KOREŠPONDENČNÝ MATEMATICKÝ SEMINÁR

MATIK

ČÍSLO **3** — ROČNÍK **29** — INTERNET http://matik.strom.sk

Hola hej!

December je už tu, Vianoce sa blížia, no sneh stále nikde. Netreba však smútiť, je tu váš milovaný *MATIK*! V tomto čísle sa dozviete veľa vecí, ktoré vás určite zaujímajú. Nájdete tu vzorové riešenia, komentáre k úlohám, najlepších riešiteľov a v neposlednom rade aj samotné poradie. Tých nemálo šťastných z vás čaká aj pozvánka na sústredenie, kde sa určite majú na čo tešiť. Myslím, že všetko potrebné už viete, a tak mi neostáva nič iné, len sa s vami rozlúčiť a tešíme sa na vás zase pri ďalšej sérii!

Vaši vedúci *MATIK*a

Ako bolo

Lomihlav 27.11.2015 sa uskutočnil 15. ročník tímovej matematickej súťaže Lomihlav. Súťaže sa zúčastnilo 60 tímov, ktorých členmi boli poväčšine žiaci z východného Slovenska, avšak zarátať si prišli aj žiaci z Liptovského Mikuláša. Po 66 minútach rozmýšľania prišiel čas aj na zábavu. Počas čakania na výsledky sa všetci mohli zapojiť do hry a získať cukríky.
Prvé dve miesta obsadila ZŠ Krosnianska 4 z Košíc, na treťom mieste sa umiestnilo Gymnázium J. A. Raymana z Prešova. Najlepšie tímy si odniesli okrem sladkej odmeny aj vecné ceny. Kompletné výsledky a zadania môžete nájsť na našej stránke. Ďakujeme za účasť a tešíme sa na vás opäť o rok.

Ako bude

Maxiklub Začína ti byť už akosi zima a nevieš, čo s tým? Príď sa pred ňou schovať na vianočný Maxiklub, ktorý sa bude konať 22.12.2015 od 14:00, na Jesennej 5 v Košiciach! V miestnosti, ktorú ti prezradia na vrátnici (alebo my na našom webe či facebooku) nájdeš kopu kamarátov, či vedúcich a starých známych, budeš mať možnosť konečne zahnať to škvŕkanie v bruchu a ochutnať stromácke dobroty (do ktorých, veríme, sám prispeješ ;)) a možno aj tú kapustnicu. Nezabudni so sebou zobrať pozitívnu náladu a kopu nových historiek (a ako som už spomínal, tak aj príspevok do spoločných dobrôt). :-)

Vzorové riešenia 2. série úloh

1

opravovali **Samo Chaba** a **Kristín Mišlanová**
najkrajšie riešenia: Matej Hanus, Róbert Sabovčík

54 riešení

Zadanie Potrebujem napojiť 6 rôznych korytnačiek. Jednotlivé korytnačky sú rôznej veľkosti, a preto potrebujú tieto dávky vody: 1 dl, 2 dl, 3 dl, 4 dl, 5 dl, 6 dl. Mám doma 21 dl vody vo veľkej nádobe a dve odmerky, jednu na 5 dl, druhú na 12 dl. Ako pomocou odmeriek môžem rozdeliť korytnačkám potrebné množstvo vody?

Vzorové riešenie

Keďže na správne vyriešenie úlohy nám stačí nájsť len jedno správne riešenie (postup prelievania), pre prehľadnosť si to vieme nahodiť do jednej tabuľky, kde popisujeme zmeny stavu vody v jednotlivých nádobách.
Kvôli tomu, že na dosiahnutie rôzneho objemu vody potrebujeme rôzny obsah vody k dispozícii, začneme menšími objemami, pretože na ne potrebujeme k dispozícii väčší začiatočný obnos vody.

21dl	12dl	5dl	Úkon	21dl	12dl	5dl	Úkon
21	0	0	21 → 12	6	10	0	21 → 5
9	12	0	12 → 5	1	10	5	21 → **k1**(**1dl**)
9	7	5	5 → 21	0	10	5	5 → 12
14	7	0	12 → 5	0	12	3	5 → 21
14	2	5	12 → **k2**(**2dl**)	3	12	0	12 → 5
14	0	5	5 → 12	3	7	5	5 → 21
14	5	0	21 → 5	8	7	0	12 → 5
9	5	5	5 → 12	8	2	5	12 → **k4**(**2dl**)
9	10	0	21 → 5	8	0	5	5 → 21
4	10	5	5 → 12	13	0	0	21 → 12
4	12	3	5 → **k3**(**3dl**)	1	12	0	21 → **k6**(**1dl**)
4	12	0	12 → 21	0	12	0	12 → 5
16	0	0	21 → 5	0	7	5	5 → **k6**(**5dl**)
11	0	5	5 → 12	0	7	0	12 → 5
11	5	0	21 → 5	0	2	5	12 → **k4**(**2dl**)
6	5	5	5 → 12	0	0	5	5 → **k5**(**5dl**)

Komentár Táto úloha bola pomerne jednoduchá a priamočiara, ak ste si uvedomili zopár faktov, ktoré v podobných úlohách vždy platia. Napríklad, že korytnačky sa dajú plniť postupne, no vodu, čo im dáte, už viac k dispozícii nemáte. Alebo že na nádobách, ktoré máme k dispozícii, nie je žiadna stupnica naznačená, a teda nedokážeme preliať presne 1/4 či 1/2 z niektorej nádoby do inej. Vždy prelievame len plný obsah. Ďalšia z chýb, čo niektorí z vás spravili, bolo to, že skúšali použiť rôzne veci, čo zo zadania nemali k dispozícii, ako napríklad fixku na označenie si hladiny vody a podobne. Na plný počet bodov nám stačila jedna prehľadná tabuľka, v ktorej je znázornený jeden zo spôsobov, ako ste vodu prelievali.

2 opravovali **Martin Šalagovič** a **Matúš Hlaváčik**

najkrajšie riešenia: Ajša Faguľová, Matúš Masrna, Miroslav Macko — 63 riešení

Zadanie Päť korytnačiek (1, 2, 3, 4 a 5) čaká na svoj ortieľ. Budú sa totiž variť v práve dvoch várkach. Rozhodnutie bolo nasledovné:
A) aspoň jedna z korytnačiek 1 a 3 sa bude variť v druhej várke,
B) korytnačky 2 a 5 sa budú variť v rôznych várkach,
C) korytnačky 2 a 3 sa budú variť v tej istej várke,
D) práve jedna z korytnačiek 3 a 4 sa bude variť v prvej várke,
E) najviac jedna z korytnačiek 1 a 5 sa bude variť v prvej várke.
Ako môžeme rozdeliť korytnačky do dvoch várok? Nájdite všetky možnosti.

Vzorové riešenie

Najprv sa pozrime na tvrdenie D. V ňom píše, že práve jedna z korytnačiek 3 a 4 sa bude variť v prvej várke. Keďže várky sú dve a iba jedna z týchto dvoch korytnačiek sa bude variť v prvej várke, tak druhá sa musí variť v druhej várke. Takže vieme, že korytnačky 3 a 4 budú v rozdielnych várkach.
Ďalej, podľa tvrdenia B, vieme, že korytnačky 2 a 5 budú v rozdielnych várkach.
Teraz máme dvojice 2 a 5, 3 a 4, ktoré sa musia variť stále v rozdielnych várkach.
Ďalej, podľa tvrdenia C, vieme, že 2 a 3 sa budú variť spolu. Z tých dvojíc nám ostali korytnačky 4 a 5 a podľa toho, čo už vieme, je zrejmé, že budú musieť byť spolu v inej várke ako 2 a 3. Takže z doterajších poznatkov máme istú várku a, ktorá obsahuje korytnačky 2 a 3, a várku b, ktorá obsahuje korytnačky 4 a 5.
Teraz si ich rozdelíme na všetky možnosti, ako by mohli byť umiestnené:
1. možnosť
várka a = 1. várka (2 a 3)
várka b = 2. várka (4 a 5)
2. možnosť
várka a = 2. várka (2 a 3)
várka b = 1. várka (4 a 5)
Chýba nám však v hrncoch ešte korytnačka 1. Poďme sa pozrieť na to, kde by sme ju mohli dať.
Do 1. možnosti do 1. várky: Tam ju dať nemôžeme, pretože by sme nespĺňali podmienku A.
Do 1. možnosti do 2. várky: Keď ju tam dáme, tak spĺňame všetky podmienky, čiže máme prvú možnosť: *1. várka: 2 a 3, 2. várka: 4, 5, 1*.
Do 2. možnosti do 1. várky: Tam nemôže byť, lebo by nebola splnená podmienka E.
Do 2. možnosti do 2. várky: Keď ju tam dáme, tak spĺňame všetky podmienky, čiže máme druhú možnosť: *1. várka: 4 a 5, 2. várka: 2, 3, 1*.

Komentár Mnohí z vás to vyriešili dobre, ale poniektorým prišla táto úloha veľmi jednoduchá a rozhodli sa, že nás nebudú zaťažovať vysvetľovaním, ktoré by nám ozrejmilo, prečo dospeli k nejakým záverom. Ďalší zase na konci podotkli, že si nemyslia, že ich riešenie je 100 % správne, a tak sme im zaňho ani nemohli udeliť plný počet bodov (veď aj prečo by sme riešeniu verili, ak mu neverí ani sám autor). Takže do budúcnosti sa týmto veciam vyvarujte a prajeme Šťastné a Veselé (riešenie krásnych matematických príkladov :-P).

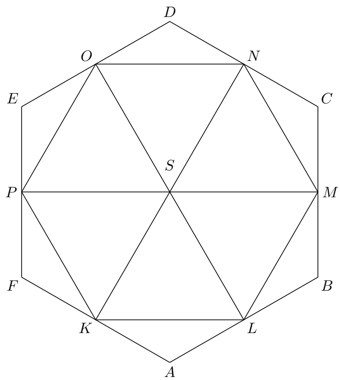
3 opravovali **Viki Brezinová** a **Rišo Trembecký**

najkrajšie riešenie: Branislav Pastula, Lenka Hake

49 riešení

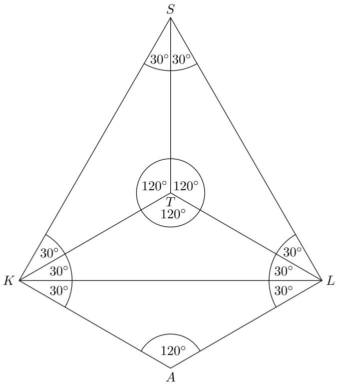
Zadanie Jeden hrniec mal tvar pravidelného šesťuholníka (nazvime ho *ABCDEF*) a druhý hrniec má rovnako šesťuholníkový pôdorys, no bol asi taký veľký, akoby sme stredy strán šesťuholníka *ABCDEF* označili postupne K, L, M, N, O, P a pospájali ich v tomto poradí. Aký je pomer obsahov šesťuholníkov *ABCDEF* a *KLMNOP*?

Vzorové riešenie



Keďže šesťuholník *KLMNOP* vznikol spojením stredov strán pravidelného šesťuholníka *ABCDEF*, tak vzdialenosti medzi susednými bodmi sú stále rovnaké, teda aj *KLMNOP* je pravidelný šesťuholník.
Súčet vnútorných uhlov v šesťuholníku je $4 \cdot 180° = 720°$, keďže každý šesťuholník sa dá rozdeliť na 4 trojuholníky a súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°. Pravidelný šesťuholník má všetky vnútorné uhly rovnaké, takže veľkosť jedného je $720°/6 = 120°$.
Vrcholy šesťuholníka *KLMNOP* pospájame so stredom jemu opísanej kružnice polomermi. Tým rozdelíme šesťuholník na 6 trojuholníkov.
Tieto trojuholníky sú zhodné podľa vety sss, lebo dve ich strany sú polomermi tej istej kružnice a tretia strana je strana pravidelného šesťuholníka. Preto musia mať zhodné aj veľkosti uhlov. Plný uhol v strede je rozdelený na 6 rovnakých uhlov. Jeden taký uhol má potom veľkosť $360°/6 = 60°$.
Zároveň vieme, že tieto trojuholníky sú rovnoramenné, lebo ich dve strany sú polomerom tej istej kružnice. Zvyšné dva uhly potom musia mať rovnakú veľkosť, a to $(180° - 60°)/2 = 60°$. Keďže všetky uhly v trojuholníkoch majú rovnakú veľkosť, tieto trojuholníky sú rovnostranné.
KLMNOP sa skladá zo 6 väčších zhodných trojuholníkov. *ABCDEF* sa skladá zo 6 väčších zhodných trojuholníkov (tých istých ako *KLMNOP*) a 6 menších trojuholníkov. Menšie trojuholníky sú tiež zhodné, lebo ich dlhšia strana je strana pravidelného šesťuholníka a ich kratšie strany sú polovice strán pravidelného šesťuholníka. Tieto trojuholníky sú teda aj rovnoramenné.

Rozdeľme si trojuholník *KLS* ťažnicami, ktoré vyznačíme len po ťažisko takto:



Ťažnice v rovnostrannom trojuholníku ležia na osiach uhlov. Vnútorné uhly rovnostranného trojuholníka sú 60°. Os uhla ich rozdeľuje na polovicu, takže uhly priľahlé k najdlhšej strane sú 30°. Potom sú tieto trojuholníky zhodné, lebo majú zhodnú najdlhšiu stranu (strana rovnostranného trojuholníka) a uhly k nej priľahlé.

Pozrime sa na trojuholník *KAL*. Uhol *KAL* má 120°, lebo je to vnútorný uhol pravidelného šesťuholníka. Tento trojuholník je rovnoramenný, takže uhly *LKA* a *KLA* sú zhodné a majú veľkosť $(180° - 120°)/2 = 30°$. Trojuholníky *KAL* a *KTL* sú zhodné, lebo majú rovnaké uhly a spoločnú stranu *KL*. Čiže všetky trojuholníky v štvoruholníku *SKAL* sú zhodné.

Každý väčší trojuholník si vieme týmto spôsobom rozdeliť na 3 menšie. Šesťuholník *KLMNOP* sa skladá z $6 \cdot 3 = 18$ trojuholníkov. Šesťuholník *ABCDEF* sa skladá z $6 \cdot 3 + 6 = 24$ trojuholníkov. Pomer obsahov šesťuholníkov bude rovný pomeru počtu zhodných trojuholníkov, ktoré sa v nich nachádzajú.

Pomer obsahov šesťuholníkov *ABCDEF* a *KLMNOP* je $24 : 18 = 4 : 3$.

Komentár Úloha pre vás nebola náročná, väčšina z vás dospela k správnemu riešeniu, no nie všetci ste ho poriadne zdôvodnili. Riešili ste ju prevažne dvoma spôsobmi. Buď ste si šesťuholníky rozdelili na zhodné trojuholníky (ako vo vzorovom riešení), alebo ste si vyjadrili stranu menšieho šesťuholníka pomocou Pytagorovej vety a dopočítali obsahy obidvoch šesťuholníkov.

Pri prvom spôsobe ste viacerí nezdôvodnili, prečo sú trojuholníky naozaj zhodné. Obrázok vám pomôže pri riešení, ale nestačí ako dôkaz.

Pri druhom spôsobe ste niektorí nepopísali, čo dosadzujete do vzorcov a prečo to tam môžete dosadiť.

4

opravovali **Filip Csonka** a **Žanetka Semanišinová**

najkrajšie riešenie: Matej Hanus, Nina Mizeráková, Matúš Papšo

50 riešení

Zadanie Prirodzené čísla chcú, aby Jožko dokázal, že súčin dvoch dvojciferných prirodzených čísel nemôže byť nikdy štvorciferné číslo, ktoré má všetky štyri cifry rovnaké. Navyše má nájsť všetky dvojice prirodzených čísel, ktorých súčin je štvorciferné číslo so štyroma rovnakými ciframi. Pomôžte mu s tým.

Vzorové riešenie

Číslo 1111 si rozložíme na prvočísla. $1111 = 11 \cdot 101$. Keďže všetky ďalšie 4-ciferné čísla so všetkými ciframi rovnakými sú násobkami 1111, v ich prvočíselnom rozklade bude určite prvočíslo 101.

101 je 3-ciferné prvočíslo, takže vždy musí byť jeden z činiteľov násobkom 101, teda aspoň 3-ciferné číslo.
Z toho vyplýva, že súčinom dvoch 2-ciferných čísel nikdy nedostaneme 4-ciferné číslo so všetkými ciframi rovnakými.
Všetky 4-ciferné čísla so všetkými ciframi rovnakými vieme zapísať ako $1111 \cdot x$, kde x je jednociferné číslo od 1 po 9.
Ak to má byť súčin dvoch prirodzených čísel, vieme nájsť tieto možnosti:

- **x je 1**: $1 \cdot 1111$; $11 \cdot 101$
- **x je prvočíslo (2, 3, 5 alebo 7)**: $1 \cdot \overline{xxxx}$; $x \cdot 1111$; $101 \cdot \overline{xx}$; $\overline{x0x} \cdot 11$
- **x je 4** (druhá mocnina): $1 \cdot 4444$; $4 \cdot 1111$; $101 \cdot 44$; $404 \cdot 11$; $202 \cdot 22$; $2 \cdot 2222$
- **x je 9** (druhá mocnina): $1 \cdot 9999$; $9 \cdot 1111$; $101 \cdot 99$; $909 \cdot 11$; $303 \cdot 33$; $3 \cdot 3333$
- **x je 6** (iné zložené číslo): $1 \cdot 6666$; $6 \cdot 1111$; $101 \cdot 66$; $606 \cdot 11$; $2 \cdot 3333$; $3 \cdot 2222$; $22 \cdot 303$; $33 \cdot 202$
- **x je 8** (iné zložené číslo): $1 \cdot 8888$; $8 \cdot 1111$; $101 \cdot 88$; $808 \cdot 11$; $2 \cdot 4444$; $4 \cdot 2222$; $22 \cdot 404$; $44 \cdot 202$

Komentár Úloha pre vás nebola náročná, väčšina z vás bola k riešeniu naozaj blízko. O to viac ale vaše body ovplyvnili chyby z nepozornosti či nedotiahnuté vysvetlenia. Predovšetkým je dôležité, aby ste si uvedomili, že je dôležité čítať zadanie, a ak má úloha dve časti, neriešiť ich ako dve samostatné, ale používať súvislosť medzi nimi. Navyše, pri vypisovaní všetkých možných dvojíc veľká časť z vás niečo vynechala, a to práve preto, že málokto sa snažil si spočítať počet dvojíc, ktoré má nájsť, alebo si to vypísať ozaj systematicky, čo je veľmi dôležitá vec pri väčšine úloh.

5 opravovali **Samo Krajči** a **Dano Onduš**

najkrajšie riešenia: Michal Masrna, Matúš Masrna

49 riešení

Zadanie Koľko prirodzených čísel n menších ako 2015 má vlastnosť, že

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n}$$

sa dá zjednodušiť na zlomok s menovateľom menším ako n? Pod pojmom zlomok v tejto úlohe rozumieme podiel dvoch prirodzených čísel.

Vzorové riešenie

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n} \quad \text{si vieme upraviť na} \quad \frac{n+3}{3n}.$$

Aby sme to vedeli vykrátiť nejakým číslom (označme si ho d), tak d musí deliť aj čitateľa, aj menovateľa, čiže aj $n + 3$ a aj $3n$. Takže aby d delilo $3n$, tak d bude buď 3, alebo nejaký deliteľ n. Keby d bol deliteľ n, tak musí deliť n a aj $n + 3$ (čitateľ zlomku). A keď nejaké číslo delí dve čísla, tak musí deliť aj ich rozdiel. To znamená, že keď d delí n a aj $n + 3$, tak musí deliť aj ich rozdiel, čiže 3. No a 3 má práve dvoch deliteľov, a to 1 a 3, takže d je buď 1, alebo 3. Ale 1 zlomok veľmi nepokrátime, takže d bude 3. Z toho vyplýva, že keď to budeme krátiť nejakým deliteľom n, tak to musí byť 3.

Práve sme teda ukázali, že ten zlomok môžeme krátiť buď tou 3, čo je v menovateli, alebo 3, ako jediným spoločným deliteľom n a $n + 3$ a ničím iným.

No keď to vykrátime iba jednou trojkou, tak menovateľ bude n, čo nie je ešte stále menšie ako n, takže to musíme vykrátiť trojkou znova, čiže dokopy 9. Keď musíme celý zlomok vykrátiť 9, znamená to, že aj čitateľ aj menovateľ musia byť deliteľné 9. Aby bol menovateľ deliteľný 9, tak n musí byť deliteľné tromi, a aby bol čitateľ, tak $n + 3$ musí byť deliteľné deviatimi, takže n musí dávať po delení deviatimi zvyšok 6. Takže n môže byť 6, 15, 24, …

Keďže n je menšie ako 2015, tak v každej deviatke až po 2007 je jedno také číslo (to je $2007/9 = 223$) a potom ešte číslo 2013. Dokopy je teda takých čísel 224.

Komentár Úloha bola celkom ťažká, o čom svedčí aj malý počet deväťbodových riešení. Hlavný problém bol ale ukázať, prečo môžeme krátiť iba trojkou, väčšine z vás dokonca ani nenapadlo, že by sme mohli krátiť niečím iným.

6 opravovali **Martin Števko** a **Henka Micheľová**

31 riešení

Zadanie Zahrajú si spolu dve partie. Gandulf nakreslil na papier najprv 9 (na prvú partiu) a potom 10 bodov (na druhú partiu). Jožko a Gandulf na striedačku spájajú úsečkami body (vytvárajú medzi dvoma bodmi cestu – ak sa dve cesty pretínajú, tak sa tam vytvára most, nedá sa tam meniť smer). Vyhráva hráč, po ktorého ťahu vedie od každého bodu ku každému bodu cesta (nie nutne priamo). Pre ktorého hráča (prvého alebo druhého?) a kedy existuje víťazná stratégia? Vysvetlite aká. Čo keby bolo bodov 247?

Vzorové riešenie

Vieme, že hráč vyhráva, keď po jeho ťahu vznikne reťazec, pomocou ktorého sa dokážeme dostať z každého bodu do každého (to však neznamená, že každé dva body musia byť spojené). Takýto reťazec vznikne pripojením posledného bodu, respektíve skupiny bodov. Keďže budeme potrebovať pripojiť už len posledný bod/skupinu bodov, tento ťah bude jednoznačne určený, teda súper vie, ktorý to bude a bude nám v tom chcieť zabrániť. Ak sa nad tým zamyslíme, tak jediný spôsob, ako súpera prinútiť pripojiť predposledný (aby sme my mohli pripojiť posledný) bod/skupinu bodov, je taký, že všetky možné ostatné ťahy sa minú.

Ako sme už nepriamo naznačili, všetky body budú v istej fáze hry rozdelené na 3 skupiny, pričom v každej bude aspoň jeden bod. Vieme, že ten hráč, ktorý prepojí 2 z týchto 3 skupín prehral, pretože druhý hráč iba spojí túto dvojskupinku s treťou skupinou. Chceme preto zistiť, ktorý hráč musí urobiť takýto prehrávajúci ťah.

Zároveň sa ešte pozrime, ktoré ťahy robí prvý a ktoré druhý hráč. Vieme, že sa striedajú a začína prvý hráč. Z toho vieme, že prvý hráč bude robiť nepárne ťahy a druhý bude robiť iba párne ťahy.
Teraz sa pozrieme na to, aké zvyšky po delení 4 môžu mať tieto tri skupinky. Najskôr sa však pozrieme na to, ako sa bude meniť víťazstvo hráčov pre jednotlivé zvyšky počtu bodov po delení 4.
Ak je v jednej skupinke x bodov, tak potom počet všetkých úsečiek medzi nimi bude $x \cdot (x-1)/2$. No a teraz sa pozrieme na to, ako sa mení víťaz pre jednotlivé čísla x po delení 4.

	zvyšok 0	**zvyšok 1**	**zvyšok 2**	**zvyšok 3**
počet čiar	$2x(4x-1)$	$2x(4x+1)$	$(2x+1)(4x+1)$	$(4x+3)(2x+1)$
výsledok	párny	párny	nepárny	nepárny

Teraz si už len pre konkrétne počty bodov prejdeme všetky možnosti zvyškov v troch skupinkách a zistíme, aký bude výsledný súčet, a tým zistíme, kto vyhrá.
Pre počet bodov 9:

prvá skupinka	**2 druhá skupinka**	**tretia skupinka**	**víťaz**
0 (párny počet čiar)	0 (párny počet čiar)	1 (párny počet čiar)	druhý
0 (párny počet čiar)	2 (nepárny počet čiar)	3 (nepárny počet čiar)	druhý
1 (párny počet čiar)	1 (párny počet čiar)	3 (nepárny počet čiar)	prvý
1 (párny počet čiar)	2 (nepárny počet čiar)	2 (nepárny počet čiar)	druhý
3 (nepárny počet čiar)	3 (nepárny počet čiar)	3 (nepárny počet čiar)	prvý

Vo väčšine prípadov vyhráva druhý hráč, ale nie je táto výhra jednoznačná. Tak sa pozrieme, v akom prípade by mohol teoreticky vyhrať prvý hráč. Z tabuľky vidíme, že v prípadoch, kde by mohol vyhrať prvý hráč, sú zvyšky nepárne, teda aj celé počty bodov v skupinkách budú nepárne. Teda našou úlohou teraz je už len dokázať, že druhý hráč vie zabezpečiť, že žiadna skupinka nebude mať nepárny počet bodov.
Pozrime, ako by tomuto mohol zabrániť druhý hráč (popísať ťahy druhého hráča). Prvý hráč spojí nejaké 2 body. Týmto sme dostali párnu skupinu, čo je pre druhého hráča dobre a navyše teraz ide on. Ak by k tejto párnej skupine pripojil bod, stala by sa z nej nepárna, čo nechce, ale naopak, ak by spojil nejaké 2 iné body, vznikne ďalšia párna skupina. Teda druhý hráč spojí iné dva body (doteraz nespojené). Týmto si vlastne zabezpečí, že vyhral pretože, ak prvý hráč pripojí nejaký bod k párnej skupine, tak druhý hráč pripojí bod k tej istej a je z nej párna, a ak prvý hráč spojí 2 párne skupiny, tak druhý hráč proste len znova spojí nejaké iné 2 body (resp. vytvorí nejakú čiaru vo vnútri jednej skupinky, lebo máme zabezpečené, že skupinky sú párne).
Týmto postupom vzniknú na konci teda aspoň 2 párne skupiny bodov (zamyslite sa, prečo) a z tejto situácie vyhrá druhý hráč, pretože po istom počte ťahov už prvý hráč bude musieť spojiť 2 z troch posledných skupín bodov a druhý už len pripojí tú tretiu.

Pre počet bodov 10:

prvá skupinka	**2 druhá skupinka**	**tretia skupinka**	**víťaz**
0	0	2	prvý
0	1	1	druhý
0	3	3	druhý
1	2	3	druhý
2	2	2	prvý

V tomto prípade opäť má viac možností vyhrať druhý hráč. Teda prvý hráč vyhrá, iba ak bude každá skupinka párna. Tak si popíšme, aká je stratégia pre druhého hráča, aby prvý hráč nikdy nevyhral. Teda nám stačí, ak bude existovať aspoň jedna nepárna skupinka a potom prvý hráč nikdy nebude vedieť vyhrať.
Prvý hráč musí spojiť dva body. Teda vznikla párna skupinka. Tak k nej priraďme ďalší bod. V tedy sa z nej stane nepárna. Ak následne nevytvorí novú skupinku (teda v tejto trojbodovej iba spojí dva ešte nespojené body), tak potom stále máme aspoň jednu nepárnu skupinku a bez problémov môžeme vytvoriť jednu skupinku, čo je párna. A následne už len si dávame pozor na to, aby bola vždy aspoň jedna nepárna skupinka.
Teda v tomto prípade nám vyhrá vždy druhý hráč.
Pre počet bodov 247:

prvá skupinka	**2 druhá skupinka**	**tretia skupinka**	**víťaz**
0	0	3	prvý
0	1	2	prvý
1	1	1	druhý
1	3	3	druhý
2	2	3	prvý

V tomto prípade však vidíme, že vo viacerých prípadoch vyhrá prvý hráč (druhý vyhrá iba v prípade, ak sú všetky kôpky nepárne). Tak si poďme popísať stratégiu pre prvého hráča, tak aby on vždy vyhral, teda aby vždy existovala aspoň jedna párna skupinka.
Prvý hráč spojí dva body. Druhý hráč však chce mať nepárne skupiny, a tak k dvom prvým spojeným bodov pripojí tretí, aby mal nepárnu skupinku (ak by spojil iné dva body, tak potom by vytvoril dve párne skupinky, kde sa už nikdy nevie dostať do stavu, že dve sú nepárne, skúste sa zamyslieť nad týmto tvrdením). Prvý hráč však v tejto chvíli vytvorí trojuholník (spojí v tejto trojbodovej skupinke zvyšné dva body, čo ešte nie sú spojené). Po takomto ťahu sa stane to, že teraz ak druhý hráč urobí akýkoľvek ťah, tak vytvorí párnu skupinku a prvý hráč dokáže vytvoriť druhú párnu skupinku a tým si zabezpečil víťazstvo, lebo z tejto pozície sa na dve nepárne skupinky už nedá dostať (skúste sa zamyslieť). Teda vyhrá prvý hráč.
Záver teda je, že pri 9 a 10 bodoch má víťaznú stratégiu druhý hráč a pri 247 ju má prvý hráč.
BONUSOVÁ ÚLOHA: Táto úloha sa dá zovšeobecniť na všeobecný počet bodov.

Ten, kto túto úlohu dokáže popísať pre všeobecný počet bodov, tak dostane VEĽKÚ sladkú odmenu (riešenie posielajte e-mailom alebo poštou do konca júna 2016).

Komentár Úloha bola náročná. Mnohý z vás prišli na rozdelenie bodov na tri skupinky, ale väčšina iba rozobrala možnosť, že dve z týchto skupiniek majú iba 1 bod, čo však nemusí vždy nastať. Vašou úlohou je, že ak dostanete akúkoľvek pozíciu, tak dokážete povedať, kto vyhrá, ale pri takomto predpoklade sa to nedá. Taktiež ste strácali body aj za nepopísanie, prečo párne ťahy robí iba druhý hráč.

B opravovali **Samo Chaba**
najkrajšie riešenia: Jakub Mičko
5 riešení

Zadanie Mohli ste si všimnúť, že v príbehu sa nachádza veľa referencií na rôzne filmy, seriály či knihy. Spočítajte ich a pošlite spolu s druhou sériou. Kto ich nájde najviac, vyhráva prekvapenie.

Komentár Opravovanie tejto úlohy bolo ďaleko ťažšie, ako som si najprv myslel. Ono tých referencií tam nebolo až tak veľa, no a keď vám príde riešenie, kde niekto našiel dvakrát viac vecí, ako ste zamýšľali, prichádza brázdenie internetu a hľadanie danej referencie v texte, či je to skutočne tak. Niektorí z vás však spravili tú chybu, že ku každej referencii napísali, v ktorej každej knihe alebo filme sa nachádzala, no toto sa počíta stále len za jednu referenciu, nie je to podľa počtu diel, kde sa vyskytla. Chcel by som týmto poďakovať každému zúčastnenému za to, že si dal tú námahu a prečítal si celý matikovský príbeh a ešte sa aj podujal hľadať skryté referencie. Ste navždy v mojom srdiečku. Víťaz však môže byť len jeden. Pre Kuba Mička som sa rozhodol preto, lebo našiel všetky „plánované“ referencie, a z toho jednu mal ako jediný. Ak chcete viac info, môžete sa ho spýtať na jeho tajomstvo. ;-) Špeciálnu cenu som sa však rozhodol udeliť Martine Magdoškovej, za to, že v príbehu našla referenciu na Televízne noviny. Doteraz neviem prísť na to, kde, ale verím, že raz to možno objavím.

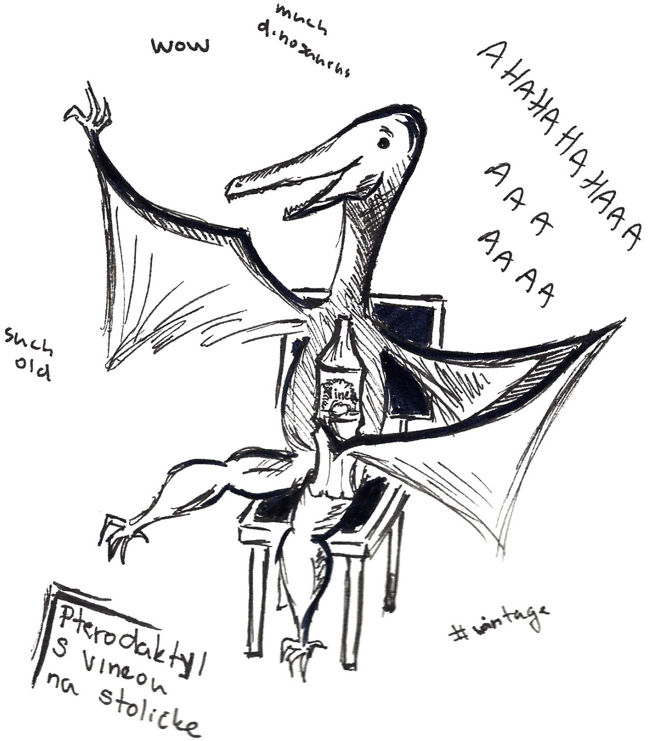
Poradie po 2.sérii

PS je súčet bodov za predchádzajúce série, **1–6** sú body za jednotlivé úlohy a **CS** je celkový súčet bodov.

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	CS
1.	Róbert Sabovčík	Z9	ZKro4KE	53	9	9	9	7	9	6	**102**
2.	Patrik Paľovčík	Z9	ZKro4KE	51	9	9	9	9	9	4	**100**
3. - 4.	Matúš Masrna	Z7	ZKro4KE	51	9	9	-	8	9	4	**99**
	Michal Masrna	Z9	ZKro4KE	54	9	9	9	9	9	-	**99**
5. - 6.	Matej Hanus	Z9	ZKro4KE	53	9	9	9	9	8	-	**97**

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	CS
	Norbert Micheľ	Z8	ZKro4KE	50	9	9	6	9	8	4	**97**
7.	Frederik Ténai	Z8	ZSPA	52	9	9	9	9	4	-	**96**
8. - 9.	Simona Jacková	Z7	ZKro4KE	50	9	9	8	9	1	-	**95**
	Branislav Pastula	Z9	DnepKE	45	9	9	9	9	8	6	**95**
10. - 13.	Radovan Lascsák	Z9	ZKro4KE	44	9	9	9	9	6	4	**90**
	Lujza Milotová	Z8	ZBrusKE	44	9	9	9	9	5	0	**90**
	Maximilián Pándy	Z7	GMaraKE	49	9	4	9	9	1	0	**90**
	Michaela Rusnáková	Z8	GAlejKE	44	2	9	9	9	9	5	**90**
14.	Samuel Koribanič	Z7	ZSverHU	39	7	9	9	8	6	5	**87**
15.	Benjamín Mravec	Z9	ZKro4KE	46	9	9	7	9	6	0	**86**
16. - 19.	Nina Mizeráková	Z8	GJarPO	44	9	9	3	9	6	4	**85**
	Tomáš Chovančák	Z9	ZKro4KE	42	9	9	9	7	9	0	**85**
	Jakub Farbula	Z8	GAlejKE	46	9	9	9	6	6	-	**85**
	Lenka Hake	Z8	GAlejKE	46	9	8	9	4	4	5	**85**
20.	Soňa Špakovská	Z8	ZSTomKe	38	9	9	9	9	5	-	**84**
21.	Adam Garafa	Z7	ZKro4KE	39	9	8	7	3	2	7	**82**
22.	Matúš Papšo	Z8	ZSloPPB	33	6	9	9	9	6	4	**78**
23.	Simona Gibalová	Z7	GAlejKE	42	4	9	9	4	0	-	**77**
24. - 26.	Simona Dučaiová	Z7	ZSTomKe	37	9	6	7	4	2	0	**74**
	Andrea Faguľová	Z9	ZŠkolMG	45	9	9	7	4	0	-	**74**
	Klára Hricová	Z8	ZKro4KE	46	1	9	5	6	6	0	**74**
27.	Samuel Banas	Z8	GyPdCPN	35	9	6	9	6	-	4	**73**
28.	Dominika Nguyen	Z8	GAlejKE	39	7	9	3	5	6	-	**72**
29.	Jaroslav Birka	Z7	ZKro4KE	35	9	9	9	-	-	-	**71**
30.	Andrej Pankuch	Z9	GAlejKE	32	9	9	9	9	2	0	**70**
31.	Sára Šoltészová	Z7	GAlejKE	28	3	9	9	6	5	0	**69**
32.	Gabriela Genčiová	Z7	ZKro4KE	35	-	9	9	3	3	5	**67**
33. - 34.	Samuel Elischer	Z7	ZKro4KE	44	-	4	9	-	-	-	**66**
	Barbora Kavečanská	Z9	EGJAK	30	9	9	9	9	-	-	**66**
35.	Adam Szamosi	Z9	GAlejKE	38	9	9	6	2	-	-	**64**
36. - 37.	Erik Novák	Z7	ZKro4KE	32	6	6	6	6	1	-	**63**
	Emma Pásztorová	Z8	GJarPO	36	9	9	-	9	-	-	**63**
38.	Matej Štencel	Z8	ZŠkolMG	49	1	5	3	-	0	4	**62**
39.	Jakub Mandzák	Z8	ZKro4KE	34	6	9	9	-	2	-	**60**
40. - 41.	Tomáš Feciskanin	Z8	GAlejKE	36	3	9	8	1	0	-	**57**
	Sophia Horňáková	Z7	GAlejKE	33	1	3	9	2	0	0	**57**
42. - 43.	Adam Čabrák	Z7	ZKro4KE	27	9	8	-	-	-	-	**53**
	Matúš Vysoký	Z7	ZKro4KE	17	9	9	-	9	-	-	**53**
44.	Martin Nemjo	Z8	GAlejKE	30	3	9	-	6	0	4	**52**
45.	Filip Hake	Z9	GAlejKE	26	6	2	7	3	1	4	**49**
46.	Michal Vorobel	Z8	GJarPO	29	0	8	-	9	0	2	**48**
47.	Hana Šándorová	Z8	GAlejKE	36	-	9	-	-	2	-	**47**
48. - 49.	Martin Bucko	Z8	ZSloPPB	35	-	2	6	2	-	-	**45**
	Miroslav Macko	Z9	ŠpMNDaG	0	9	9	9	8	5	5	**45**

Poradie	Meno	Trieda	Škola	PS	1	2	3	4	5	6	CS
50.	Martina Magdošková	Z8	GAlejKE	24	3	8	-	6	3	-	**44**
51. - 53.	Filip Baltovič	Z7	GAlejKE	41	-	-	-	-	-	-	**41**
	Michal Stupar	Z9	GAlejKE	27	1	7	4	2	0	-	**41**
	Jakub Gembický	Z9	GAlejKE	21	-	5	7	8	0	-	**41**
54.	Radoslav Jochman	Z7	GAlejKE	15	-	6	9	-	1	-	**40**
55. - 57.	Matúš Bucher	Z7	ZKro4KE	19	9	-	-	-	-	-	**37**
	Martin Albert Gbúr	Z9	ZKro4KE	28	-	9	-	-	-	-	**37**
	Soňa Liptáková	Z9	ZKro4KE	28	0	9	-	-	-	-	**37**
58.	Michal Kavuľa	Z9	ZKro4KE	16	-	7	5	8	-	-	**36**
59. - 61.	Peter Obšatník	Z7	ZBrusKE	35	-	-	-	-	-	-	**35**
	Martin Kliment	Z7	EGJAK	11	6	6	-	4	2	-	**35**
	Tatiana Kerestiová	Z7	ZBe16KE	35	-	-	-	-	-	-	**35**
62. - 63.	Dárius Pacholský	Z9	ZKro4KE	33	-	-	-	-	-	-	**33**
		Z7	ZŠmerPO	33	-	-	-	-	-	-	**33**
64. - 65.	Martin Čorovčák	Z9	GAlejKE	17	0	9	1	2	1	-	**30**
	Simona Sabovčíková	Z8	ZKro4KE	30	-	-	-	-	-	-	**30**
66. - 67.	Vladimír Nečesaný	Z8	ZSloPPB	29	-	-	-	-	-	-	**29**
	Lenka Šándorová	Z8	GAlejKE	18	-	9	-	-	2	0	**29**
68. - 69.	Ela Balážová	Z6	ZHvieLY	28	-	-	-	-	-	-	**28**
	Damián Baňačkai	Z8	ZKro4KE	28	-	-	-	-	-	-	**28**
70. - 71.	Lilla Maheľová	Z7	ZKro4KE	26	-	-	-	-	-	-	**26**
	Lukáš Mikulec	Z7	GLi69SC	26	-	-	-	-	-	-	**26**
72.	Ema Balážová	Z7	ZHvieLY	25	-	-	-	-	-	-	**25**
73. - 75.	Ema Lenárthová	Z7	ZŠkolMG	22	-	-	-	-	-	-	**22**
	Jakub Mičko	Z7	GAlejKE	22	-	-	-	-	-	-	**22**
	Martin Starovič	Z9	ZŠ s MŠ J.A.K.	0	9	2	1	8	2	0	**22**
76.	Ivana Benešová	Z7	ZKro4KE	20	-	-	-	-	-	-	**20**
77. - 78.	Michaela Minárová	Z7	ZHvieLY	19	-	-	-	-	-	-	**19**
	Tomáš Varmuža	Z7	ZŠ Brodské	15	0	2	-	-	-	-	**19**
79.	Martin Berka	Z9	ZKro4KE	17	-	-	-	-	-	-	**17**
80. - 81.	Marek Maďar	Z7	ZKro4KE	13	0	1	-	-	-	-	**15**
	Klára Paľuvová	Z7	ZKro4KE	11	0	2	-	-	-	-	**15**
82. - 83.	Alexander Janoško	Z9	ZKro4KE	13	-	-	-	-	-	-	**13**
	Dominik Mulidrán	Z9	ZSkolSNB	6	-	4	3	-	0	0	**13**
84.	Martin Kánássy	Z8	ZKro4KE	12	-	-	-	-	-	-	**12**
85.	Jakub Koza	Z7	???	11	-	-	-	-	-	-	**11**
86.	Marco Kovaľ	Z7	ZKro4KE	10	-	-	-	-	-	-	**10**
87. - 88.	Erik Tomko	Z8	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	-	**9**
	Jakub Šlauka	Z7	ZKro4KE	9	-	-	-	-	-	-	**9**
89.	Kristína Šedovičová	Z8	ZKro4KE	8	-	-	-	-	-	-	**8**
90.	Matúš Hadžega	Z8	GAlejKE	7	-	-	-	-	-	-	**7**



Za podporu a spoluprácu ďakujeme:

PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY P. J. ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH • 1963 •

NADÁCIA | Allianz

Fs / m+f

Korešpondenčný matematický seminár **MATIK**
Číslo 3 • Zimná časť 29. ročníka (2015/16) • Vychádza 10. decembra 2015
Internet: `http://matik.strom.sk`
E-mail: `matik@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `rada@strom.sk`