si už pomôžeme konkrétnymi číslami. Začnime výpočtom veľkosti uhla EXC. Keďže je vrcholový s uhlom AXH, majú rovnakú veľkosť. Z osovej súmernosti nášho osemuholníka podľa AE vyplýva, že táto veľkosť je polovicou veľkosti vnútorného uhla pravidelného osemuholníka. Na výpočet veľkosti vnútorného uhla pravidelného n-uholníka existuje vzorec, ktorý niektorí z vás použili, no skúsime ju vypočítať sami.



Označme stred osemuholníka S. Hlavné uhlopriečky rozdeľujú plný uhol okolo bodu S na 8 rovnakých častí, ktorých veľkosť je $360°/8 = 45°$. Pozrime sa teraz napr. na trojuholník HAS. Keďže je rovnoramenný so základňou HA, $|\sphericalangle SHA| = |\sphericalangle HAS|$ sú rovnaké a ich súčet je rovný rozdielu súčtu vnútorných uhlov v trojuholníku a veľkosti uhla oproti základni, t.j. $180° - 45° = 135°$. Platí teda $|\sphericalangle SHA| = |\sphericalangle HAS| = 135°/2 = 67,5°$ a veľkosť vnútorného uhla osemuholníka je $135°$, lebo uhly HAS a SAB sú rovnako veľké.

Vieme teda, že $|\sphericalangle EXC| = |\sphericalangle AXH| = |\sphericalangle HAS| = 67,5°$. Teraz už len musíme vypočítať veľkosť uhla XEC alebo XCE. Všimnime si, že platí $|\sphericalangle XEC| = |\sphericalangle XED| - |\sphericalangle CED|$. Uhol XED je, rovnako ako uhly SAB, SAH, SBA a ostatné podobné, polovicou vnútorného uhla osemuholníka, teda $|\sphericalangle XED| = 135°/2 = 67,5°$. Napokon, keďže trojuholník CED je rovnoramenný so základňou EC (ramená sú strany pravidelného osemuholníka), platí:

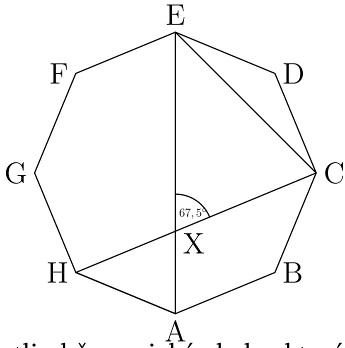
$$|\sphericalangle CED| = (180° - |\sphericalangle CDE|)/2 = (180° - 135°)/2 = 22,5°$$

Teraz už ľahko dopočítame veľkosť uhla *XEC*:

$$|\sphericalangle XEC| = 135^\circ - 67,5^\circ - 22,5^\circ = 45^\circ.$$

Keďže poznáme veľkosti dvoch uhlov v trojuholníku *XCE* ($67,5^\circ$ a 45°), vieme dopočítať veľkosť uhla *XCE*:

$$|\sphericalangle XCE| = 180^\circ - 67,5^\circ - 45^\circ = 67,5^\circ.$$



Vidíme, že $|\sphericalangle EXC| = |\sphericalangle XCE|$, a teda trojuholník *XCE* je rovnoramenný, čo bolo treba dokázať. Ukázali sme jednu možnosť ako vypočítať veľkosti uhlov v trojuholníkoch, o ktorých sme mali ukázať, že sú rovnoramenné. Možostí ako to spraviť je však mnoho, čo bolo vidno aj na vašich riešeniach.
Poďme ešte k úlohe c). V riešení tejto časti sa vyskytli občas nejaké chyby, ktoré často pramenili zrejme z nedostatočného prečítania zadania. Píše sa v ňom, že hľadané rovnoramenné trojuholníky majú mať vrcholy vo vrcholoch osemuholníka *A* až *H*. Teda body *X* alebo *S* nebolo povolené použiť. A ďalej sa v zadaní písalo, že nájdené trojuholníky nemajú byť navzájom zhodné a ani zhodné s trojuholníkmi *AXH* alebo *XCE*. Na to si bolo treba dať pozor. Skúsme teda nájsť tri také. Aby sme sa vyhli nájdeniu zhodných trojuholníkov, použime vrchol oproti základni stále ten istý. Nech je to napríklad vrchol *A*. Z osovej súmernosti pravidelného osemuholníka podľa *AE* vyplýva, že *AE* je osou úsečiek *HB*, *GC* a *FD*. Môžeme teda tieto zobrať za základne hľadaných rovnoramenných trojuholníkov. Našli sme teda 3 nezhodné rovnoramenné trojuholníky s vrcholmi v niektorých z bodov *A* až *H*, ktoré nie sú zhodné ani s trojuholníkmi *AXH* a *XCE*, čím sme úlohu splnili.

4

opravovali **Aďka Görcsösová** a **Robko Hajduk**
najkrajšie riešenia: všetci 9-bodoví

25 riešení

Všimnime si, že to, čo vieme o počte jednotiek a dvojok, nám môže pomôcť s celkovým počtom známok. Počet známok musí byť celé číslo, Martin predsa nemôže mať jeden a pol trojky :). To znamená, že aj počet jednotiek a dvojok musí byť celé číslo. Jednotiek je $\frac{1}{3}$ a dvojok $\frac{1}{5}$ z celkového počtu. Aby obe tieto čísla boli celé, tak x (počet všetkých známok) musí byť spoločným násobkom čísel 3 a 5. Ich najmenší spoločný násobok je 15. Tak to teda vyskúšame pre $x = 15$:
Jednotiek bude $\frac{1}{3} \cdot 15 = 5$
Dvojok bude $\frac{1}{5} \cdot 15 = 3$
Trojok je 8, a teda štvoriek by malo byť $15 - (5 + 3 + 8)$. To je ale $15 - 16 = -1$, a to je záporné číslo. Martin nemôže mať záporný počet známok, preto táto možnosť nie je správna.
Ideme ďalej. Nasledujúcim spoločným násobkom 5 a 3 je 30. Vyskúšame to isté pre $x = 30$.

Jednotiek bude $\frac{1}{3} \cdot 30 = 10$
Dvojok bude $\frac{1}{5} \cdot 30 = 6$
Trojok je 8, a teda štvoriek by malo byť $30 - (10 + 6 + 8)$, čo je $30 - 24 = 6$
Vyskúšame teraz, či sedí aj aritmetický priemer.
$\frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 6}{30} = \frac{10+12+24+24}{30} = \frac{70}{30} = \frac{7}{3}$
Teraz nám ešte ostáva vyriešiť, čo pre tie ostatné násobky 15.

Najprv je dôležité uvedomiť si, že aritmetický priemer známok závisí len od toho, akú časť všetkých známok tvoria jednotlivé známky. Tým sme chceli povedať, že nezáleží na počte známok, ale na percentuálnom zastúpení danej známky v celku. Teda na ukážku príklad: Ak zo všetkých známok bude 1/3 jednotiek, 1/2 dvojok a 1/6 štvoriek, tak aritmetický priemer známok bude 2, nech je tých známok ľubovoľný počet (vyskúšajte si to!).

Teraz sa vrátime späť k nášmu problému. Uvedomme si, že jednotky budú stále predstavovať tretinu všetkých Martinových známok, dvojky pätinu. Trojky a štvorky spolu budú teda predstavovať $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$ všetkých známok. Trojok ale máme 8. To predstavuje pri každom počte známok inú časť, bude sa preto meniť aj pomer štvoriek a celkového počtu známok. Zmení sa nám teda percentuálne zastúpenie jednotlivých známok v celku, a tým sa zmení aj aritmetický priemer. Pritom čím viac bude známok, tým menšiu časť budú predstavovať trojky a tým väčšiu časť budú predstavovať štvorky, teda priemer sa bude stále zvyšovať. To znamená, že ak budeme celkový počet známok ľubovoľne zvyšovať, už nikdy nedosiahneme opäť ten istý priemer. Naše riešenie je teda jediné.

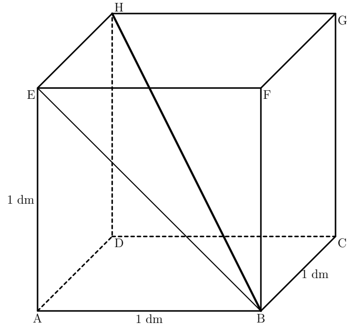
5 opravoval **Monča Vaľková** a **Marek Derňár**

najkrajšie riešenie: Ema Dučáková, Martin Vodička

24 riešení

Máme kocku s vrcholmi zafarbenými troma rôznymi farbami. Našou úlohou je zistiť, či sa dá nájsť vždy dvojica vrcholov zafarbených rovnakou farbou a zároveň od seba vzdialených viac ako 14 cm. Skúsme teraz nájsť také zafarbenie kocky, ktoré by tomu odporovalo, teda také zafarbenie kocky, pri ktorom použijeme tri farby a žiadne dva vrcholy rovnakej farby nebudú od seba vzdialené viac ako 14 cm.

Nakreslime kocku a označme jej vrcholy ako na obrázku. Na ilustráciu môžeme vybrať bod B a zistiť, ktoré body sú od neho vzdialené viac ako 14 cm. Body C, A, F sú vzdialené len na dĺžku hrany, čo je 10 cm, a teda by mohli byť zafarbené tou istou farbou ako bod B. Teraz je otázkou, ako sú od neho vzdialené body E, G, D - všetko sú to body vzdialené od bodu B na veľkosť stenovej uhlopriečky. Aby sme zistili jej veľkosť, použijeme Pytagorovu vetu v trojuholníku ABE:



$$\begin{aligned} |AB|^2 + |AE|^2 &= |BE|^2 \\ |BE| &= \sqrt{|AB|^2 + |AE|^2} \\ |BE| &= \sqrt{100 + 100} \\ |BE| &\doteq 14,1421 \text{ cm} \end{aligned}$$

čo je viac ako 14 centimetrov, preto body E, G, D nemôžu byť zafarbené tou istou farbou ako bod B. Navyše sme tým zistili, že dva body rovnakej farby nemôžu ležať na stenovej uhlopriečke kocky. Asi už máme predstavu, že telesová uhlopriečka bude ešte dlhšia, ale overme to. V trojuholníku BEH podľa Pytagorovej vety platí:

$$\begin{aligned} |EH|^2 + |BE|^2 &= |BH|^2 \\ |BH| &= \sqrt{|EH|^2 + |BE|^2} \\ |BH| &= \sqrt{100 + 200} \\ |BH| &\doteq 17,3205 \text{ cm} \end{aligned}$$

Bod B je teda od bodu H vzdialený viac ako 14 cm. To znamená, že nemôže byť zafarbený tou istou farbou a žiadne dva vrcholy ležiace na telesovej uhlopriečke nemôžu mať rovnakú farbu. Pozrime sa ešte raz na to, ktoré body môžu byť zafarbené tou istou farbou ako bod B. Zatiaľ sme povedali, že to môžu byť body A, C, F. V skutočnosti ale tieto body tvoria stenové uhlopriečky AC, FC, FA, a teda nemôžu byť všetky rovnakej farby. Ľubovoľné dva z nich vytvárajú stenovú uhlopriečku, preto žiadne dva z nich nemôžu byť zafarbené rovnakou farbou. Môžeme teda mať na kocke len jediný bod zafarbený rovnako ako B. Ak to platí pre bod B, tak je jasné, že by to platilo pre ľubovoľný iný bod, ktorý by sme vybrali. Podobne, ak to platí pre jednu farbu, tak to platí pre všetky tri. Preto môžeme povedať, že na kocke môžu byť maximálne 2 žlté, 2 hnedé a 2 oranžové vrcholy. To znamená, že môžeme ofarbiť maximálne 6 vrcholov kocky bez toho, aby naša kocka mala dva vrcholy rovnakej farby vo vzdialenosti väčšej ako 14 cm. Dva vrcholy ale ešte zostali neofarbené. Keď ich však ofarbíme hocijako, ako sme ukázali, už tam budú dva vrcholy tvoriace stenovú alebo telesovú uhlopriečku, a to nechceme. Nech sa teda snažíme akokoľvek, kocku, na ktorej by boli vrcholy rovnakej farby od seba vzdialené vždy menej ako 14 cm, vytvoriť nevieme. Teda naozaj na tejto kocke vieme vždy vybrať dva vrcholy rovnakej farby vzdialené viac ako 14 cm bez ohľadu na to, ako sú tieto vrcholy zafarbené.

6

opravovala **Janka Baranová** a **Matúš Stehlík**

najkrajšie riešenia: František Lami, Anton Gromóczki

26 riešení

Túto úlohu môžeme riešiť tak, že vypíšeme dvojice zložených čísel, popr. prvočísel, ktorých súčet je 100. Potom z nich budeme vytvárať prvočísla resp. zložené čísla. Väčšina z vás si všimla, že takých prvočísel bude určite menej a teda bude jednoduchšie riešiť túto úlohu druhou možnosťou.

Na začiatok vypíšeme dvojciferné prvočísla do 50 (prvočíslo 11 vynecháme, lebo zadanie hovorí o 4 rôznych cifrách), pretože ak chceme mať súčet 2 prvočísel 100, tak vieme, že jedno bude väčšie a druhé menšie ako 50 (50 to byť nemôže, keďže to nie je prvočíslo).

Takže jeden zo spôsobov, ako získať dvojicu so súčtom 100, je odčítavať vypísané prvočísla od 100 (dá sa to aj opačne - odčítaním tých väčších by sme dostali tie menšie). Zrejme nie všetky vzniknuté rozdiely sú prvočíslami, teda treba spomedzi nich vyškrtnúť zložené čísla. Týmto krokom dostaneme všetky dvojice dvojciferných prvočísel, v ktorých sa neopakujú cifry, so súčtom 100. Konkrétne sú to 17 + 83, 29 + 71, 41 + 59, 47 + 53.

Teraz musíme zistiť, ako zo štvoríc cifier (1, 3, 7, 8), (1, 2, 7, 9), (1, 4, 5, 9), (3, 4, 5, 7) dostaneme dvojciferné zložené čísla so súčtom 100. Jednou z možností je vypísať všetky možnosti, no je potrebné mať v tom systém, aby sme na nič nezabudli. Ďalšou možnosťou je všimnúť si, kedy súčtom dvoch čísel dostaneme 100. Vieme, že 100 má na konci 0, z toho vzplýva, že súčet cifier oboch sčítancov na mieste jednotiek musí byť 10 (tento súčet musí mať na konci 0 - do úvahy teda prichádzajú čísla 0, 10, 20 . . .; 0 to byť nemôže, lebo tá môže vzniknúť len súčtom dvoch núl a my cifry nemôžeme opakovať; najväčší možný súčet dvoch cifier je 18, teda hľadaný súčet nemôže byť ani väčší ako 18. To znamená, že jedinou možnosťou je 10). A keď máme súčet jednotiek 10, tak súčet desiatok musí byť 90 (ciferný súčet 9). Teda vieme, že súčet 100 sa zachová práve vtedy, keď sa nezmení jednotková a desiatková pozícia cifier (ak majú naše prvočísla na mieste jednotiek 1 a 9, tak novovytvorené čísla budú mať na tomto mieste tiež 1 a 9; podobne je to aj s desiatkovou pozíciou). Teda vieme, že z dvojíc prvočísel, ktoré sme dostali na začiatku, môžme dostať iné dvojice čísel zložené z rovnakých cifier a súčtom 100 jedine tak, že vymeníme ich cifry na mieste jednotiek (resp. desiatok). Dostávame dvojice 13 + 87, 21 + 79, 49 + 51, 43 + 57. Teraz nám stačí vyškrtnúť tie, ktoré obsahujú aspoň 1 prvočíslo. Ľahko zistíme, že nám vyhovujú len čísla 49 + 51 (zložené čísla), resp. 59 + 41 (prvočísla), a teda cifry 1,4,5,9.

Komentár. Je fajn, že k správnemu výsledku došli všetci riešitelia. No ako sa to odrazilo aj na počte bodov, je jasné, že v niektorých riešeniach sa vyskytli aj nejaké tie chyby. Najčastejšie to bol stručne opísaný postup, niekedy dokonca žiadny postup :(. Je to škoda, pretože k správnemu výsledku sa dopracoval každý riešitel, takže veľkú časť bodového hodnotenia sme venovali hlavne postupu. Preto je fajn vždy si pri písaní riešenia položiť otázku, ako som došiel k výsledku, alebo konkrétne pri tejto úlohe, ako viem, že ten súčet musí byť vždy rovnaký? . . . Taktiež sme radi, že niektorí riešitelia sa pustili do skúšania možností a naozaj pekne popísali, ako ich skúšali a došli tak k výsledku.

Zadania 2. série úloh

Úlohy pošlite najneskôr **27. apríla 2009**

Zobudil som sa na dajaký hluk. Keď som rozlepil viečka, zistil som, že spolubývajúci sú už hore a je neskoro ráno. Všetkým nám prišlo čudné, že je už tak veľa hodín a Marek nás ešte neprišiel zobudiť svojím krásnym spevom ako zvyčajne. Tak sme išli zaklopať na vedúcovskú izbu, čo sa deje. Nič. Bolo tam nezvyčajné ticho, ako nikdy predtým, tak sme otvorili. Nikto. Tak sme sa trošku porozhliadli a našli sme tam nejaký čudesný počítací stroj. Vedľa neho ležal návod:
Úloha 1. *Tento stroj pracuje takto: Je možné do neho vložiť ľubovoľné dvojice prirodzených čísel x,y. Po vložení čísel si stroj v duchu vypočíta 3 hodnoty: číslo* x^2+y^2*, číslo* $297-x^2$ *a číslo* $402-y^2$ *a vypľuvne najmenšie z nich - to znamená napíše ho na obrazovku. Vašou úlohou je zistiť, aké najväčšie číslo sa na obrazovke tohto stroja vôbec môže objaviť a pri akej dvojici čísel x,y toto číslo vypľuvne.*

Túto úlohu sme síce vyriešili, ale nijak nás to neposunulo ďalej. V tom sa nejaké nevýrazné dievča, čo som si všimol až teraz, ozvalo: „Určite tu musí byť ešte niečo, nenechali by nás tu predsa len tak“. Tak sme ten stroj pootáčali a zo spodu sme našli nejaký prilepený papierik. A čo bolo na ňom? No predsa šifra. Informatickí maniaci hneď doniesli notebooky a začali na nich lúštiť. Po chvíli, ktorá sa mi zdala ako večnosť, jeden skríkol: „ Mám to!“. A ide sa na kopec! Po dobrej polhodine šliapania sme narazili na vedúceho. Hneď ako sme k nemu došli, tak nám plný elánu povedal, že ďalej sa nedostaneme, kým mu nevyriešime takúto úlohu:
Úloha 2. *Obvod trojuholníka je 20 cm. Aké dlhé môže mať strany, ak sú to v centimetroch celé čísla a súčet dĺžok dvoch strán je o 6 cm väčší ako tretia strana. Nájdite všetky možnosti.*

No, je pravda, že som si pôvodne myslel, že to bude otrava, ale nakoniec to dopadlo celkom dobre, veď som to vyriešil ja ;-). Vyzerá to tak, že sa tu začína dačo diať, lebo sme sa rozdelili na sedemčlenné družinky. A pre zmenu, aby nebola nuda, zase šliapeme do kopca. Našťastie sme tento krát nešli ani veľmi dlho a narazili sme na vedúcu Janku, ktorá už mala v ruke pripravené kocky.
Úloha 3. *Janka dala každému účastníkovi (v družinke ich bolo 7) rovnaký počet cukríkov. Potom hádzali kockou a každý musel Janke vrátiť toľko cukríkov, koľko hodil na kocke. Prví šiesti hodili každý iné číslo. Koľko padlo siedmemu, ak na konci zostalo celej družinke dokopy 53 cukríkov?*

To som fakt nechápal, načo toto bolo dobré, ale aspoň sme mali cukríky. Hneď potom nám Janka zaviazala oči a zakázala hovoriť. Potom nás viedla húštinou a kriakmi, boli sme úplne doškriabaný. Keď sme išli cez úzky mostík, jeden chalan nám spadol do potoka, ale bral to športovo. Išli sme asi celú večnosť, keď sme zrazu zastali. Pocítil som, že ma Janka odviedla ďalej a namaľovala mi niečo na čelo. Keď mi dala dole šatku, uvidel som oproti sebe dvoch chalanov z našej družinky a vtedy Janka povedala:

Úloha 4. *„Každému z vás som namaľovala na čelo červenú alebo modrú bodku. Každý sa pozrie na druhých dvoch, a keď uvidí aspoň jednu červenú bodku, zdvihne ruku. Kto prvý uhádne, akú bodku má na čele, vyhrá.“ Keď nám dovysvetľovala úlohu, všetci sme zdvihli ruku. Všetci sme boli chytrí,ale kedže som bol najchytrejší, tak som po chvíli úmorného premýšľania povedal: „Mám na čele červenú bodku.“ Viete aj vy, ako som na to prišiel?*

Potom nás Janka poslala niekam štýlom, že rovno a v piatok doľava... Keď sme prešli už sedem hôr a sedem potokov, uvideli sme niekde v totálnej paži červenú vlajku. Asi to bola nejaká značka, tak sme sa za ňou rozbehli. Keď sme k nej dobehli, zistili sme, že označuje hrad.

Úloha 5. *Keď sme sa štastne dostali až do hradu, začali sme sa obzerať ako vlastne vyzerá. Mal pôdorys tvaru trojuholníka so stranami 40, 50 a 60 metrov. V rohoch boli 3 bašty. Mali pôdorys v tvare častí kruhov s polomerom 5 metrov, ich stredy boli vo vrcholoch trojuholníka. Záhradníci sa rozhodli privyrábať si tým, že v nich budú pestovať šampiňóny. Nevedeli si však vyrátať, aká veľká bude ich úroda, ak sa im urodí 9,465 kg na meter štvorcový. Tak sme im s tým pomohli. Akú veľkú úrodu budú mať?*

Keď sme sa po hrade trochu porozhliadli, našli sme tam vedúcich, ktorí nám povedali, že na pokračovanie musíme počkať na ostatné družinky. Našťastie sme nemuseli dlho čakať, kým prišli všetci. Potom nám vedúci oznámili, že si dáme final battle, v ktorom budeme musieť dostať všetkých vedúcich na desať sekúnd do trojuholníka, ktorý už skôr vyznačili. Trvalo nám to veľmi dlho, lebo tam bol veľmi rýchly Rasťo, ktorého sme nevedeli dobehnúť a chytiť, ale nakoniec sme ich tam vypätím všetkých síl dostali. Po skončení final battlu som začal rozmýšľať nad tým trojuholníkom.

Úloha 6. *Pamätáte sa ešte na osemuholník na obruse? Po rovnoramenných trojuholníkoch ma začali zaujímať také trojuholníky, ktoré sú jedinečné. Koľko jedinečných trojuholníkov existuje v pravidelnom osemuholníku? (trojuholník je jedinečný, ak nemá rovnako dlhé strany ako iný trojuholník. Trojuholník so stranami 3,5,4 je rovnaký ako trojuholník so stranami 3,4,5 ale iný ako trojuholník so stranami 3,4,6).*

Keď sme sa z hradu vrátili naspäť na ubytovňu, každá družinka si mala pripraviť nejakú zábavnú scénku. Pri tom sme sa dosť nasmiali, keď sme tancovali balet. Už nikdy viac. Posledná noc bola úžasná, asi moja najlepšia. Začalo to jedením ooooobrovskej torty, potom sme gitarovali v spoločenskej a skončilo sa to romantickou prechádzkou s Dankou. Až doma som si uvedomil, že sa mi matika fakt zapáčila a že mi to celé sústredenie bude strašne chýbať. Všetka tá sranda a gitarovanie, súťaženie a krvbal a kopa skvelých kamošov. A aj pre to všetko sa už teším na budúce.

Poradie po 1.sérii

PS je súčet bodov za predchádzajúce série, **1–6** sú body za jednotlivé úlohy a **CS** je celkový súčet bodov.

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	PCS
1. – 2.	Vladislav Vancák	Tercia B	GAlejKE	0	6	9	9	9	9	9	54
	Martin Vodička	Kvarta	GAlejKE	0	9	9	9	9	9	9	54
3.	Anton Gromóczki	7.A	ZStanKE	0	8	9	7	9	9	9	53
4. – 8.	Denisa Semanišinová	Kvarta	GAlejKE	0	8	8	9	9	9	9	52
	František Lami	9.C	ZNov2KE	0	7	9	9	9	9	9	52
	Miroslav Stankovič	8. A	ZKro4KE	0	7	8	9	9	9	9	52
	Viktória Valachová	8. A	ZMarkSN	0	9	-	8	9	9	9	52
	Katarína Krajčiová	Sekunda	GAlejKE	0	8	8	7	9	9	9	52
9. – 10.	Ema Dučáková	7. A	ZKomePP	0	8	1	9	9	9	7	51
	Martin Vrabec	7. A	ZKro4KE	0	6	1	9	9	9	9	51
11.	Patrik Turzák	8. A	ZKro4KE	0	8	7	8	9	9	8	50
12.	Ján Jursa	8. A	ZKro4KE	0	8	7	-	9	9	9	49
13.	Magdaléna Krejčíová	Tercia A	GTataPP	0	8	9	4	8	5	9	48
14.	Filip Stripaj	8. A	ZKro4KE	0	6	9	9	9	-	8	47
15.	Jaroslav Petrucha	Kvarta	GMetoBA	0	8	9	-	9	9	9	44
16.	Roman Pivovarník	Tercia A	GMudrPO	0	4	9	-	8	4	8	42
17. – 18.	Lenka Mareková	8. A	ZKro4KE	0	5	6	-	9	8	8	41
	Dorota Jarošová	Sekunda	GAlejKE	0	5	7	3	8	6	7	41
19.	Juraj Polačko	7. A	ZDrabKE	0	5	7	-	9	-	7	37
20.	Matúš Čirip	Tercia A	GMudrPO	0	4	-	5	8	3	7	35
21. – 22.	Mojmír Stehlík	Kvarta B	GTr12KE	0	5	9	-	8	7	2	31
	Viktória Maciková	7. A	ZKro4KE	0	2	-	7	-	8	6	31
23.	Maroš Varga	7. A	ZKuzmic	0	1	-	2	9	1	3	25
24.	Július Urmacher	7. A	ZKuzmic	0	1	-	2	9	1	2	24
25.	Adriána Lukáčová	7. A	ZKuzmic	0	1	1	-	9	-	2	22
26.	Michal Balint	7. A	ZKuzmic	0	1	-	-	9	1	1	21
27.	Daniel Ondra	8. A	ZKro4KE	0	-	1	6	-	4	-	11
28.	Jana Cerulová	7. A	ZKro4KE	0	4	-	-	-	-	1	9
29.	Peter Micek	8.A	ZKro4KE	0	-	-	7	-	-	-	7
30.	Lukáš Gdovin	7. A	ZStanKE	0	-	-	-	-	-	-	0

Za podporu a spoluprácu ďakujeme:

Korešpondenčný matematický seminár **MATIK**
Číslo 5 • Letná časť 22. ročníka (2008/09) • Vychádza 2. apríla 2009
Internet: `http://matik.strom.sk` • E-mail: `matik@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://www.strom.sk` • E-mail: `zdruzenie@strom.sk`