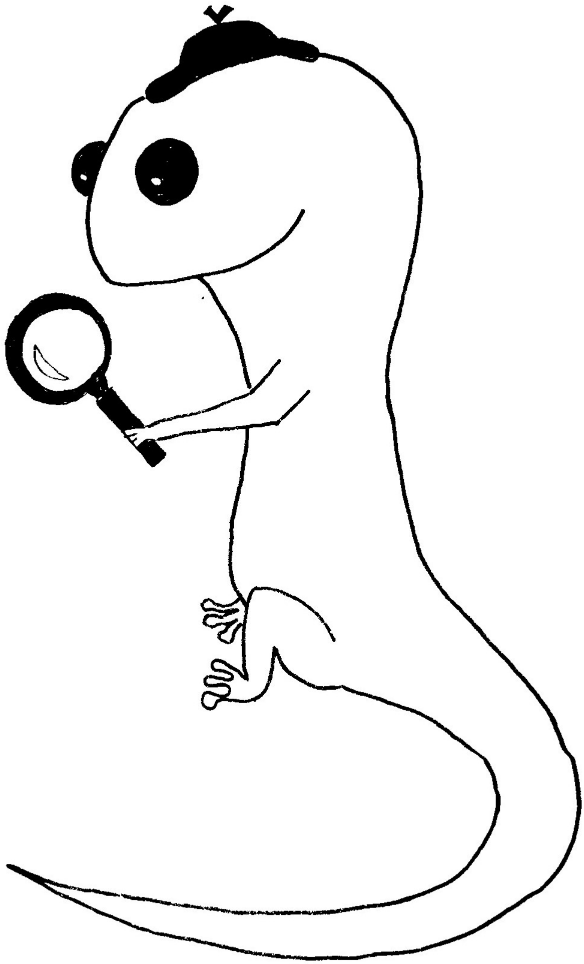
Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo 2 — Ročník 33 matik.strom.sk



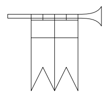
Čauko!

Jesenné prázdniny sú za nami a my ti opäť prinášame nové číslo časopisu. Aj tentoraz v ňom môžeš nájsť výsledky 1. série, krásne vzoráky a ešte krajšie úlohy do druhej série. Preto, ak prvá nevyšla podľa tvojich predstáv, nemusíš zúfať. Je tu druhá a posledná šanca získať bodíky a prebojovať sa na zimné sústredenie plné zábavy, nových aj starých kamarátov a hlavne super vedúcich. Tak šup do práce!

Vaši vedúci MATIKa

Ako bude

Výlet



Hŕba ihličia pod oknom prestáva narastať a začína hniť. Košatá jeseň je v plnom prúde a blíži sa čas ísť na výlet, kde budeš mať šancu sa stretnúť s kamarátmi, nevidenými od dávneho času niekde na sústredení, alebo s takými, s ktorými sa ešte iba, ak sa podarí, uvidíš. Či už s nami skúsenosti máš, či nie, dobrý nápad bol pozrieť sa na rub listu obálky, tak neváhaj a príď na výlet v priebehu pomikulášskeho víkendu (7. a 8. 12.). Čas a miesto konania ešte upresníme, preto sleduj našu webovú stránku, neprehliadni, keď sa objaví nový príspevok, a v príslušné ráno tas korene a prejdi sa s nami na čerstvom vzduchu. Tiež zavolaj aj akýchkoľvek kamarátov, čo máš, na výlete je dosť miesta pre všetkých a ani, ak sme vás ešte nevideli, si z vás nebudeme strieľať – nie ste luk z vetvičiek. Možno navštívime nejaký drevený hrad.

Nadšení vedúci

2% z daní

Aj tento rok môžu vaši rodičia venovať 2% zo svojich daní verejnoprospešným organizáciám, ako sme my (niektorí dokonca až 3%).
Peniaze získané z 2% využívame na pokrytie časti nákladov spojených s aktivitami pre vás (tlač časopisov, poštovné, ceny na súťažiach, aktivity na sústredeniach...).
Chceme vás preto poprosiť, aby ste rodičom, členom svojej blízkej aj vzdialenej rodiny, susedom a pokojne aj cudzím ľuďom na ulici porozprávali o našich aktivitách a poprosili ich, aby svojou troškou podporili našu dobrovoľnícku činnosť a pomohli tým skupine mladých cieľavedomých ľudí zabezpečujúcich chod týchto úžasných seminárov, ktoré tak zbožňujete. Vysvetlite im, že takto podporia aj váš rozvoj a prispejú k zmysluplnému tráveniu vášho voľného času.
Potrebné informácie o tom, ako darovať 2%, nájdete na stránke nášho združenia `zdruzenie.strom.sk/sk/zdruzenie/2percenta/` a radi vám odpovieme na ľubovoľné otázky ohľadom našej podpory aj mailom na `info@strom.sk`.
Ďakujeme!

Vzorové riešenia 1. série úloh zimného semestra

1 opravovali **Viki Brezinová** a **Erik Novák**

najkrajšie riešenie: Alex Fabrici

123 riešení

Zadanie

Šermlok cestou k miestu činu premýšľa nad piatimi zvieratkami, ktoré by mohli byť podozrivé: andulka Adam, bobor Bob, cikáda Cyril, daniel Dano a emu Ema. Vie, že:

- Aspoň jeden z dvojice Adam a Cyril je podozrivý.
- Práve jeden z dvojice Bob a Ema je nevinný.
- V dvojici Bob a Cyril sú buď obidvaja nevinní alebo sú obidvaja podozriví.
- Práve jeden z dvojice Cyril a Dano je nevinný.
- Najviac jeden z dvojice Adam a Ema je nevinný.

Zistite, ktoré zvieratká sú podozrivé. Nájdite všetky riešenia. Je niektoré zvieratko s istotou podozrivé?

Riešenie

Z tretieho výroku vieme, že Cyril je vždy rovnaký ako Bob. Z druhého výroku vieme, že ak Bob je podozrivý, tak Ema je nevinná a naopak, teda Bob a Ema sú vždy rôzni. To isté vieme povedať zo štvrtého výroku o Cyrilovi a Danielovi.

Keď Bob a Cyril sú vždy rovnakí a Ema a Daniel sú obaja rôzni od jedného z dvojice Bob a Cyril, tak vieme, že Ema a Daniel sú tiež rovnakí a sú rôzni od dvojice Bob a Cyril. Jediné dve možnosti teda sú buď, že Bob a Cyril budú obaja podozriví a Daniel s Emou sú nevinní alebo naopak, že Bob a Cyril sú nevinní a Daniel s Emou podozriví.

Jediný, o kom nevieme v žiadnej z možností aký je, je Adam. Poďme sa teda naňho pozrieť. V prvej možnosti je Ema nevinná, teda kvôli piatemu výroku už Adam nevinný byť nemôže a tým pádom je podozrivý. V druhej možnosti je Cyril nevinný, teda kvôli prvému výroku musí Adam byť podozrivý.

Skontrolujme ešte, či v našich možnostiach sedia všetky podmienky. Prvú možnosť sme utvorili na základe výrokov $2, 3, 4$ a 5. Overme teda, či platí prvý výrok. Podozriví sú aj Adam aj Cyril, čo nie je v rozpore s prvým výrokom, teda prvá možnosť je v súlade so všetkými výrokmi. Druhú možnosť sme tvorili na základe výrokov $1, 2, 3$ a 4. Overme teda, či platí piaty výrok. Ani jeden z dvojice Adam a Ema nie je nevinný, teda nie sú v rozpore s piatym výrokom a druhá možnosť je taktiež v súlade so všetkými výrokmi v zadaní.

Našli sme jediné dve možnosti a jediné zvieratko, ktoré v oboch z nich bolo podozrivé, bol Adam. Adam teda je s istotou podozrivý.

Komentár

Tí z vás, ktorí si úlohu poriadne prečítali a správne pochopili, ju väčšinou zvládli vyriešiť dobre. Najväčším problémom bolo nepochopenie významu slov najviac a aspoň. Ďalšou častou chybou bolo, že ste si poriadne neskontrolovali, či vaše riešenie naozaj nie je v rozpore so žiadnym z výrokov. Často sa vám preto stávalo, že ste okrem správnych riešení našli aj nejaké ďalšie riešenia, ktoré ste prehlásili za správne, aj keď nevyhovovali jednému z výrokov. Dobrá rada na záver teda znie, že po vyriešení úlohy si ešte raz pozorne prečítajte zadanie, zamyslite sa, či ste na nič nezabudli a overte si, či všetky riešenia, ktoré ste našli, vyhovujú zadaniu.

2 opravovali **Mirka Horváthová** a **Peťo Kovács**

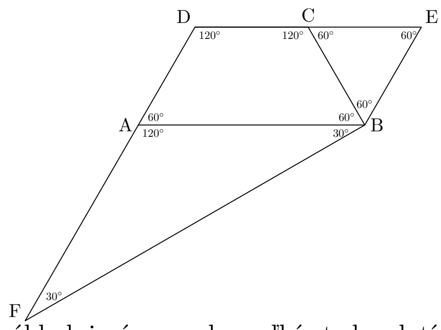
najkrajšie riešenie: Evka Krajčiová a Lucka Chladná

107 riešení

Zadanie

Šermlok si na zrnku peľu všimol jednu zaujímavú vlastnosť. Je to totiž lichobežník $ABCD$ s rovnobežnými stranami AB a CD. Platí v ňom, že $|AB| = 2|CD|$ a $|AD| = |BC|$.Predĺžením polpriamky DC vznikne bod E taký, že $|EC| = |CB| = |BE|$ a predĺžením polpriamky DA bod F taký, že $|AF| = |BA|$. Dokážte, že uhol $|FBC| = 90°$.

Riešenie



Najskôr si načrtneme lichobežník $ABCD$ a dokreslíme si body E a F podľa zadania. Zo zadania vieme, že trojuholník CBE je rovnostranný, keďže platí $|EC| = |CB| = |BE|$, a teda každý jeho uhol má $60°$. Body C, D, E ležia na jednej priamke, teda $\sphericalangle DCB$ je susedný uhol k $\sphericalangle BCE$. Vieme si teda vypočítať $|\sphericalangle DCB| = 180° - 60° = 120°$.

Pre každý rovnoramenný lichobežník platí, že je osovo súmerný a že uhly pri rovnakej základni sú rovnako veľké, teda platí: $|\sphericalangle DCB| = 120° = |\sphericalangle CDA|$. Uhly $|\sphericalangle DAB|$ a $|\sphericalangle ABC|$ sú priľahlé, takže ich súčet je $180°$. Teda $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 180° - 120° = 60°$.

Body F, A, B ležia na jednej priamke. $\sphericalangle FAB$ je teda susedný uhol k $\sphericalangle DAB$ a môžeme si ho vyjadriť ako $|\sphericalangle FAB| = 180°–60° = 120°$. Pre náš vzniknutý trojuholník FBA platí, že je rovnoramenný, pretože $|AF| = |BA|$. V rovnoramennom trojuholníku sú uhly pri základni zhodné a súčet uhlov v trojuholníku je $180°$. Vieme, že $|\sphericalangle FAB| = 120°$, teda vieme vypočítať $|\sphericalangle FBA| = |\sphericalangle AFB| = (180°–120°) : 2 = 30°$. Teraz už vieme určiť veľkosť uhla $|\sphericalangle FBC| = |\sphericalangle FBA| + |\sphericalangle ABC| = 30° + 60° = 90°$. Vieme teda, že $|\sphericalangle FBC|$ bude vždy $90°$.

Komentár
Úloha väčšine z vás nerobila problém, za čo sme radi, a tak mali mnohí z vás veľmi pekné 9-bodové riešenia. Najčastejšia chyba bola zrejme v tom, že niektorí z vás si zvolili konkrétne dĺžky, obrázok narysovali, odmerali ho uhlomerom a potom prehlásili že tento uhol má 90°, čo bolo chybné, keďže úlohu treba dokázať pre všetky prípady. Zároveň treba myslieť na to, že rysovanie nie je presné.

3 opravovali **Sara Gašparová** a **Dano Onduš**

najkrajšie riešenie: Katka Farbulová a Martin Šmilňák

73 riešení

Zadanie
Na tabuli sú napísané čísla 1,2, ...150. V každom kroku si môžeme vybrať ľubovoľné 2 z nich, zmazať ich a napísať ich súčet alebo nezáporný rozdiel. Môže na tabuli ako posledné zostať číslo 2? Ak áno, ako máme postupovať, ak nie prečo?

Riešenie
Pozrime sa na paritu jednotlivých čísel. Medzi číslami 1 až 150 sa nachádza 75 párnych a 75 nepárnych čísel. Ak nám na konci má zostať číslo 2, musíme sa zbaviť všetkých nepárnych čísel (lebo číslo 2 je párne). Máme 3 operácie, ktoré môžeme použiť:

- Sčítať alebo odčítať dve párne čísla, pričom výsledok bude párny. Týmto sa počet nepárnych čísel nezmenil.
- Sčítať alebo odčítať jedno párne a jedno nepárne číslo, pričom výsledok bude nepárny. Týmto sa počet nepárnych čísel opäť nezmenil, lebo síce jedno ubudlo, no jedno aj pribudlo.
- Sčítať alebo odčítať dve nepárne čísla, pričom výsledok bude párny. Týmto sme sa zbavili dvoch nepárnych čísel.

Vidíme, že v každom kroku sa počet nepárnych čísel buď nezmení, alebo sa zníži o dve. Keďže na začiatku je počet nepárnych čísel nepárny, tak musí byť nepárny aj na konci, lebo ich počet sa mení len o párnu hodnotu. Číslo 2 nám preto zostať ako posledné nemôže, keďže vždy tam zostane minimálne jedno nepárne číslo.

Komentár
Väčšina z vás si všimla to, že nepárnych čísel je nepárny počet a zbaviť sa ich vieme iba tak, že ich nejakým spôsobom dáme do dvojíc. Často ste však túto myšlienku dotiahli do konca a ukázali ste len to, že nejaký konkrétny postup nebude fungovať, čo nestačí. Niekoľko z vás si všimlo aj to, že ak je na začiatku súčet čísel nepárny, tak aj na konci musí byť, čo väčšinou viedlo k peknému riešeniu. Občas ste však zabudli ukázať, ako toto vaše pozorovanie súvisí s pôvodnou úlohou.

4 opravovali **Erik Berta** a **Kubo Farbula**

najkrajšie riešenie: Adela Horváthová

87 riešení

Zadanie
V kuchárskej knihe od Mateja Matemakaka sa písalo:

- najväčší spoločný deliteľ gramáže múky a gramáže cukru je 15,
- najväčší spoločný deliteľ gramáže cukru a gramáže citrónovej kôry je 6,
- súčin gramáže cukru a gramáže citrónovej kôry je 1 800,
- najmenší spoločný násobok gramáže múky a gramáže cukru je 3 150.

Aké sú gramáže múky, cukru a citrónovej kôry v recepte na citrónový koláč?

Riešenie
Na začiatok si pomenujme premenné: múka = m, cukor = c, citrónová kôra = k.
Teraz si urobíme prvočíselný rozklad čísla 1800, čo je súčin c a k. Takto dostávame: $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Keďže najväčší spoločný deliteľ c a k je 6, tak c aj k budú násobkom čísla 6.
Zároveň vieme, že c alebo k je násobkom čísla 25, pretože v prvočíselnom rozklade čísla 1800 sa číslo 5 nachádza dvakrát, a taktiež najväčší spoločný deliteľ c a k nie je násobkom čísla 5. Nakoľko najväčší spoločný deliteľ c a m je 15, c je deliteľné 5 a preto násobkom čísla 25 bude práve c. To znamená, že c je buď $2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150$ alebo $c = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$.
Vieme však aj to, že najmenší spoločný násobok m a c je 3150, a preto $c = 150$, keďže 3150 nie je deliteľné 300. Z toho dostávame, že k je 12 ($1800/150 = 12$). Teraz potrebujeme zistiť už iba hodnotu m. Začneme tým, že urobíme prvočíselný rozklad čísla 3150, čo je najmenším spoločným násobkom c a m. Dostaneme: $3150 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$. Vďaka podmienke o najväčšom spoločnom deliteli m a c vieme povedať, že m nemá v prvočíselnom rozklade číslo 2 a číslo 5 sa tam nachádza iba raz. To vieme na základe toho, že najväčší spoločný deliteľ m a c je 15, no $c = 150$ (deliteľné 25), čiže v m môže byť už iba jedna 5.
Teraz máme 3 možnosti. Tie sú:

- $m = 3^2 \cdot 5$
- $m = 3 \cdot 5 \cdot 7$
- $m = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Zostáva nám to iba skontrolovať, kedy bude najmenší spoločný násobok m a c rovný 3150. Táto situácia nastáva jedine v tretej možnosti, pretože v prvočíselnom rozklade 3150 nám ostali čísla 3^2 a 7, ktoré sa v 150 nenachádzajú. To znamená, že m je 315.

Komentár

Mnohí z vás, ktorí došli k nesprávnemu výsledku si jednoducho iba zabudli skontrolovať, či ich výsledky platia podľa všetkých podmienok (najmä druhá podmienka), čo je chyba, ktorej sa dá naozaj jednoducho predísť jednoduchou skúškou správnosti. Zároveň sa v riešeniach pomerne často objavovalo skúšanie veľkého množstva možností, čo nie je práve najefektívnejšie riešenie.

5 opravovali **Martin Masrna** a **Števo Vašak**

najkrajšie riešenie: Lukáš Jacko, Eva Krajčiová

91 riešení

Zadanie

V Starom Lese rastú len bylinky s 5 a 7 listami. Keď kanec Vavrínec zbiera suroviny na bylinný mok, tak vždy otrhne celú bylinku a položí ju do košíka. Aký je najväčší počet listov, ktoré sa mu nikdy nepodarí mať v košíku presne? Ako by to vyzeralo, keby v Starom Lese rástli aj 6-listové bylinky?

Riešenie

Všetky prirodzené čísla vieme rozdeliť podľa zvyšku po delení piatimi. Ak vieme nejaké číslo so zvyškom k po delení piatimi zapísať ako súčet $a \cdot 5 + b \cdot 7$ (poskladať z 5-listových a 7-listových byliniek), každé väčšie číslo s rovnakým zvyškom vieme takisto zapísať ako súčet $(a + x) \cdot 5 + b \cdot 7$ (pridáme daný počet 5-listových byliniek, tento počet je označený ako x). Ak sa nám teda podarí nájsť prvých 5 za sebou idúcich čísel, ktoré vieme zapísať ako súčet $5a + 7b$, potom vieme takto zapísať všetky vyššie čísla. Je to týchto 5 čísel: 24 $(2 \cdot 5 + 2 \cdot 7)$, 25 $(5 \cdot 5)$, 26 $(5 + 3 \cdot 7)$, 27 $(4 \cdot 5 + 7)$, 28 $(4 \cdot 7)$.
V košíku je teda možné mať akýkoľvek počet listov, ktorý je aspoň 24. Ešte ostáva dokázať, že 23 listov v košíku nikdy nemôže byť. Keďže máme iba 5-listové a 7-listové bylinky, z troch byliniek dostaneme maximálne $3 \cdot 7 = 21$ listov. Z piatich byliniek dostaneme najmenej $5 \cdot 5 = 25$ listov. Ak by sme teda chceli dostať 23 listov, muselo by to byť zo štyroch byliniek. Keďže sú ale 5 aj 7 nepárne čísla, zo štyroch byliniek vieme dostať iba párny počet listov. 23 listov je teda najväčší počet, ktorý v košíku nikdy nemôže byť.
Ak pridáme 6-listové bylinky, hľadáme prvých 5 za sebou idúcich čísel, ktoré vieme zapísať ako súčet $a \cdot 5 + b \cdot 6 + c \cdot 7$. Tieto čísla budú: 10 $(2 \cdot 5)$, 11 $(5 + 6)$, 12 $(5 + 7)$, 13 $(6 + 7)$, 14 $(2 \cdot 7)$.
Ostáva dokázať, že 9 listov v košíku nikdy nemôže byť. Jednou bylinkou dostaneme najviac 7 listov a dvoma bylinkami dostaneme najmenej $2 \cdot 5 = 10$ listov. Pre túto možnosť je preto najväčším nedosiahnuteľným počtom listov 9.

Komentár

Pri tejto úlohe bolo treba dokázať dve veci. Po prvé, že od istého počtu listov už v košíku môže byt ľubovoľne veľa listov. Tu niektorí z vás urobili tú chybu, že vypísali iba prvých 50 či 100 hodnôt a povedali, je vidieť, že od hodnoty 24 sa už dajú poskladať všetky ďalšie. To však nedokazuje, že to bude platiť aj pre ľubovoľné väčšie číslo. Po druhé bolo treba dokázať, že hodnota 23 sa naozaj nedá dosiahnuť. Mnohí z vás sa uspokojili iba s tým, že povedali, že ste to skúšali a nepodarilo sa to. To ale nič nedokazuje, pretože sa mohlo stať, že skutočne existuje kombinácia byliniek, ktorá dáva dokopy 23 listov, iba sa vám ju nepodarilo nájsť. Pokiaľ teda nevyskúšate ozaj všetky možnosti, tak argument "Skúšal som a nešlo to." vôbec nepomôže.

6 opravovali **Matúš Masrna** a **Maťo Števko**

najkrajšie riešenie: Lucka Chladná

93 riešení

Zadanie

Šermlokov luster má dva závity na žiarovky a svieti iba vtedy, ak v ňom sú zapojené dve funkčné žiarovky. Šermlok má v šuflíku 5 funkčných a 5 nefunkčných žiaroviek. Ako má Šermlok postupovať v skúšaní žiaroviek tak, aby musel vyskúšať čo najmenej párov žiaroviek, kým sa mu podarí luster rozsvietiť. Ukážte aj prečo to na menej nejde.

Riešenie

Poďme najprv nájsť postup, ktorý naisto funguje na 8 pokusov a následne dokázať, že sa to na menej pokusov nedá.

Počas celého postupu budeme uvažovať najhoršiu možnú možnosť, teda že sa nikdy netrafíme a nezapojíme do lustra dve funkčné žiarovky, až kým nebude stopercentná istota, že zapájané žiarovky sú obe skutočne funkčné.

Žiarovky si rozdelíme do štyroch skupín – dvoch trojíc a dvoch dvojíc žiaroviek. V prvej trojici žiaroviek vyskúšame všetky tri možnosti zapojenia, čím minieme 3 pokusy. Predpokladáme, že ani raz sa luster nerozsvieti. To znamená, že v celej skupine môže byť maximálne jedna funkčná žiarovka. To isté zopakujeme s druhou trojicou, pričom predpokladáme, že luster sa zase nerozsvieti. Minuli sme ďalšie 3 pokusy a zistili sme, že v druhej skupine môže taktiež byť maximálne jedna funkčná žiarovka. To znamená, že v zvyšných dvoch dvojiciach sú dokopy aspoň 3 funkčné žiarovky. Vyskúšame jednu z dvojíc, luster sa zase nerozsvieti, pretože predpokladáme, že sme trafili dvojicu iba s jednou funkčnou žiarovkou. Avšak druhá z dvojíc ma potom určite obe žiarovky funkčné, teda na ôsmy pokus už luster istotne vieme rozsvietiť.

Poďme sa teraz pozrieť na to, prečo sa to na 7 pokusov nedá (a teda ani na menej). Zoberme si akékoľvek skúšanie so siedmimi pokusmi. Potrebujeme ukázať, že ak budú žiarovky rozdelené medzi funkčné a nefunkčné tak ako si zvolíme, luster sa ani

raz nerozsvieti. Vieme, že jedným pokusom skúšame dve žiarovky, takže siedmimi pokusmi dokopy 14-krát vyskúšame nejakú žiarovku. Keďže žiaroviek máme iba 10, tak z Dirichletovho princípu vieme povedať, že aspoň jednu žiarovku sme vyskúšali aspoň dvakrát (avšak mohli sme aj viackrát). Zoberme si preto žiarovku, ktorú sme skúšali najviackrát a povedzme, že je nefunkčná.
V prípade, že sme ju skúšali tri alebo viackrát, tak minimálne pri troch zo všetkých siedmich skúšaní sa luster kvôli tejto žiarovke nerozsvietil. Potom máme ešte 4 nefunkčné žiarovky a 4 zvyšné pokusy. To znamená, že v každom zo zvyšných pokusov vieme určiť jednu žiarovku a povedať, že je nefunkčná. Potom sa luster ani raz zo všetkých pokusov nerozsvieti.
V druhom prípade, keď sme ju skúšali iba dvakrát, tak pri dvoch zo všetkých siedmich pokusov sa kvôli nej luster nerozsvietil. Potom nám zvýši 9 žiaroviek a 5 pokusov. Keďže v každom pokuse skúšame dve žiarovky, v týchto piatich zvyšných pokusoch vyskúšame dokopy 10-krát nejakú žiarovku. Žiaroviek už máme ale iba 9, takže opäť použitím Dirichletovho princípu vieme povedať, že nejaká ďalšia žiarovka bola skúšaná aspoň dvakrát. Povedzme, že aj táto je nefunkčná. Kvôli nej sa pri minimálne dvoch z týchto zvyšných piatich pokusov luster nerozsvieti. Zostali nám teda už len 3 pokusy a 3 nefunkčné žiarovky. Tým pádom vo všetkých troch zvyšných pokusoch vieme mať jednu nefunkčnú žiarovku. Potom sa luster zase ani raz zo všetkých siedmich pokusov nerozsvieti.
Dokázali sme, že pri akýchkoľvek siedmich pokusoch vieme vždy určiť 5 nefunkčných žiaroviek tak, aby sa luster určite ani raz z týchto pokusov nerozsvietil. Na 8 pokusov sme už ukázali, že postup existuje. To znamená, že najmenší počet pokusov, ktoré potrebujeme na stopercentne isté rozsvietenie lustra, je 8.

Komentár

Úloha bola náročná, o čom svedčí aj fakt, že máme len jedno kompletné riešenie. Vo všeobecnosti sú pri úlohách tohto typu dôležité 2 veci. Postup, ktorým nech sú žiarovky rozdelené akokoľvek, rozsvietime luster vždy a dôkaz, že neexistuje žiaden iný postup, ktorým by sme luster s určitosťou rozsvietili na menej pokusov.
S dôkazom bojujete pri každej podobnej úlohe a nakoniec toto bol aj dôvod prečo skoro nikto nemá 9 bodov. Najčastejšími chybami v dôkaze bolo to, že ste dokázali, že vaším postupom, prípadne ešte pár ďalšími sa luster na menej skúšaní nedá rozsvietiť, avšak neukázali ste, prečo to nejde akýmkoľvek skúšaním. Ak takéto niečo chcete dokázať je dobré sa od vášho postupu čo najviac odosobniť a zamyslieť sa, čo v úlohe musí platiť nech skúšate akokoľvek. Konkrétne v tejto úlohe to bol počet skúšaných žiaroviek (ten máme daný tým čo dokazujeme) a počet nefunkčných žiaroviek (podľa zadania).
Nájdenie správneho postupu (konštrukcie) sa podarilo väčšine z vás, avšak nie každý postup bol optimálny. Pre tých, ktorým sa to nepodarilo, všeobecná úvaha, na ktorú je potrebné myslieť pri hľadaní riešenia podobných úloh, je: „Ako si mám vyberať

žiarovky, aby som svoj postup pokazil?", alebo „Mám na x–tý pokus už určite 2 funkčné žiarovky? Nemôže sa mi stať, aby som namiesto jednej z nich mal nefunkčnú?"
Poslali ste nám riešenia od 1 až do 45 skúšaní. Za nesprávny postup, alebo postup na 10 a viac skúšaní ste z pravidla nedostali body, mohli ste ale dostať body za myšlienky, ktoré boli dôležité pre korektné riešenie. Body ste takisto mohli získať za správny postup na 8 aj 9 skúšaní (za ten na 9 pochopiteľne značne menej).

Autori vzorových riešení: Jakub Genči, Žaneta Semanišinová, Florián Hatala, Peter Kovács, Martin Masrna, Kristína Mišlanová, Daniel Onduš, Zuzana Ontkovičová, Roman Staňo

Zadania 2. série úloh zimného semestra

Riešenia pošlite najneskôr do **25. novembra 2019**

Úloha 1

Na papieriku bol útvar zložený z 2 štvorcov a rovnostranného trojuholníka. Dokážte, že trojuholník AXZ je rovnostranný.

Úloha 2

Piati medojedi: Ahmed, Bartolomed, Ctimed, Demeder a Elizamed sa hádali o počte džbánov medu, ktoré im ostali v zásobe z pôvodných 100. Každý medojed buď vždy klame alebo vždy hovorí pravdu. Toto sú výroky jednotlivých medojedov:

- *Ahmed: Počet džbánov medu dáva zvyšok 1 po delení 4. Hovorím pravdu.*
- *Bartolomed: Počet džbánov medu je deliteľný 7 a Demeder je klamár.*
- *Ctimed: Počet džbánov medu je deliteľný 13, Demeder a Elizamed nie sú rovnakí.*
- *Demeder: Počet džbánov medu je deliteľný 3 a Ahmed je klamár.*
- *Elizamed: Máme viac ako 40 džbánov medu, Bartolomed a Demeder sú rovnakí.*

Koľko džbánov medu majú medojedi v zásobe? Nájdite všetky možnosti.

Úloha 3

Zajda a Klára hrajú hru. Najprv Zajda položí na stôl čiernu alebo bielu figúrku. Potom Klára položí čiernu alebo bielu figúrku za tú, ktorá bola na stôl položená naposledy. Takto sa striedajú v pokladaní figúriek na stôl, pričom v rade nemôžu byť 3 rovnaké figúrky za sebou. Vyhrá tá, ktorá položí do radu deviatu bielu figúrku. Nájdite víťaznú stratégiu pre jednu z nich.

Úloha 4

Plánik hry, ktorú Zajda a Klára hrali bol pravidelný 9-uholník. Klára nakreslí na plánik takú priamku, ktorá neprechádza vrcholom plánika. Následne Zajda dokreslí do plánika všetky uhlopriečky, ktoré Klárinu priamku pretínajú. Ukážte, že počet uhlopriečok pretínajúcich Klárinu priamku je párny, bez ohľadu na to, ako ju Klára nakreslí. Čo ak by plánik bol pravidelný 2019-uholník? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Úloha 5

Majme číslo n, ktoré má všetky cifry rôzne a zároveň zoradené od najmenšej po najväčšiu. Zistite aký ciferný súčet môže mať číslo $9n$. Nájdite všetky možnosti.

Úloha 6

Podľa zasadacieho poriadku sú v sále trojuholníkového tvaru umiestnené dva štvorcové stoly ako na obrázku. Platí, že E je stredom AB a zároveň C je stredom FG. Koľkokrát je obsah trojuholníkovej sály ABJ väčší ako obsah štvorcového stola $BCDE$?

Poradie po 1. sérii zimného semestra

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
1. - 4.	Lucia Chladná	Z8	GAMČABA	9	9	9	9	9	9	0	**54**
	Katarína Farbulová	Z8	GAlejKE	9	9	9	9	9	4	0	**54**
	Milan Jozef Pokorný	Z7	GJHNHTT	9	9	9	9	9	1	0	**54**
	Eva Krajčiová	Z7	GAlejKE	9	9	9	9	9	-	0	**54**
5. - 8.	Natália Poliačiková	Z8	ZKro4KE	9	9	8	9	9	-	0	**52**
	Tomáš Kubrický	Z8	ZKro4KE	9	9	8	9	9	1	0	**52**
	Vlastimil Urda	Z8	ZBPPGPO	9	9	9	9	8	1	0	**52**
	Michal Iľkovič	Z8	GBBGPO	9	9	9	9	8	1	0	**52**
9.	Richard Vodička	Z8	GAlejKE	9	9	8	9	8	-	0	**51**
10. - 11.	Matej Kundrík	Z9	ZKro4KE	9	9	9	9	8	4	0	**48**
	Branislav Ječim	Z9	ZOKožSN	9	9	9	9	8	4	0	**48**
12.	Veronika Vodičková	Z8	GAlejKE	9	9	8	9	6	-	0	**47**
13. - 15.	Terézia Stanová	Z9	EGJAKKE	9	9	9	9	9	1	0	**46**
	Barbora Baltovičová	Z9	GAlejKE	9	9	9	9	9	1	0	**46**
	Martin Šmilňák	Z9	GAlejKE	9	9	9	9	9	1	0	**46**
16. - 19.	Dávid Kepič	Z9	GAlejKE	9	9	9	9	8	1	0	**45**
	Adela Horváthová	Z9	ZDnepKE	9	9	9	9	8	1	0	**45**
	Marek Horváth	Z8	GKonšPO	9	9	6	8	7	0	0	**45**
	Jakub Blišťan	Z9	GAlejKE	9	9	9	9	8	1	0	**45**
20. - 23.	Natália Tkáčová	Z7	ZLevoSN	9	9	-	9	7	1	0	**44**
	Alex Fabrici	Z8	ZPAngKE	9	9	9	9	-	4	0	**44**
	Lea Gašparová	Z7	GABerSC	9	9	8	-	8	1	0	**44**
	Matúš Libák	Z8	GAlejKE	9	6	7	9	7	4	0	**44**
24.	Šimon Stano	Z7	EGJAKKE	9	9	7	8	-	1	0	**43**
25. - 26.	Ľudmila Krupová	Z7	ZKro4KE	9	9	6	5	4	1	0	**42**
	Ján Mlynár	Z8	SMládPP	9	9	7	9	4	4	0	**42**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
27. - 31.	Samuel Osuský	Z9	ZDrJDMA	9	9	7	9	6	1	0	**41**
	Lukáš Jacko	Z8	ZKro4KE	9	4	7	8	9	1	0	**41**
	Martin Dudjak	Z8	SMládPP	9	9	3	8	7	4	0	**41**
	Alžbeta Klimentová	Z9	ZLNovKE	9	9	5	9	8	1	0	**41**
	Ivana Varsányiová	Z9	GBilíBA	9	9	6	9	7	1	0	**41**
32. - 34.	Matej Válek	Z7	ZKro4KE	9	9	2	5	6	0	0	**40**
	Radovan Milián	Z7	ZKro4KE	9	6	0	8	8	0	0	**40**
	Ondrej Králik	Z8	GAlejKE	9	9	3	8	8	1	0	**40**
35.	Matúš Zoričák	Z7	SMládPP	7	9	3	9	0	1	0	**38**
36. - 40.	Eduard Lehocký	Z8	ZKro4KE	9	9	3	9	4	2	0	**37**
	Eduard Fedorčuk	Z9	EGJAKKE	9	9	9	5	5	-	0	**37**
	Artur Pankuch	Z7	GAlejKE	9	9	-	9	0	1	0	**37**
	Ivan Mikluš	Z7	ZStanKE	9	9	0	7	3	0	0	**37**
	Tomáš Neupauer	Z7	ZVažePO	9	2	-	8	9	0	0	**37**
41. - 43.	Paulína Tkáčová	Z8	ZLevoSN	9	9	-	9	7	1	0	**36**
	Oskar Cacara	Z7	ZKro4KE	9	9	-	-	8	1	0	**36**
	Lukáš Hanes	Z7	ZKro4KE	9	9	-	9	0	-	0	**36**
44. - 46.	Tomáš Gaja	Z9	ZKro4KE	9	9	-	9	8	0	0	**35**
	Richelle Andrássyová	Z7	ZKro4KE	9	9	-	-	8	-	0	**35**
	Martina Ľuptáková	Z7	ZŠMRŠLC	3	9	-	9	5	-	0	**35**
47. - 50.	Pavol, Alexander Komloš	Z9	ZKro4KE	9	9	7	-	5	4	0	**34**
	Nina Pacholská	Z8	ZKro4KE	9	9	9	7	-	-	0	**34**
	Alexandra Michalíková	Z7	ZKro4KE	9	9	-	-	7	0	0	**34**
	Jakub Čaník	Z7	GAlejKE	9	5	8	0	3	0	0	**34**
51. - 55.	Peter Varga	Z8	ZKro4KE	9	8	0	6	8	1	0	**33**
	Erik Jochman	Z9	GAlejKE	9	9	5	9	-	1	0	**33**
	Viliam Karol Kubičár	Z8	ZOKožSN	5	9	-	8	7	2	0	**33**
	Patrik Barnišin	Z8	ZBPPGPO	7	9	9	-	6	1	0	**33**
	Nina Anna Betáková	Z7	ZJŠveHE	9	9	-	6	-	-	0	**33**
56.	Dušan Ivan	Z7	ZKro4KE	-	9	-	7	6	1	0	**32**
57.	Vladimír Slanina	Z8	ZKro4KE	9	9	2	9	1	1	0	**31**
58. - 62.	Matej Šoltés	Z9	GTrebKE	9	9	-	3	8	1	0	**30**
	Matúš Chovančák	Z8	ZKro4KE	9	9	2	1	8	1	0	**30**
	Bianka Gurská	Z9	GAlejKE	6	9	9	0	6	0	0	**30**
	Maxima Bednárčíková	Z8	GAlejKE	9	9	-	9	3	-	0	**30**
	Zina Babinská	Z7	ZŠMRŠLC	4	7	0	8	3	0	0	**30**
63.	Henrietta Antožy	Z8	ZKro4KE	9	9	1	6	3	-	0	**29**
64. - 66.	Ema Lola Škombárová	Z8	ZKro4KE	9	9	1	9	-	0	0	**28**
	Ján Brajerčík	Z9	ZŠmerPO	3	9	0	8	8	0	0	**28**
	Šimon Stripaj	Z7	ZKro4KE	2	1	0	8	8	1	0	**28**
67. - 68.	Matej Vojtaník	Z7	ZKro4KE	9	9	-	-	-	-	0	**27**
	Aneta Štefančínová	Z7	GJARPO	9	9	0	0	0	0	0	**27**
69.	Kalista Semancová	Z8	ZSNP1HE	9	9	0	4	4	0	0	**26**
70. - 72.	Katarína Chabová	Z7	ZLNovKE	6	8	3	-	-	0	0	**25**
	Bogdana Studenková	Z7	ZKro4KE	3	4	-	9	-	0	0	**25**
	Ester Szabariová	Z7	GAlejKE	8	-	7	-	2	-	0	**25**
73. - 77.	Boris Pasterňak	Z9	ZKro4KE	6	9	-	-	9	-	0	**24**
	Dávid Györi	Z7	ZKro4KE	3	9	3	-	-	0	0	**24**
	Šimon Kirňák	Z9	ZOKožSN	9	9	2	-	4	0	0	**24**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
	Alžbeta Kurimská	Z7	CZŠGorPO	4	9	0	0	1	1	0	**24**
	Tereza Spustová	Z8	ZK2Svit	9	5	0	8	2	0	0	**24**
78.	Katarína Adamčová	Z7	ZŠPapBJ	2	9	0	-	1	-	0	**21**
79.	Šimon Borovský	Z8	ZŠCadrBA	9	4	0	0	5	1	0	**19**
80. - 81.	Filip Olej	Z8	ZKro4KE	9	1	-	-	7	1	0	**18**
	Sabína Perignatová	Z7	ZGrunKK	-	9	-	0	-	0	0	**18**
82. - 83.	Tereza Pažinová	Z9	ZKro4KE	-	-	-	9	8	-	0	**17**
	Martin Kozár	Z8	GAlejKE	9	8	-	-	-	-	0	**17**
84. - 88.	Tereza Kostiviarová	Z9	ZTSNPBB	3	9	0	3	1	0	0	**16**
	Alica Juhásová	Z7	ZKro4KE	8	-	-	-	-	0	0	**16**
	Lenka Nováková	Z7	ZOKožSN	-	-	0	8	-	-	0	**16**
	Lev Melnychuk	Z7	ZPAngKE	-	8	-	-	-	-	0	**16**
	Roland Kaprál	Z7	ZGrunKK	-	8	-	0	-	0	0	**16**
89.	Nika Pastoráková	Z8	ZŠVajLC	2	5	-	7	1	0	0	**15**
90. - 91.	Kevin Paulička	Z7	ZSpByst	-	4	-	5	-	-	0	**14**
	Tomáš Sukeľ	Z7	ZJŠveHE	7	-	-	-	-	0	0	**14**
92.	Jakub Imrich	Z9	ZKro4KE	7	-	-	6	-	-	0	**13**
93. - 94.	Marek Nagy	Z7	ZŠMRŠLC	3	4	-	-	1	0	0	**12**
	Vladimír Sklenár	Z9	GTVanSL	3	8	0	0	0	1	0	**12**
95. - 99.	Martin Šedovič	Z8	ZKro4KE	-	9	-	-	-	1	0	**10**
	Adam Ilčík	Z7	ZKro4KE	2	0	-	-	4	0	0	**10**
	Lucia Poradová	Z8	ZK2Svit	0	9	-	1	-	-	0	**10**
	Adam Mižík	Z8	EGJAKKE	4	6	-	-	-	0	0	**10**
	Teodor Albert	Z8	ZGHaiLE	2	-	0	4	4	-	0	**10**
100. - 105.	Lenka Palušáková	Z8	ZOKožSN	9	0	0	-	0	0	0	**9**
	Filip Sabovčík	Z8	ZOKožSN	9	0	-	-	-	-	0	**9**
	Yelyzaveta Pintiiska	Z8	ZTSNPBB	1	8	0	0	0	0	0	**9**
	Tomáš Štefaňák	Z8	ZGrunKK	9	-	-	-	-	-	0	**9**
	Rastislav Mašlonka	Z8	ZGrunKK	9	-	-	-	-	-	0	**9**
	Ema Čumpelíková	Z8	ZŠVajLC	2	5	-	-	2	0	0	**9**
106. - 108.	Šimon Pribičko	Z7	ZKro4KE	4	-	-	0	-	-	0	**8**
	Lukáš Olexa	Z7	ZKomeMI	4	0	0	-	0	0	0	**8**
	Ján Vavrek	Z8	ZGHaiLE	3	-	0	5	-	-	0	**8**
109. - 111.	Zuzana Benešová	Z8	ZKro4KE	2	0	0	5	-	-	0	**7**
	Martin Kuchta	Z8	GAlejKE	7	-	-	-	-	-	0	**7**
	Dávid Javorský	Z7	ZSpByst	-	3	-	1	-	-	0	**7**
112. - 116.	Jakub Babík	Z8	ZKro4KE	1	5	-	-	-	-	0	**6**
	Miriama Kmecová	Z8	ZKro4KE	6	-	-	-	-	-	0	**6**
	Jozef Domonkoš	Z7	ZStanKE	3	-	-	-	-	-	0	**6**
	Tomáš Rybár	Z7	ZŠMRŠLC	3	0	-	-	-	0	0	**6**
	Richard Čuba	Z8	GAlejKE	3	-	-	0	3	0	0	**6**
117.	Anna Chalupeková	Z7	ZTSNPBB	1	2	-	-	0	-	0	**5**
118. - 124.	Tomáš Vysoký	Z9	ZKro4KE	-	-	-	-	4	0	0	**4**
	Daniel Miščík	Z8	ZKro4KE	1	-	-	-	3	0	0	**4**
	Hana Volšíková	Z7	ZKro4KE	2	-	-	-	-	-	0	**4**
	Tomáš Daňo	Z7	ZDruzKE	2	-	-	-	0	0	0	**4**
	Benedikt Benko	Z7	ZSpByst	-	2	-	0	-	-	0	**4**
	Noel Molitor	Z7	ZSpByst	-	2	-	0	-	-	0	**4**
	Ján Stupák	Z7	GAlejKE	2	-	-	-	-	-	0	**4**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	PS	CS
125. - 126.	Filip Fetyko	Z8	ZKro4KE	2	0	0	0	1	0	0	**3**
	Bruno Osrman	Z8	ZŠSlovPB	2	-	0	-	-	1	0	**3**
127. - 128.	Anna Mária Matyaseková	Z8	ZKro4KE	2	-	-	-	-	0	0	**2**
	Bruno Boczek	Z8	GAlejKE	1	-	-	0	1	0	0	**2**
129. - 131.	Michal Kaško	Z8	ZKro4KE	1	0	0	-	-	0	0	**1**
	Tomáš Jakubec	Z8	ZOKožSN	1	-	-	-	0	0	0	**1**
	Tomáš Vitko	Z8	ZOKožSN	1	-	-	-	0	0	0	**1**
132. - 135.	Yarden Cohen	Z8	ZKro4KE	0	-	-	-	-	0	0	**0**
	Oskar Vizi	Z7	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	0	**0**
	Samuel Maco	Z7	ZKro4KE	0	-	-	-	-	0	0	**0**
	Maximiliána Ferencová	Z8	ZOKožSN	0	0	-	-	0	-	0	**0**

Názov: *MATIK* – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • November 2019 • Zimný semester 33. ročníka
Internet: `matik.strom.sk`
E-mail: `matik@strom.sk`

Organizátor: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach,
Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice
Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM
ĽUDSKÉ ZDROJE

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk