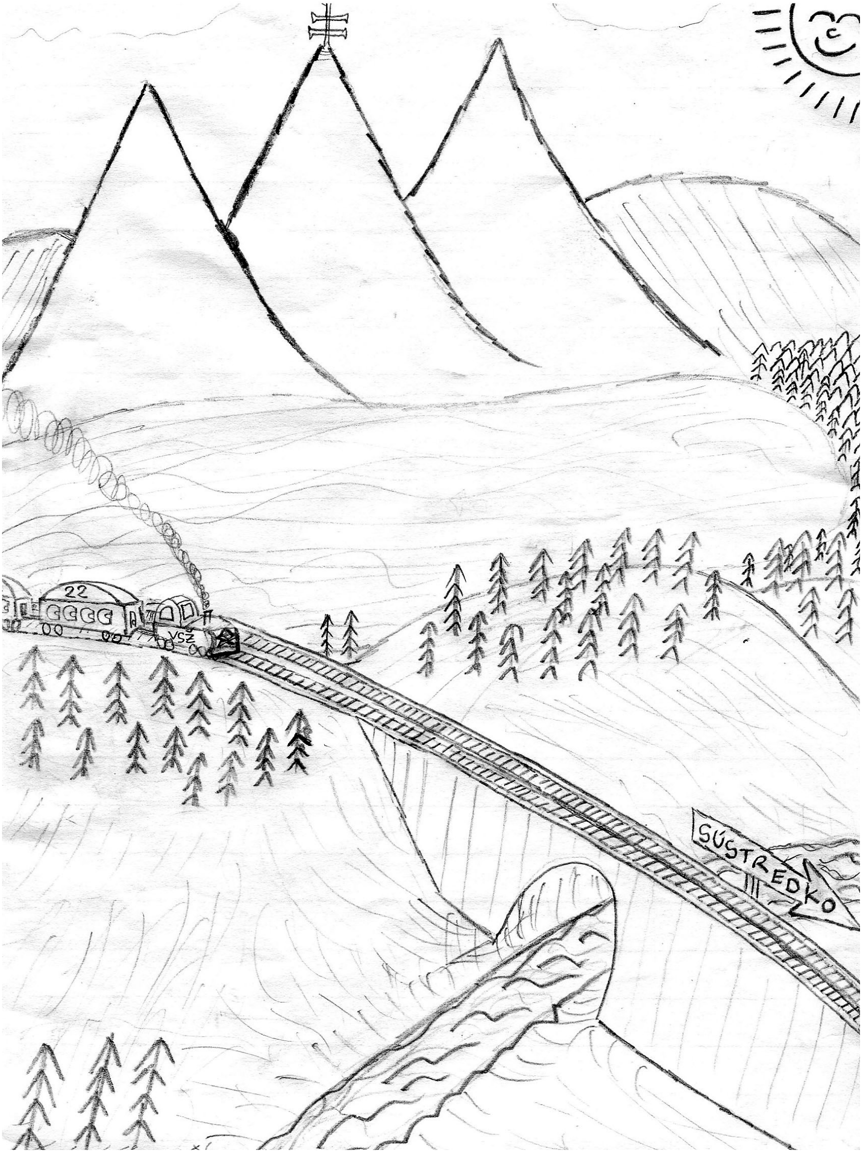
Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo 3 – Ročník 30 https://matik.strom.sk



Ahojte!

Druhú sériu máme úspešne za sebou! Určite ste zvedaví, na ktorom mieste ste skončili, tak pre vás máme predvianočný darček vo forme opravených riešení, vzorákov a poradia. Vianoce sú hneď za dverami, tak sme vám ďalšiu hordu príkladov nenaložili. Prázdniny sú časom načerpania síl pred sústredkom. Pár vyvoleným sme dali pozvánku na túto akciu, kde zažijete mnoho zábavy a stretnete plno kamarátov (aj matematiku). Tí, ktorí sa na sústredenie nedostali, nech nesmútia, lebo stále môžu predviesť svoje schopnosti v letnej časti MATIKu. Už iba zaželať pekné prázdniny a plno snehu.

Vaši milovaní vedúci MATIKu

Ako bolo

Lomihlav

2. 12. 2016 sa uskutočnil už 16. ročník tímovej matematickej súťaže Lomihlav, ktorá je určená pre žiakov 7.– 9. ročníka základných škôl a príslušných ročníkov osemročných gymnázií.
Tentokrát sa súťaž konala v priestoroch Gymnázia, Alejová 1 a zmerať si svoje sily prišlo 40 štvorčlenných tímov z rôznych škôl z východného Slovenska. Po 66 minútach počítania príkladov a riešenia hlavolamov či hádaniek si všetci mohli vydýchnuť. Nasledovala hra, ktorou si súťažiaci krátili čakanie na výsledky a zároveň mohli získať sladkosti.
Tento rok obsadila prvé dve miesta ZŠ Krosnianska 4, na treťom mieste sa umiestnilo Gymnázium, Alejová 1. Najlepšie tímy si odniesli okrem sladkej odmeny aj hodnotné vecné ceny.
Zadania a riešenia úloh, celkové poradie aj fotogalériu nájdete na našej stránke `https://matik.strom.sk/sk/lomihlav/`.
Dúfame, že sa všetkým zúčastneným páčilo, ďakujeme im a víťazom srdečne blahoželáme. Už nám nezostáva nič iné, len tešiť sa na ďalší ročník.

Ako bude

Maxiklub

No čo decká, poslúchali ste? Mikuláš bol štedrý? Veď sme si aj mysleli. Ak by vám bolo smutno, že už sa nemáte na čo tešiť, tak nezúfajte, lebo Maxiklub sa už blíži! Stretneme sa 23.12.2016 medzi 13.00 a 17.00 v miestnosti SJSP19 na PF UPJŠ, Jesenná 5, Košice. Tak príďte a užite si predvianočné poobedie v spoločnosti vašich milovaných **STROM**istov.

Vzorové riešenia 2. série úloh Zimného semestra

1 opravovali Peťo Kovács a Tomáš Chovančák

najkrajšie riešenia: Emma Pásztorová a Matej Vasky

69 riešení

Zadanie Janči na úteku si chce urobiť prieskum okolia. Má v záujme prejsť si niekoľko strategických bodov. Vychádza z brlohu potkanieho šéfa a chce navštíviť hrad, družstevnú sýpku, palác, most, nábrežie a zakončiť svoje putovanie opäť v brlohu. Časy prechodu medzi jednotlivými miestami sú:

brloh - sýpka: $2,4$	sýpka - nábrežie: $1,0$	hrad - palác: $3,0$
brloh - most: $5,0$	sýpka - palác: $3,6$	hrad - most: $4,6$
brloh - nábrežie: $2,8$	sýpka - hrad: $3,8$	nábrežie - palác: $3,0$
brloh - palác: $3,4$	sýpka - most: $3,6$	nábrežie - most: $1,6$
brloh - hrad: $2,4$	hrad - nábrežie: $3,2$	most - palác: $3,2$

Nakreslite obrázok a navrhnite plán najkratšej možnej cesty pre Jančiho.

Riešenie

Na to, aby sme obišli všetkých 6 miest, potrebujeme použiť aspoň 6 ciest. Ak by sme zobrali 6 najkratších ciest a tvorili by okruh zo všetkých miest, tak by sme mali úlohu vyriešenú. To však nenastane. Miesta budeme označovať veľkým začiatočným písmenom a cestu medzi nejakými dvoma miestami A, B ako AB. Tu sú cesty zoradené podľa dĺžky:

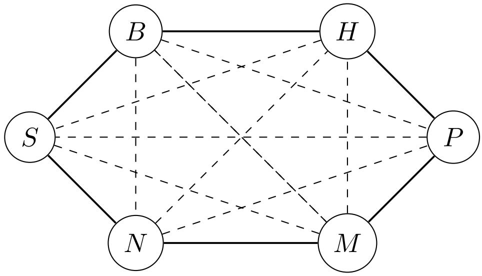
$$\mathbf{SN}\,(\mathbf{1,0}),\ \mathbf{NM}\,(\mathbf{1,6}),\ \mathbf{BH}\,(\mathbf{2,4}),\ \mathbf{BS}\,(\mathbf{2,4}),\ \mathbf{BN}\,(\mathbf{2,8}),\ \mathbf{HP/NP}\ (\text{obe } \mathbf{3,0})$$

$$MP/HN\ (\text{obe } 3,2),\ BP\,(3,4),\ SP/SM\ (\text{obe } 3,6),\ SH\,(3,8),\ HM\,(4,6),\ BM\,(5,0)$$

Dĺžka najkratších šiestich je dokopy $13,2$. Vidíme, že musíme vymeniť nejakú z ciest za nejakú dlhšiu, keďže prvých 6 okruh netvorí. Najbližšia dlhšia cesta je MP alebo HN. Budeme vymieňať cesty postupne tak, aby sme súčet dvihli o čo najmenšiu možnú hodnotu. Zároveň si môžeme všimnúť, že chceme aby z každého vrcholu viedli 2 cesty (jedna dnu a jedna von). Možnosti, kde nevymeníme nejakú cestu z B nemusíme ani uvažovať, nakoľko by B malo 3 cesty. Dostaneme pár možností:

- **SN, NM, BH, BS, HP, NP** - 13,4 - tri cesty vedú na námestie, vymenili sme $BN(2,8)$ za $HP(3,0)$
- **SN, NM, BH, BS, HP, MP** - $13,6$ vymenili sme $BN(2,8)$ za $MP(3,2)$
- **SN, NM, BH, BS, NP, MP** - 13,6 - tri cesty vedú na námestie, vymenili sme $BN(2,8)$ za $MP(3,2)$

Keďže sme rozobrali najmenšie prípady, môžeme si byť istí, že kratšia cesta neexistuje.



Iné riešenie Iný pohľad na úlohu, by mohol byť cez miesta. Do každého miesta chcem aspoň raz vojsť a aspoň raz z neho vyjsť. Teda pri každom vrchole použijem 2 cesty. Premyslite si, že ak každému vrcholu vyberieme 2 najkratšie cesty, ktoré z neho vychádzajú, a tieto cesty by náhodou splnili zadanie, teda by tvorili okruh cez všetky miesta, tak by to bola najkratšia cesta. Tu sú najkratšie cesty pri miestach:

$$B-\{S,\ H\}, S-\{B,\ N\}, H-\{B,\ P\}, P-\{H,\ N\}, N-\{S,\ M\}, M-\{N,\ P\}$$

Ak tieto hrany sčítam dostanem 27. Ak by tvorili okruh, tak som každú cestu započítal dvakrát, preto by najkratšia cesta mala dĺžku $13,5$. Dostali sme spodný odhad na dĺžku cesty. Podotknime, že výber 2 najkratších ciest bol jednoznačný pri každom mieste. Existujú teda už len dlhšie okruhy, pretože by som musel pri nejakom mieste zvoliť inú, dlhšiu cestu. Ak teraz nájdem cestu dlhú $13,6$, tak už viem, že kratšia nemôže byť. V prvom riešení sme takú cestu našli.

Komentár Skoro všetkým sa podarilo najkratšiu cestu nájsť. Problém bol väčšinou v odôvodňovaní, prečo je nájdená cesta skutočne najkratšia. Treba si premyslieť, že nie vždy mi pri hľadaní najkratšej cesty pomôže ísť najkratšou hranou. Tak isto netreba vypisovať všetky možnosti.

2

opravovali **Dano Onduš** a **Maťo Gbúr**
najkrajšie riešenia: Filip Baltovič a Gabriela Genčiová

73 riešení

Zadanie

Janči sa ponoril do oparu katakomb a ocitol sa v hlavnej chodbe. Z nej viedlo mnoho bočných chodieb. Nad každým z východov bol osadený kameň s číslom. Janči si všimol, že súčet každých troch po sebe idúcich čísel je 20 alebo 22. Striedajú sa postupne v poradí 20, 20, 22, 22, 20, 20, 22, ...Nad prvým východom bolo číslo 9, nad deviatym 7. Aký je súčet čísel prvých 100 východov?

Riešenie

Súčty trojíc sa zaradom striedajú: 20, 20, 22, 22, 20, 20, 22, 22, ... Prvý je súčtom prvých troch čísel (1., 2., 3.), druhý druhých troch čísel (2., 3., 4.), atď. Budeme preto vyberať trojice čísel, ktoré nemajú žiadne číslo spoločné (2., 3., 4.), (5., 6., 7.), ... Týmto spôsobom zarátame číslo nad každou chodbou práve raz. Keďže $100 = 33 \cdot 3 + 1$ tak budeme mať 33 trojíc, ktorých súčty vieme zistiť a zostane nám číslo nad prvou chodbou, ktoré je 9.

Každú trojicu začíname číslom, ktoré po vydelení tromi dáva zvyšok 2. Preto budeme sčítavať každý tretí súčet počnúc druhým. Každý štvrtý súčet z tých, ktoré zoberieme, (teda každý dvanásty) bude rovnaký, lebo podľa zadania je každý štvrtý súčet rovnaký a dvanásť je deliteľné štyroma. Prvé štyri súčty, ktoré sme zobrali sú 20, 22, 22, 20. Tieto štyri súčty sa budú pravidelne opakovať. Z toho vyplýva, že z prvých 32 súčtov bude 16 rovných 20 a 16 rovných 22. Posledný súčet (98., 99., 100.) je rovný 20.

$9 + 16 \cdot 20 + 16 \cdot 22 + 20 = 701$. Súčet čísel prvých 100 východov je 701.

Iné riešenie

Súčet prvých troch čísel (1., 2., 3.) je 20, prvé je 9, druhé nazveme x a tretie bude y. Vieme zistiť, že $x + y = 20 - 9 = 11$. Štvrté bude tiež 9, lebo súčet druhej trojice čísel (2., 3. ,4.) je $x + y + 9$ a to je 20. Piate bude $x + 2$, lebo súčet 3., 4. a 5. čísla je o 2 väčší ako súčet 2., 3., 4., teda druhé číslo musíme nahradiť o 2 väčším. Šieste bude y, lebo súčet sa nemení. Súčet 5., 6., 7. čísla je o 2 menší ako súčet 4., 5., 6., preto siedme číslo je $9 - 2 = 7$. Ôsme je $x + 2$, lebo súčet sa nemení. Deviate bude $y + 2$, lebo súčet 7., 8., 9. je o 2 väčší ako 6., 7., 8..

Zo zadania platí $y + 2 = 7$, z čoho vyplýva $y = 5$. Následne $x + y = 11$, z čoho vyplýva $x = 6$. Teraz dosadením vypočítame ďalšie čísla: 9, 6, 5, 9, 8, 5, 7, 8, 7, 7, 6, 7, 9, 6, 5, ...

Každé číslo už vieme vypočítať podľa predchádzajúcich dvoch a súčtu trojice, ktorú tvoria. Trinástu trojicu (13., 14., 15.) tvoria tie isté čísla ako prvú trojicu (1., 2., 3.) a navyše majú rovnaký súčet. Štrnásta trojica (14., 15., 16.) má rovnaký súčet ako druhá trojica (2., 3., 4.). To sú presne rovnaké podmienky ako na začiatku. Keďže čísla sa začali opakovať po dvanástich vchodoch a podľa zadania je každý štvrtý súčet rovnaký, tak aj každý dvanásty súčet je rovnaký. Preto sa čísla budú opakovať.

Súčet týchto dvanástich čísel je 84. $100 = 8 \cdot 12 + 4$, preto musíme nakoniec pripočítať prvé štyri čísla z tejto dvanástice. Súčet prvých sto čísel je $8 \cdot 84 + 9 + 6 + 5 + 9 = 701$.

Komentár

Väčšina z vás došla k správnemu výsledku, skoro nikomu sa však nepodarilo zdôvodniť, prečo sa postupnosť 12 čísel alebo súčtov opakuje. Ďalšou možnosťou, ktorú neodporúčame, je vypísať si všetky čísla resp. všetky súčty. Nabudúce si dajte pozor, lebo je to jedna z najdôležitejších častí riešenia.

3

opravovali **Martin Števko** a **Samo Krajči**
najkrajšie riešenia: Jakub Mičko a Samuel Koribanič

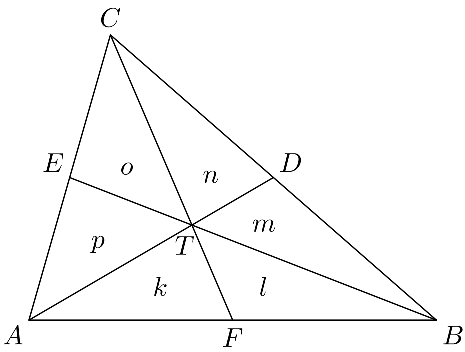
56 riešení

Zadanie

Ukážte, že 6 trojuholníkov, ktoré vznikli rozdelením trojuholníka tromi ťažnicami, má rovnaké obsahy. Ťažnice sa vždy pretínajú v jednom bode, ktorý nazývame ťažisko.

Riešenie

Jednotlivé priesečníky a menšie trojuholníky si označme tak ako na obrázku:



Keďže bod F je stred úsečky AB, tak TF je ťažnicou trojuholníka ATB. To znamená, že obsahy trojuholníkov k a l sú rovnaké (pretože majú rovnakú výšku aj základňu, čo bolo vysvetlené aj v *edukačnom okienku*). Analogicky platí aj $p = o$ a $m = n$. Keďže CF je ťažnica v trojuholníku ABC, tak vieme, že trojuholníky AFC a FBC majú rovnaký obsah, teda $k + p + o = l + m + n$. A keď vieme aj, že $l = k$, tak to dosadíme a následne upravíme:

$$k + p + o = k + m + n$$

$$p + o = m + n$$

Teraz do rovnosti $p + o = n + m$ dosadíme $p = o$ a $n = m$ a dostaneme $2o = 2m$, teda $o = m$. Potom je zrejmé, že $p = o = n = m$.
Rovnako vieme povedať aj to, že trojuholníky ADB a ADC majú rovnaký obsah, čiže $k + l + m = n + o + p$. Dosadíme $n = m$:

$$k + l + m = m + p + o$$

$$k + l = p + o$$

Podobne ako vyššie, do rovnosti $k + l = p + o$ dosadíme $k = l$ a $p = o$ a dostaneme $2l = 2o$, čiže $l = o$, a teda je už zrejmé, že $k = l = m = n = o = p$.

Komentár

Mnohí z vás by si úlohu omnoho zjednodušili, keby si uvedomili, že trojuholník je viac-menej symetrický, čo sa týka obsahov. Teda keď dokážeme, napríklad, že $p = m$, tak je zrejmé, že platí aj $n = k$ a $o = l$ a podobne. Taktiež ste si mohli prácu uľahčiť tým, že sa odvoláte na poznatky z *edukačného okienka* a nemusíte ich odôvodňovať znova.

4 opravovali **Kristín Mišlanová** a **Martin Masrna**
najkrajšie riešenie: Dominika Nguyen

65 riešení

Zadanie

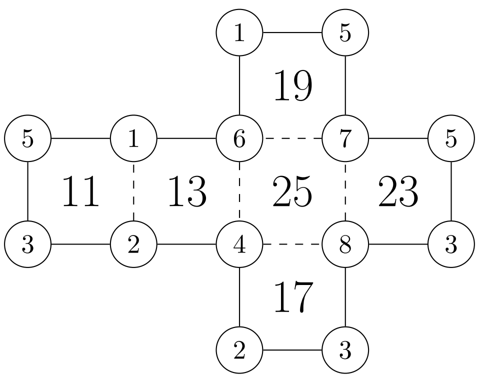
Na stole ležala kocka a po poslednom hode vyzerala takto: V jej vrcholoch sa vznášali čísla od 1 po 8 (každé práve raz). Na každej stene kocky bol vyrytý súčet čísel, ktoré sa nachádzali vo vrcholoch príslušnej steny. Bolo zaujímavé, že všetky súčty na stenách, ktoré Janči videl (tých stien bolo päť), boli prvočísla a neboli medzi nimi žiadne dve rovnaké. Aké číslo bolo na šiestej stene kocky?

Riešenie

Najprv sa pozrime na to, aké čísla môžu byť na stene kocky. Najnižšie možné číslo bude súčtom štyroch najnižších možných čísel vo vrcholoch ($1+2+3+4=10$) a najvyššie možné číslo súčtom štyroch najvyšších čísel ($5+6+7+8=26$). Všetky vyryté čísla teda budú určite v intervale medzi 10 a 26. V tomto intervale je presne 5 prvočísel - 11, 13, 17, 19 a 23. Zo zadania vieme, že prvočísla sú navzájom rôzne, preto Janči určite videl presne týchto 5 prvočísel.

Ak sa pozrieme na číslo 11, všimneme si, že je iba jediná možnosť ako ho zapísať v podobe súčtu štyroch čísel od 1 do 8, a to $1+2+3+5=11$. Je to jediná možnosť, keďže pre súčet 11 potrebujeme oproti desiatke ($1+2+3+4$) zväčšiť jedno z čísel o 1, a zväčšiť môžeme iba číslo 4, pretože keby sme zvýšili iné, boli by dve čísla rovnaké. V rohoch jednej zo stien kocky teda určite budú čísla 1, 2, 3, 5. To znamená, že v rohoch protiľahlej steny budú zvyšné 4 čísla - 4, 6, 7, 8. Keď tieto 4 čísla spočítame, zistíme, že ich súčet je 25, čo však nie je jedno z prvočísel, ktoré Janči videl. Bude to teda práve hľadané šieste číslo.

Teraz si ešte musíme overiť, či takáto kocka môže skutočne existovať. Mohla by vyzerať napríklad takto:



Komentár Úloha bola pomerne ľahká, o čom svedčí aj veľa 9 bodových riešení, avšak často ste robili jednu rovnakú chybu, ktorá viacerých z vás stála 1 bod. Vynechávali ste poslednú časť vzorového riešenia a zabudli ste nakresliť, ako by tá kocka mohla vyzerať. Mohlo by sa totižto stať, že by úloha nemala riešenie, a preto je nutné si vždy overiť existenciu svojho výpočtu (:

5 opravovali **Janka Baranová** a **Vraťo Madáč**

najkrajšie riešenie: Matúš Masrna

35 riešení

Zadanie

Chceli, nech Janči dokáže, že ak si ľubovoľne zvolíme 55 rôznych celých čísel od 1 do 100 vrátane, budú medzi nimi dve, ktorých rozdiel je 9, dve, ktorých rozdiel je 10, dve, ktorých rozdiel je 12 a dve, ktorých rozdiel je 13. Prekvapujúco sa mocní nevedeli zmocniť vždy takých dvoch čísel, ktorých rozdiel je 11, takže treba ukázať, že také tam byť nemusia.

Riešenie *(podľa Emmy Pásztorovej)* Ako zadanie píše, našou úlohou bolo dokázať, že medzi ľubovoľnými 55 číslami 1-100 vieme vždy nájsť dve také, ktorých rozdiel je 9, 10, 12 a 13 a taktiež ukázať, že tam nemusí byť stále rozdiel 11 – v niektorom prípade (je potrebné nájsť konkrétnu 55-icu čísel), tam proste nebude. Dôkaz pre všetky tieto rozdiely je rovnaký. Pôjde o rozdelenie si čísel do skupín, ako si ukážeme pri rozdiele 9.

Rozdiel 9 dávajú dve za sebou idúce čísla, ktoré majú rovnaký zvyšok po delení 9, napr. $10 - 1 = 9$, čísla 10 a 1 dávajú po delení 9 zvyšok 1. Čísla od 1 po 100 si rozdeľme do skupín podľa zvyšku po delení deviatimi, teda do 9 skupín. V každej skupine bude $100/9 = 11$ čísel a jedno sa zvýši (číslo 100).

zv. 1	zv. 2	zv. 3	zv. 4	zv. 5	zv. 6	zv. 7	zv. 8	zv. 0
1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81
82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99
100								

Keďže naše čísla začínajú číslom 1, tak aj my sme začali zvyškom 1. Zostavili sme tabuľku tak, že do stĺpcov sme zapísali čísla s rovnakým zvyškom (čísla po stĺpcoch teda patria do jednotlivých skupín).
Z tabuľky vidíme, že ak vezmeme celý riadok, tak žiadne dve čísla v ňom nebudú mať rozdiel 9 (pretože rozdiel najväčšieho a najmenšieho je 8, a to je maximum, čo vieme dostať). V rámci stĺpcov sú zvyšky rovnaké a pri rozdiele dvoch z nich sa vynulujú, teda výsledkom bude číslo deliteľné 9. Výsledok 9 dostaneme, len ak vezmeme čísla bezprostredne nad sebou.

My sa pokúsime zo 100 čísel vybrať maximálny počet taký, aby sa medzi číslami nevyskytol rozdiel 9. Ak tento počet bude menší ako 55, tak vieme povedať, že po pridaní ďalších čísel (do 55 čísel) sa tam tento rozdiel už vyskytovať bude.

V rámci jedného stĺpca (jedného zvyšku) vieme zobrať vždy len každé druhé číslo. Z toho vyplýva, že pri párnom počte čísel v stĺpci vezmeme maximálne polovicu čísel (tak, aby tam nebol rozdiel 9) a pri nepárnom počte vezmeme polovicu zaokrúhlenú nahor (rozmyslite si prečo).

To znamená, že pri rozdiele 9 vieme z každého stĺpca vybrať maximálne 6 čísel, teda dokopy maximálne $6 \cdot 9 = 54$ čísel. My potrebujeme však číslo väčšie alebo rovné 55, aby sme vedeli povedať, že sa tam také dve čísla nachádzať nemusia. Keďže máme 54 čísel, tak ak vyberiem ľubovoľné ďalšie číslo, tak sa tam už určite budú nachádzať dve také, ktorých rozdiel je 9. Tým sme pre rozdiel 9 úlohu dokázali.

Pre 10 je to podobné, s tým rozdielom, že zvyškov po delení 10 je 10, teda rozdeľujeme do 10 skupín a opäť vyberáme maximálne každé druhé číslo v stĺpci. V každom stĺpci budeme mať presne $100/10 = 10$ čísel. Keďže berieme každé druhé číslo, tak vezmeme najviac $10 \cdot 5 = 50$ čísel tak, aby sa tam nenachádzal rozdiel 10. My potrebujeme 55 čísel, teda opäť ak vyberieme ľubovoľné ďalšie, tak sa tam budú nachádzať dve také, ktorých rozdiel je 10. Tým sme pre rozdiel 10 úlohu dokázali.

Pre 11 máme 11 zvyškov, teda rozdeľujeme do 11 skupín a opäť vyberáme maximálne každé druhé číslo v stĺpci. V stĺpcoch bude $100/11 = 9$ čísel, pričom 1 sa zvýši. Z každého stĺpca zoberieme najviac 5, teda dokopy najviac $11 \cdot 5 = 55$ čísel. My potrebujeme 55 čísel, teda teoreticky vieme nájsť takú skupinu čísel, medzi ktorými nebude rozdiel 11. Sú to čísla: 1 až 11, 23 až 33, 45 až 55, 67 až 77, 89 až 99.

Pre 12 máme 12 zvyškov, teda rozdeľujeme do 12 skupín. Určme, koľko budeme mať čísel v skupinách: $100/12 = 8$ čísel, zvyšok 4. V prvých 4 stĺpcoch je teda 9 čísel, v zvyšných ôsmich je čísel 8. Bez rozdielu 12 vieme zobrať maximálne $4 \cdot 5 + 8 \cdot 4 = 52$ čísel. My potrebujeme 55 čísel, teda ak vyberieme ľubovoľné ďalšie, tak sa tam budú nachádzať dve také, ktorých rozdiel je 12.

Pre 13 máme 13 zvyškov, teda rozdeľujeme do 13 skupín. V skupinách bude $100/13 = 7$ čísel, zvyšok 9. Vezmeme $13 \cdot 4 = 52$ čísel, čo je menej ako 55, teda ak ľubovoľné pridáme, tak už tam bude rozdiel 13.

Ak vyberieme 55 ľubovoľných čísel z intervalu 1 až 100, tak tam určite budú dve také, ktorých rozdiel je 9, 10, 12 a 13, ale dve také, ktorých rozdiel je 11, sa tam nutne nachádzať nemusia (našli sme skupinu čísel, kde sa nenachádza).

Komentár

Mnohí z vás nesprávne pochopili zadanie. Úlohou nebolo len dokázať, že sa medzi ľubovoľnými 55 číslami nemusia nachádzať dve, ktorých rozdiel je 11, ale aj, že sa tam vždy musia nachádzať dve s rozdielom 9, 10, 12 a 13. Tiež bolo potrebné ukázať, z akého dôvodu ste dané čísla vyberali tak, ako ste vyberali. Nestačí len prehlásiť, že to je ten „najlepší“ spôsob. Vo všeobecnosti ste aj napriek náročnejšej úlohe mali veľa pekných nápadov, za čo sme na vás hrdí. Hlavné je sa nevzdávať.

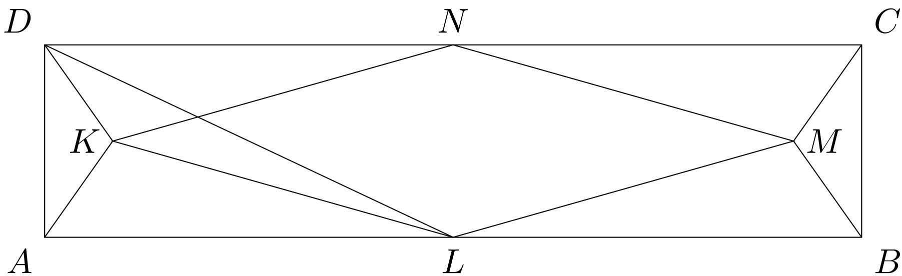
6 opravovali **Erik Berta** a **Matúš Hlaváčik**

najkrajšie riešenia: Lujza Milotová a Jakub Farbula

31 riešení

Zadanie

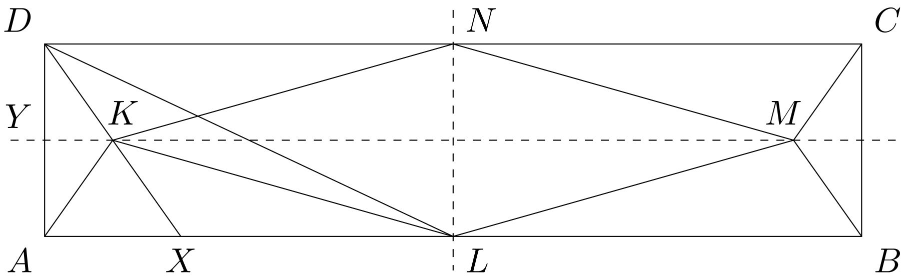
V obdĺžniku $ABCD$ sa nachádzajú body K, L, M a N ako na obrázku. Daný útvar na obrázku je osovo súmerný podľa osí KM aj NL. Pritom platí, že $|\sphericalangle ADK| = |\sphericalangle CDL| = 30°$. Akú časť plochy obdĺžnika $ABCD$ zaberá kosoštvorec $KLMN$?



Riešenie Vieme, že os KM rozdeľuje úsečku AD na polovicu. Priesečník osi KM a strany DA označíme ako Y. Zo zadania vieme, že $|\sphericalangle ADK| = 30°$, $|\sphericalangle NDL| = 30°$, a zároveň vieme, že $|\sphericalangle NDA| = 90°$, z čoho nám vyplýva, že $|\sphericalangle KDL| = 90° - 30° - 30° = 30°$.

Úsečku DK predĺžime tak, aby preťala stranu AB a vzniknutý bod nazveme X. Y aj K ležia na osi štvoruholníka $ABCD$ a zároveň na stranách trojuholníka AXD. Taktiež Y je stred úsečky AD a YK je rovnožné s AX, pretože sa nachádza na osi. Preto je KY stredná priečka v trojuholníku AXD, z čoho vyplýva, že K sa nachádza v strede úsečky DX.

Keďže trojuholník KDA je zo zadania symetrický podľa KM, tak je rovnoramenný, pričom $|\sphericalangle DAK| = |\sphericalangle ADK| = 30°$, a teda $|\sphericalangle AKD| = 120°$. Vieme, že $|\sphericalangle AKX| = 60°$, lebo je susedný s uhlom AKD a $|\sphericalangle AKD| = 120°$.



Vieme, že $|\sphericalangle KAX| = |\sphericalangle DAX| - |\sphericalangle DAK| = 90° - 30° = 60°$. Teraz už vieme, že $|\sphericalangle AKX| = |\sphericalangle KAX| = 60°$, čo znamená, že $|\sphericalangle AXK| = 180° - 2\cdot 60° = 60°$, z čoho vyplýva, že trojuholník AXK je rovnostranný. Preto $|AX| = |XK| = 1/2 \cdot |XD|$.
Uhol DXL je susedný s AXD, a teda $|\sphericalangle DXL| = 180° - 60° = 120°$. Súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°, z trojuholníka XLD preto vieme, že $|\sphericalangle XLD| = 180° - 120° - 30° = 30°$. Z toho dôvodu je trojuholník XLD rovnoramenný s ramenami XL a DX, takže $|XL| = |DX|$.
Vieme povedať, že $|AX| = 1/2 \cdot |XL|$, pretože $|AX| = 1/2 \cdot |DX|$, pričom DX a XL sú ramená rovnoramenného trojuholníka. Taktiež vieme, že $|AX| = 2 \cdot |YK|$, lebo YK je stredná priečka v trojuholník AXD.
Z týchto dvoch poznatkov vieme povedať, že $|AB| = 2 \cdot (|AX| + |XL|) = 2 \cdot (2 \cdot |YK| + 4 \cdot |YK|) = 12 \cdot |YK|$. Vďaka tomu vieme obsah štvoruholníka vypočítať ako $S_{ABCD} = 12 \cdot |YK| \cdot b$, pričom $b = |BC| = |NL|$. Obsah kosoštvorca sa počíta ako $u_1 \cdot u_2/2$, kde u_1 a u_2 sú dĺžky uhlopriečok daného kosoštvorca.
V našom prípade:

$$S = \frac{|NL| \cdot |KM|}{2} = \frac{|NL| \cdot (12 \cdot |YK| - 2 \cdot |YK|)}{2} = |NL| \cdot 5 \cdot |YK| = b \cdot 5 \cdot |YK|.$$

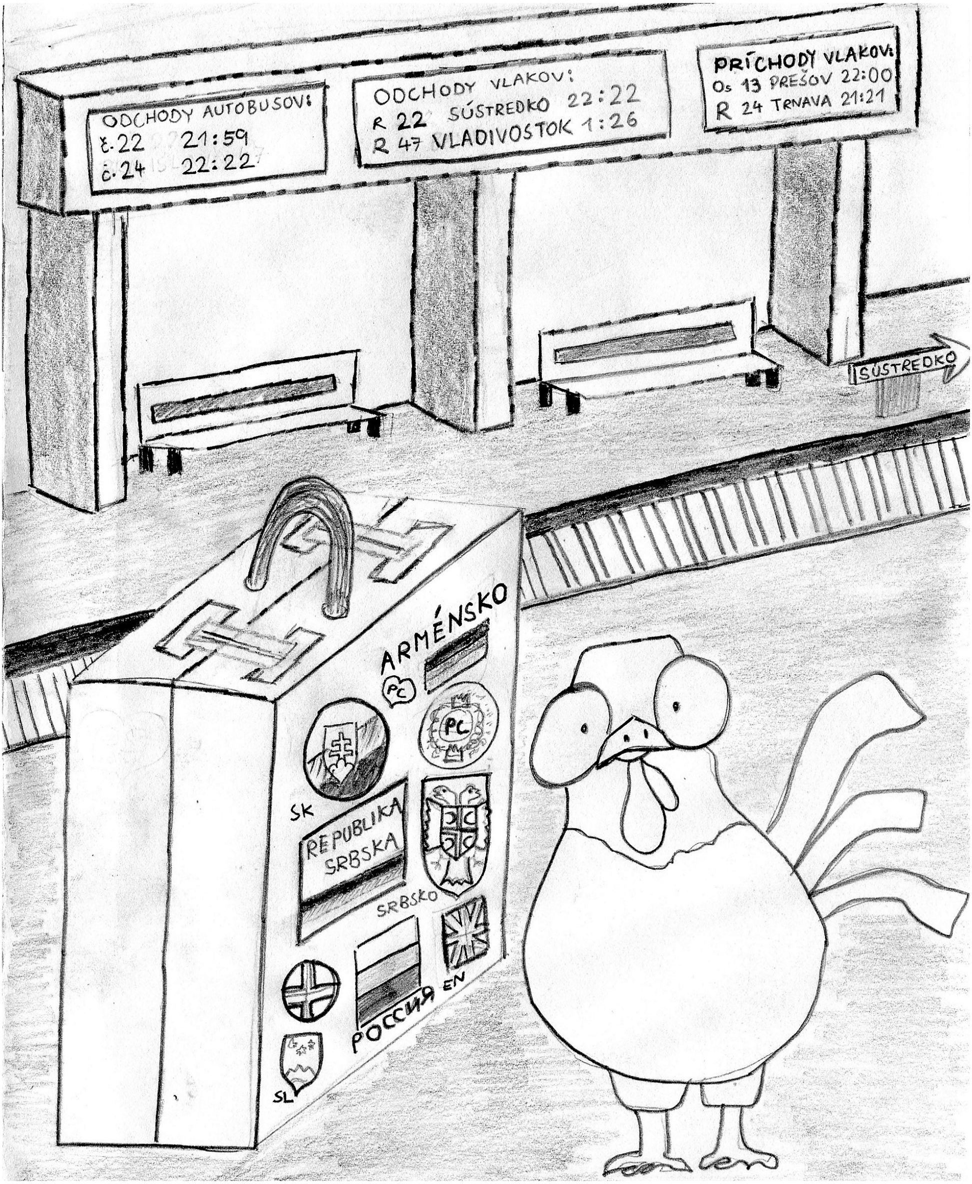
Obsahy už iba dáme do pomeru a zlomok upravíme do základného tvaru:

$$\frac{5 \cdot |YK| \cdot b}{12 \cdot |YK| \cdot b} = \frac{5}{12}.$$

Kosoštvorec tvorí 5/12 obdĺžnika.

Komentár

Asi najčastejšou chybou, ktorú urobilo mnoho z vás, bolo to, že ste zabúdali ukázať, z čoho ste dopočítali veľkosti uhlov a iba ste to naznačili do obrázka. Inak ste to mali fajn. Niektorí ste úlohu riešili rysovaním, meraním, či vystrihovaním. Tento postup nie je správny, pretože pri ňom vznikajú veľké odchýlky, čím dostaneme chybné výsledky. Taktiež sa stávalo, že ste sa pomýlili v označení niektorých uhlov, no za to sme body nestrhávali.


ODCHODY AUTOBUSOV:
č. 22 21:59
č. 24 22:22
ODCHODY VLAKOV:
R 22 SÚSTREDKO 22:22
R 47 VLADIVOSTOK 1:26
PRÍCHODY VLAKOV:
Os 13 PREŠOV 22:00
R 24 TRNAVA 21:21
SÚSTREDKO
ARMÉNSKO
PC
PC
SK
REPUBLIKA SRBSKA
SRBSKO
EN
РОССИЯ
SL

Konečné poradie Zimného semestra 30. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Kategória	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
1.	Matej Vasky	Z7	GAlejKE	9	9	7	9	9	7	54	**106**
2.	Matúš Masrna	Z8	ZKro4KE	9	6	7	9	8	9	54	**103**
3.	Maximilián Pándy	Z8	GMaraKE	-	5	7	9	8	8	54	**96**
4.	Emma Pásztorová	Z9	GJarPO	7	9	5	6	9	7	52	**95**
5.	Gabriela Genčiová	Z9	ZKro4KE	9	9	8	9	9	8	42	**94**
6. - 8.	Adam Garafa	Z8	ZKro4KE	8	5	7	9	8	2	48	**90**
	Dominika Nguyen	Z9	GAlejKE	7	8	7	9	9	2	48	**90**
	Lujza Milotová	Z9	ZBrusKE	9	6	7	9	9	8	42	**90**
9. - 11.	Norbert Micheľ	Z9	ZKro4KE	3	8	9	9	9	5	46	**89**
	Sara Gašparová	Z7	GLich69SC	1	4	4	9	8	5	50	**89**
	Oskar Hritz	Z7	ZPoliKE	-	5	4	8	9	4	50	**89**
12. - 13.	Jakub Kulka	Z7	ZDrienov	-	5	3	9	8	0	54	**88**
	Samuel Koribanič	Z8	ZSverHE	9	5	4	9	9	7	44	**88**
14. - 15.	Matej Grofcik	Z8	ZNov2KE	-	8	7	9	9	3	46	**85**
	Štefan Vašak	Z7	ZKe30KE	8	5	5	3	9	3	46	**85**
16.	Michal Vorobel	Z9	GJarPO	5	8	7	9	9	2	44	**84**
17. - 18.	Radoslav Jochman	Z8	GAlejKE	-	6	7	9	9	2	48	**83**
	Martin Nemjo	Z9	GAlejKE	-	8	7	9	9	3	47	**83**
19.	Zuzana Kudláčová	Z7	GAlejKE	8	5	4	9	8	-	39	**82**
20. - 24.	Frederik Ténai	Z9	ZParkKE	9	5	7	3	8	2	45	**79**
	Erik Novák	Z8	ZKro4KE	-	8	3	9	8	5	43	**79**
	Nina Mizeráková	Z9	GJarPO	7	5	4	9	8	5	41	**79**
	Jakub Mičko	Z8	GAlejKE	-	-	8	9	8	-	54	**79**
	Klára Hricová	Z9	ZKro4KE	7	8	7	1	9	2	45	**79**
25. - 26.	Sára Šoltészová	Z8	GAlejKE	-	5	7	9	9	-	48	**78**
	Jakub Farbula	Z9	GAlejKE	9	5	8	9	5	1	41	**78**
27.	Karol Jakubčák	Z7	ZKro4KE	-	8	7	4	8	-	41	**76**
28.	Bianka Šimková	Z9	ZFab44KE	8	5	7	3	8	3	41	**75**
29.	Simona Sabovčíková	Z9	ZKro4KE	1	5	7	3	9	2	47	**74**
30. - 31.	Lenka Hake	Z9	GAlejKE	9	6	5	9	9	8	26	**72**
	Michaela Rusnáková	Z9	GAlejKE	-	7	6	7	8	-	44	**72**
32.	Miriam Horváthová	Z7	ZKomeMI	4	5	4	5	4	3	44	**71**
33. - 34.	Margaréta Berecká	Z7	ZKro4KE	-	4	4	9	8	-	35	**69**
	Adam Bednář	Z7	EGJAK	7	-	6	9	4	1	33	**69**
35.	Filip Baltovič	Z8	GAlejKE	9	-	9	4	-	-	44	**66**
36.	Simona Gibalová	Z8	GAlejKE	-	5	7	-	9	-	44	**65**
37. - 38.	Patrik Sremaňák	Z7	ZKro4KE	-	8	4	0	8	-	34	**62**
	Lea Jantošovičová	Z8	GAlejKE	-	5	7	9	9	-	32	**62**
39.	Simona Horváthová	Z9	ZKro4KE	-	5	7	1	7	-	37	**57**
40.	Sophia Sabovčíková	Z7	ZKro4KE	0	4	1	0	9	-	33	**56**
41. - 42.	Barbara Michalíková	Z7	ZKro4KE	-	5	7	3	9	-	20	**53**
	Timotej Jakubov	Z6	ZŠtefHE	1	5	7	0	8	0	24	**53**
43.	Karin Eštoková	Z7	ZBeleKE	-	-	-	-	-	-	51	**51**
44.	Tomáš Feciskanin	Z9	GAlejKE	-	5	-	9	9	-	26	**49**
45.	Ľuboš Bucher	Z7	ZKro4KE	-	-	7	-	9	-	22	**47**
46. - 47.	Martina Vilinová	Z7	ZZaVod14SL	0	5	1	0	0	-	35	**46**
	Martin Fedorko	Z8	ZŠmerPO	-	5	7	9	8	-	17	**46**
48. - 49.	Martin Kliment	Z8	EGJAK	0	4	1	-	9	1	30	**45**

Poradie	Meno a priezvisko	Kategória	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
	Michal Židzik	Z7	ZSverHE	-	9	1	-	8	-	18	**45**
50. - 51.	Jaroslav Birka	Z8	ZKro4KE	-	-	5	9	9	-	21	**44**
	Ľubomír Vargovčík	Z7	ZKe30KE	-	1	1	-	7	2	26	**44**
52.	Adam Čabrák	Z8	ZKro4KE	-	-	4	-	8	-	31	**43**
53. - 54.	Simona Dučaiová	Z8	ZTomKE	-	4	4	-	9	-	24	**41**
	Oliver Demjan	Z7	ZKro4KE	-	5	1	1	8	3	15	**41**
55. - 57.	Elena Hanusová	Z7	ZKro4KE	0	3	3	3	6	-	19	**40**
	Peter Rudišin	Z7	ZŠtefHE	-	0	9	0	1	1	20	**40**
	Martin Gomboš	Z9	GAlejKE	2	4	3	-	2	2	27	**40**
58.	Klára Macková	Z7	ZHli22RK	-	-	-	-	-	-	39	**39**
59. - 61.	Veronika Macková	Z8	ZHli22RK	-	-	-	-	-	-	34	**34**
	Barbora Gbúrová	Z7	ZKro4KE	-	5	-	-	-	-	24	**34**
	Natália Kapustová	Z7	ZBadin	-	-	-	-	-	-	34	**34**
62. - 63.	Lilla Maheľová	Z8	ZKro4KE	-	-	7	-	8	-	17	**32**
	Pavol Liščinský	Z7	ZKro4KE	-	5	3	-	-	-	19	**32**
64. - 65.	Samuel Elischer	Z8	ZKro4KE	-	8	-	0	-	-	23	**31**
	Samuel Čurma	Z7	ZSverHE	-	5	-	-	8	-	10	**31**
66.	Alexandra Bálintová	Z8	GAlejKE	-	5	7	7	9	-	0	**28**
67. - 68.	Hana Šándorová	Z8	GAlejKE	-	-	-	-	-	-	27	**27**
	Alžbeta Szabová	Z7	EGJAK	-	-	-	-	-	-	27	**27**
69. - 70.	Lenka Šándorová	Z8	GAlejKE	-	-	-	-	-	-	26	**26**
	Antoinette Vavreková	Z9	ZŠmerPO	-	5	1	8	8	-	4	**26**
71. - 73.	Jakub Mandzák	Z9	ZKro4KE	-	-	-	-	-	-	25	**25**
	Matej Hajduk	Z8	EGJAK	-	-	-	-	-	-	25	**25**
	Simona Vrbová	Z9	ZKro4KE	-	-	-	-	9	-	16	**25**
74.	Klaudia Schurdáková	Z7	ZZaVod14SL	-	4	0	-	6	-	8	**24**
75.	Richard Sobek	Z7	ZKro4KE	-	4	0	-	-	-	15	**23**
76. - 77.	Simona Jacková	Z8	ZKro4KE	-	1	-	-	8	-	13	**22**
	Tadeáš Kaminský	Z8	GAlejKE	-	-	-	-	-	-	22	**22**
78. - 81.	Peter Lukáč	Z7	ZKro4KE	-	2	0	-	-	-	17	**21**
	Martin Gubík	Z7	ZKro4KE	-	-	-	-	-	-	21	**21**
	Kristína Šedovičová	Z8	ZKro4KE	-	5	-	-	-	-	16	**21**
	Jakub Šlauka	Z7	ZKro4KE	-	5	6	-	-	-	4	**21**
82. - 87.	Matúš Vysoký	Z8	ZKro4KE	-	4	-	-	9	-	7	**20**
	Alexandra Bálintová	Z8	GAlejKE	-	-	-	-	-	-	20	**20**
	Lukáš Behun	Z8	GAlejKE	-	-	-	-	-	-	20	**20**
	Matúš Bucher	Z8	ZKro4KE	-	-	5	-	1	-	14	**20**
	Richard Gerboc	Z7	ZŠtefHE	-	-	-	-	-	-	20	**20**
	Martin Čandík	Z9	ZŠmerPO	-	-	-	-	-	-	20	**20**
88. - 89.	Daniela Stupárová	Z8	GAlejKE	-	-	-	-	-	-	19	**19**
	Filip Brutovsky	Z8	GAlejKE	-	-	-	-	-	-	19	**19**
90. - 91.	Claudia Ciganová	Z7	EGJAK	-	-	-	-	-	-	18	**18**
	Martina Magdošková	Z8	GAlejKE	-	-	-	-	-	-	18	**18**
92. - 93.	Viktória Fáberová	Z9	GAlejKE	-	-	-	-	-	-	17	**17**
	Martin Smolko	Z9	ZŠmerPO	-	-	-	-	-	-	17	**17**
94. - 97.	Barbora Stupavská	Z7	ZStan13KE	-	-	-	-	-	-	16	**16**
	Kristián Polák	S2	GĽŠ26MI	-	-	-	-	-	-	16	**16**
	Ivan Dula	Z9	GAlejKE	-	-	-	-	-	-	16	**16**
	Zuzana Krajňáková	Z9	ZKro4KE	-	-	-	-	-	-	16	**16**

Poradie	Meno a priezvisko	Kategória	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
98.	Teodor Sepeši	Z8	GAlejKE	-	-	7	0	8	-	0	**15**
99.	Filip Šašala	Z7	ZKro4KE	-	4	0	0	2	-	3	**13**
100. - 103.	Klára Paľuvová	Z8	ZKro4KE	-	4	-	0	-	-	8	**12**
	Lukáš Mikulec	Z8	GLich69SC	-	4	0	0	0	0	8	**12**
	Samuel Petroc	Z5	ZKro4KE	-	-	-	-	-	-	12	**12**
	Diana Baňačkai	Z6	ZKro4KE	-	0	0	-	-	-	12	**12**
104. - 108.	Lenka Nemergutová	Z7	ZZaVod14SL	-	-	-	-	-	-	11	**11**
	Martin Kánássy	Z9	ZKro4KE	-	-	-	-	-	-	11	**11**
	Sára Lemešányi	Z8	ZKro4KE	-	-	-	-	-	-	11	**11**
	Jakub Gera	Z9	ZŠmerPO	0	-	1	-	0	-	10	**11**
	Michal Chovančák	Z7	ZKro4KE	-	-	1	0	-	-	9	**11**
109. - 110.	Zuzana Jankurová	Z7	ZZaVod14SL	-	-	-	-	-	-	10	**10**
	Adam Varinský	Z6	ZKro4KE	-	5	-	-	-	-	0	**10**
111. - 114.	Kristína Melicherová	Z7	ZKro4KE	-	-	-	-	-	-	9	**9**
	Oliver Orosz	Z7	ZKro4KE	-	-	-	-	-	-	9	**9**
	Ján Richnavský	Z9	ZKro4KE	-	-	-	-	-	-	9	**9**
	Erika Gregová	Z7	GAlejKE	-	4	1	-	-	-	0	**9**
115.	Daniel Kalina	Z9	ZKro4KE	-	-	-	-	-	-	8	**8**
116. - 118.	Ivana Benešová	Z8	ZKro4KE	1	-	1	-	1	-	3	**6**
	Branislav Knap	Z7	ZKro4KE	-	-	0	-	0	-	6	**6**
	Dávid Orem	Z8	ZŠmerPO	-	-	-	-	-	-	6	**6**
119.	Ondrej Tomko	Z8	ZŠmerPO	-	-	-	-	-	-	5	**5**
120. - 121.	Tamara Pazúrová	Z7	SMlad7PP	-	-	-	-	-	-	4	**4**
	Anthony Martin	Z9	ZKro4KE	-	-	-	-	-	-	4	**4**
122.	Marco Kovaľ	Z8	ZKro4KE	-	-	-	0	-	-	0	**0**

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

Názov *MATIK* – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 3 • December 2016 • Zimný semester 30. ročníka (2016/2017)
Internet: `https://matik.strom.sk`
E-mail: `matik@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `https://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`