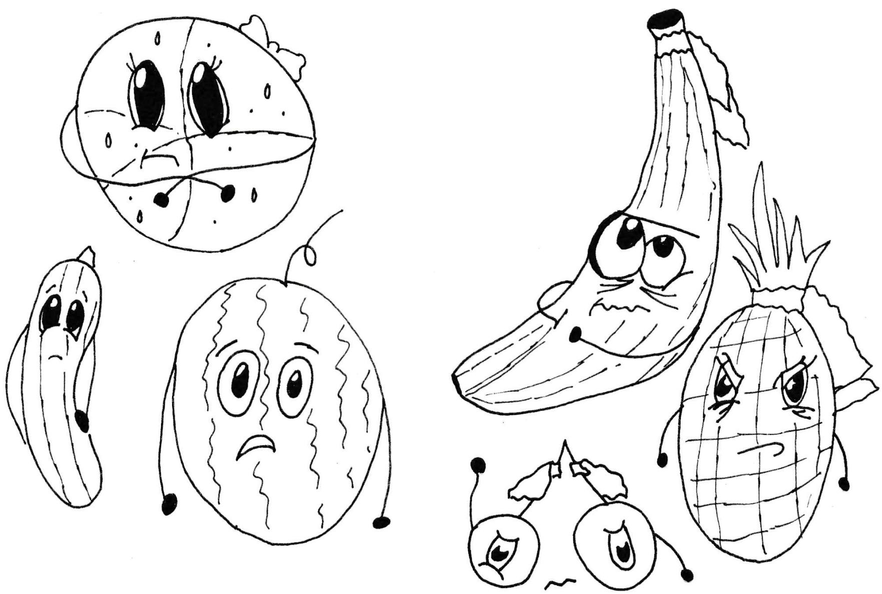
Korešpondenčný Matematický Seminár

# MATIK

Číslo 6 — Ročník 33 matik.strom.sk



# Ahojte!

Po dlhých týždňoch koronaprázdnin sa pomaly blížia ďalšie, a preto prichádza aj posledný časopis. Už sa určite tešíte, že si nebudete musieť lámať hlavu (ani iné končatiny) nad ďalšími príkladíkmi, ale môžete sa kochať výsledkovou listinou a, keď chcete, vzorovými riešeniami. Samozrejme, nezabudnite si pozrieť aj vaše opravené riešenia a milé / nemilé komentáriky od nás. Dúfame, že vás v lete uvidíme a určite riešte aj ďalšie série.

vaši milovaní vedúci MATIKa

# Ako nebude

### Sústredenie

Koncom školského roka sa na vzletnom vánku do Danišoviec znesú štyri znosené róby. Vtedy však ešte nebudú môcť porušiť, čo ich už onedlho bude všetky napájať. Bude to poslušnosť kraju, ktorý v nasledujúcej dobe začne vydávať tie najzmysluplnejšie nariadenia. Že tiecť, keď si blato z piesku? Kto to kedy počul! Róby sa však po dĺžke nebudú otáčať a spoločnými textíliami sa im podarí zlodejskému nálevníkovi pomôcť do kraja zdrhnúť, čím záporák v našich dedinách nanovo kapituluje. Ako to všetko na klinec dopadne, ostane už len v harmonikách rób, ktoré za bezmoci tuby proti mrazu druhého stupňa zmiznú do Ratna.

# Ako bude

### Sústredenie

**Letné sústredenie Matika** sa napriek všetkej nevôli počasia, premenlivej klímy a mutujúcich vírusov uskutoční. Zatiaľ vám prezradíme toľko, že **sa bude konať** na čiare (slovom cudzieho pôvodu **online**). Dá sa očakávať, že v priebehu nasledujúcich týždňov vyplávajú na povrch ďalšie pikantné podrobnosti, takže **sledujte našu webovú stránku**, aby ste ich mali ešte teplé.

### Tábor mladých matematikov

Aj toto leto môžeš stráviť týždeň plný zábavy s kamarátmi a super vedúcimi na Tábore mladých matematikov. Môžeš sa tešiť na neopakovateľný program, zábavne podanú matiku a príjemnú spoločnosť.

TMM sa bude konať 16. – 23. augusta v Penzióne pod Sitnom na Počúvadlianskom jazere a je určené pre budúcich siedmakov až budúcich druhákov na strednej škole. Kompletné informácie aj prihlasovanie nájdeš na našej stránke. Nenechávaj si prihlásenie na poslednú chvíľu, lebo počet miest je obmedzený. Tešíme sa na teba.

# *Vzorové riešenia 2. série úloh letného semestra*

## 1 opravovali **Dano Onduš** a **Sara Gašparová**

najkrajšie riešenie: Matej Kundrík

41 riešení

### *Zadanie*

Mihál nazýva kladné celé číslo mimoňským obľúbeným číslom, ak sa toto číslo po vynásobení svojím ciferným súčtom zväčší desaťkrát. Mihál hľadal mimoňské obľúbené čísla a, keď ich niekoľko našiel, všetky ich medzi sebou vynásobil a vyšlo mu 532. V spánku však zabudol, ktoré čísla našiel. Ktoré čísla to boli, ak viete, že ich bolo viac ako jedno?

### *Riešenie*

Mihál našiel prirodzené čísla, ktorých súčin bude 532, a teda tieto čísla budú delitele 532. Delitele 532 sú: 1, 2, 4, 7, 14, 19, 28, 38, 76, 133, 266, 532. Ďalej vieme, že po vynásobení ciferným súčtom sa mimoňské číslo zväčší desaťkrát, a preto bude jeho ciferný súčet 10. Z deliteľov 532 majú ciferný súčet 10 iba čísla 19, 28 a 532. Keďže čísel bolo viac ako jedno, mohli to byť len čísla 19 a 28. Nakoniec overíme, že $19 \cdot 28 = 532$, takže Mihál našiel práve tieto čísla.

### *Komentár*

Takmer úplne každému sa podarilo nájsť správne riešenie, čo nás veľmi teší. Zopár z vás však spravilo chybu pri ukazovaní, že žiadne iné riešenie neexistuje, prípadne ste na to úplne zabudli.

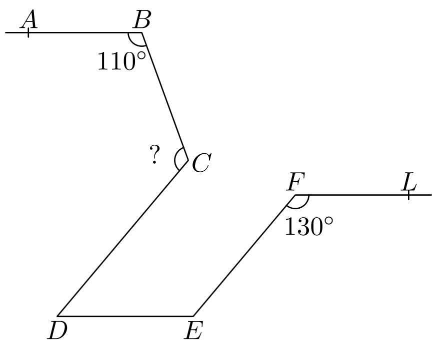
## 2 opravovali **Mimi Hanus** a **Erik Novák**

najkrajšie riešenie: Henrietta Antožy

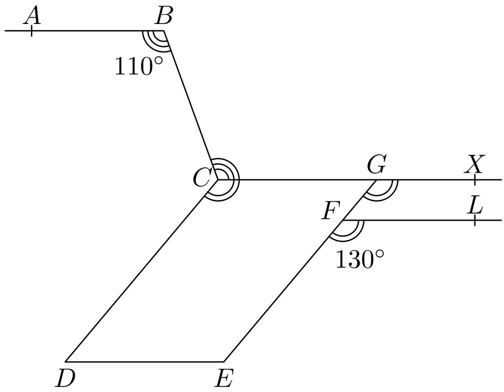
39 riešení

### *Zadanie*

Body $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $L$ sú ako na obrázku. Veľkosť uhla $ABC$ je 110 stupňov a veľkosť uhla $EFL$ je 130 stupňov. Priamka $AB$ je rovnobežná s priamkami $FL$ a $DE$ a zároveň je priamka $CD$ rovnobežná s priamkou $FE$. Aká je veľkosť uhla $BCD$?



### ***Riešenie***




Vytvorme si priamku prechádzajúcu cez bod $C$ rovnobežnú s priamkou $DE$ a prienik tejto priamky s priamkou $EF$ nazvime $G$. Aby sme vedeli uhly jednoducho pomenovať, vytvoríme si ešte bod $X$ na priamke $CG$ tak, aby $|CX| > |CG|$.
Veľkosť uhla $BCD$ spočítame ako $360° - |\sphericalangle DCG| - |\sphericalangle BCG|$. Uhol $DCG$ je súhlasný s uhlom $EGX$ a ten je zase súhlasný s uhlom $EFL$, ktorého veľkosť je 130°. Uhol $DCG$ má teda tiež veľkosť 130°. Uhol $BCG$ je striedavý s uhlom $ABC$ veľkým 110°, čiže je rovnako veľký.
Keďže už vieme veľkosti $DCG$ a $BCG$, vieme dopočítať aj veľkosť $BCD$.

$$|\sphericalangle BCD| = 360 - |\sphericalangle DCG| - |\sphericalangle BCG| = 360° - 130° - 110° = 120°$$

### ***Komentár***

Takmer úplne všetci riešitelia, ktorí sa do úlohy pustili, ju zvládli vyriešiť na deväť bodov. Týmto z vás prajeme, aby ste takéto úspechy žali pri ďalšom počítaní čo najčastejšie. A veríme, že ostatní sa niečo naučili a nabudúce to dotiahnu na rovnakú deviatku. :)

## 3 opravovali **Robo Sabovčík** a **Mirka Horváthová**

najkrajšie riešenia: Evička Krajčiová

34 riešení

### ***Zadanie***

Na stole sa nachádza 20 pokrových žetónov. Špenát Šrac a Chlieb Cézar hrajú hru, v ktorej sa striedajú v ťahoch a Šrac začína. Jeden ťah je odhodenie nejakého počtu žetónov. Odhodiť môžu toľko žetónov, koľko si vyberú, ale stále musia odhodiť aspoň jeden a nikdy nemôžu odhodiť naraz viac ako polovicu žetónov, ktoré budú zostávať na stole. Prehráva jedlo, ktoré už nevie spraviť korektný ťah. Je možné, aby jedno jedlo donútilo to druhé stále prehrať? Ak áno, ako?

## *Riešenie*

Označme si v úlohe pojmom prehrávajúca pozícia takú, v ktorej buď prehráme (teda nevieme spraviť povolený ťah), alebo ľubovoľným ťahom spôsobíme, že súper bude vo vyhrávajúcej pozícii. Pojmom vyhrávajúca pozícia takú, v ktorej vieme spraviť taký ťah, že súper bude v prehrávajúcej pozícii (ak sa z prehrávajúcej pozície nevie ďalej pohnúť, tak prehral úplne).

Pozrime sa na túto úlohu od konca. Ak sa na stole nachádza už iba 1 žetón, vieme, že ten hráč, ktorému zostal, prehrá, pretože vždy musíme zobrať aspoň 1 žetón, ale nikdy nie viac ako polovicu, čo je 1/2 žetóna, a to je spor. 1 žetón je tým pádom prehrávajúca pozícia (úplne posledná).

Pred 1 žetónom sa na stole museli nachádzať práve 2 žetóny (ak by ich tam bolo viac, tak by sme sa na 1 nevedeli dostať, lebo by sme ich museli zobrať viac ako polovicu), z ktorých vieme zobrať práve 1 žetón. 2 žetóny sú vyhrávajúcou pozíciou.

Ak by sa na stole nachádzali 3 žetóny, tak by sa musel potiahnuť 1, čím by sme sa dostali na 2 žetóny. To je vyhrávajúca pozícia, preto sú 3 žetóny prehrávajúca pozícia.

Zo 4 – 6 žetónov sa vždy vieme dostať späť na 3 žetóny, čiže tieto počty sú vyhrávajúce pozície.

Ďalej sa pozrieme na 7 žetónov. Zo 7 žetónov vieme vždy potiahnuť len taký počet (1 až 3), aby sme sa dostali do vyhrávajúcej pozície. Tento počet je pozíciou prehrávajúcou.

Na 7 žetónov sa vieme dostať, ak bolo predtým na stole minimálne 8 žetónov $(7+1)$, no maximálne 14 žetónov $(7 \cdot 2)$. Keďže pozícia 7 žetónov bola prehrávajúca, pozície 8 – 14 žetónov musia byť opäť vyhrávajúce.

Aby sme sa určite dostali na 8 – 14 žetónov, tak pred týmto ťahom ich muselo na stole byť práve 15 (z 15 vieme potiahnuť 1 až 7 žetónov a dostať sa na 8 – 14). Aj počet 15 žetónov patrí medzi prehrávajúce pozície.

Pred 15 žetónmi sa na stole mohlo nachádzať najmenej 16 žetónov $(15+1)$ a najviac 20, nakoľko to je toľko žetónov, s koľkými sme začínali. Odtiaľ 16 – 20 žetónov sú vyhrávajúce pozície.

Ak potom začíname na 20 žetónoch, vieme vždy vyhrať, a to tak, že najprv si zoberieme 5 žetónov a bez ohľadu na protihráča uberáme ďalej na počty 7, 3, 1, kde už druhý hráč nespraví ťah, lebo nemá ako. Špenát Šrac má výhodu prvého hráča (začína vo vyhrávajúcej pozícii a súpera vie vždy dostať do prehrávajúcej) a vie vždy donútiť Cézara prehrať.

## *Komentár*

Sme veľmi radi, že väčšina z vás úlohu veľmi dobre zvládla a teda sme mali množstvo 9 bodových riešení. Veľa z chýb spočívalo v tom, že ste si zadanie zle prečítali a predpokladali ste, že ten, ktorý zoberie posledný žetón, vyhráva. Okrem tejto však bolo chýb minimum.

4 opravovali **Lujza Milotová** a **Janči Richnavský**
najkrajšie riešenie: Tomáš Kubrický

37 riešení

## *Zadanie*

Rúčka mala tvar rovnostranného trojuholníka $ABC$, kde na strane $BC$ leží bod $F$. Obsah trojuholníka $ABF$ je trikrát väčší ako obsah trojuholníka $ACF$ a rozdiel obvodov týchto dvoch trojuholníkov je 5. Určte dĺžku strany trojuholníka $ABC$.

## *Riešenie*

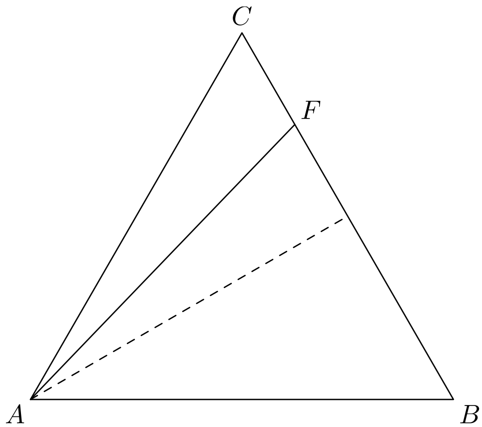
Všimnime si, že aj trojuholník $ABF$, aj trojuholník $ACF$ majú rovnakú výšku (výšku na stranu $BC$ v trojuholníku $ABC$). Obsah trojuholníka sa počíta ako $a \cdot v/2$, kde $a$ je strana trojuholníka a $v$ je výška na túto stranu. Obsah $ABF$ je trikrát väčší ako obsah $ACF$, a keďže sa ich výšky nelíšia, ich obsahy budú zo vzorca závisieť len od základní týchto trojuholníkov, teda $BF$ v trojuholníku $ABF$ a $CF$ v trojuholníku $ACF$. Obsah $ABF$ je trojnásobne väčší, nuž aj strana $BF$ bude trojnásobne väčšia ako $CF$, čo vieme vyjadriť aj takto:

$$\begin{aligned} S_{ABF} &= 3 \cdot S_{ACF} \\ \frac{|BF| \cdot v}{2} &= 3 \cdot \frac{|CF| \cdot v}{2} \\ |BF| &= 3 \cdot |CF| \end{aligned}$$

Obvod trojuholníka $ABF$ je $|AB| + |BF| + |FA|$ a obvod trojuholníka $ACF$ je $|AC|+|CF|+|FA|$. Vidíme, že stranu $FA$ majú tieto trojuholníky spoločnú, čiže jej dĺžka je v oboch rovnaká. Trojuholník $ABC$ je rovnostranný, $|AB| = |AC|$. Obvody sa teda budú líšiť len v stranách $BF$ a $CF$. $BF$ je trikrát dlhšia ako $CF$ a práve rozdiel týchto dvoch strán musí byť 5, pretože jeden z obvodov má byť o 5 dlhší. Keďže je $BF$ je dlhšia ako $CF$, tak $CF$ bude o 5 kratšia ako $BF$. Po dosadení do predchádzajúcej rovnice dostávame, že

$$\begin{aligned} |CF| + 5 &= 3 \cdot |CF|, \\ 5 &= 2 \cdot |CF|, \\ |CF| &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

No a keďže $|BF| = 3 \cdot |CF|$, tak vlastne bude $|BC| = 4 \cdot |CF|$, čiže $|BC| = 4 \cdot 2,5 = 10$. Dĺžka strany trojuholníka $ABC$ tak musí byť 10.




***Komentár***

Veľmi veľké množstvo riešiteľov vo svojom riešení hneď od začiatku tvrdilo, že obvod $ABF$ je o 5 väčší ako obvod $ACF$, čo sa v zadaní však nepísalo, dostali sme len informáciu, že jeden z obvodov je o 5 väčší ako druhý. Dôvodov mohlo byť niekoľko (táto informácia sa dala veľmi intuitívne získať a považovať za zrejmú alebo sa dalo predpokladať, že rozdiel v obvodoch je v takom poradí, v akom sú uvedené trojuholníky v zadaní za sebou). Takéto „domnievanie sa“ je však chybné, pretože potom riešenie nemusí byť kompletné. Pri takomto domnievaní sa vôbec neuvažujeme nad možnosťou, že by obvod $ACF$ mohol byť o 5 väčší, pričom, ak by to tak náhodou mohlo byť, mohli by sme dostať nejakú úplne inú možnosť dĺžky strany trojuholníka. V podobných úlohách tak veľmi ľahko vieme prísť o polovicu správneho riešenia, čo koniec koncov nemôže byť kompletné. Keďže dôvodov takéhoto uvažovania mohlo byť niekoľko a táto úvaha je celkom viditeľná, rozhodli sme sa za takéto určenie nesťahovať body. Avšak najlepšie je sa takému určeniu vyhnúť (ako napríklad v našom riešení, z ktorého je jasné, že len jeden obvod môže byť dlhší ako druhý) alebo rátať s každou možnosťou.

Našlo sa aj niekoľko riešiteľov, ktorí prehlásili, že obvod $ABF$ je o 5 väčší ako obvod $ACF$, pretože „čím väčší obsah, tým väčší obvod“. To však pri trojuholníkoch naozaj neplatí, a sme si istí, že sami veľmi rýchlo nájdete príklady dvoch trojuholníkov, ktorými toto tvrdenie vyvrátite. ;)

Potom bolo niekoľko riešiteľov, ktorí nám nevysvetlili, prečo musí byť $BF$ trikrát dlhšie ako $CF$ – v riešení nebola ani len zmienka o tom, že tieto trojuholníky majú rovnakú výšku. Bolo však veľmi dôležité tento fakt vysvetliť, keďže je to jeden z pilierov správneho riešenia. Takéto riešenia samozrejme nemohli byť ohodnotené plným počtom bodov.

Všeobecne však úloha, ako vidíte vo výsledkovej listine, dopadla dobre, lebo bola relatívne jednoduchá.

# 5 opravovali **Martin Masrna** a **Matúš Masrna**

najkrajšie riešenia: Tesi Stanová, Edo Fedorčuk

24 riešení

## *Zadanie*

Na obvode hypnotického kruhu je vyznačených šesťdesiat bodov, z ktorých tridsať je zafarbených načerveno, dvadsať je zafarbených namodro a desať je zafarbených nazeleno. Tieto body rozdeľujú kružnicu na šesťdesiat oblúkov. Každému z týchto oblúkov je pridelené číslo podľa farieb jeho koncových bodov: oblúku medzi červeným a zeleným bodmi je priradené číslo 1, oblúku medzi červeným a modrým bodmi je pridelené číslo 2 a oblúku medzi modrým a zeleným bodmi je priradené číslo 3. Oblúk medzi dvoma bodmi rovnakej farby je označený číslom 0. Aký je najväčší možný súčet všetkých čísel priradených oblúkom?

## *Riešenie*

Každý oblúk vieme vyjadriť farbami jeho krajných bodov. Počty oblúkov ČZ, ČM, MZ, ČČ, MM, ZZ na obvode kruhu si označme postupne $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$.
Poďme si teraz ku každej farbe bodov vyjadriť, v koľkých oblúkoch na obvode sa nachádzajú. Treba si uvedomiť, že ak máme oblúk ohraničený bodmi tej istej farby, zarátame ho dvakrát (pre každý z tých bodov raz). Červené body sa teda nachádzajú v $a + b + 2d$ oblúkoch, modré v $b + c + 2e$ oblúkoch a zelené body v $a + c + 2f$ oblúkoch.
Každý bod je súčasťou práve dvoch oblúkov, jedného v smere hodinových ručičiek od neho a druhého proti smeru hodinových ručičiek. Červené body budú teda súčasťou $2 \cdot 30 = 60$ oblúkov, modré body budú súčasťou $2 \cdot 20 = 40$ oblúkov a zelené body budú súčasťou $2 \cdot 10 = 20$ oblúkov.
Počty oblúkov, v ktorých sa nachádzajú body jednotlivých farieb, sme si teda vyjadrili dvomi spôsobmi. Vieme teda zostrojiť rovnice:

$$a + b + 2d = 60$$
$$b + c + 2e = 40$$
$$a + c + 2f = 20$$

Teraz si poďme zapísať súčet hodnôt, ktoré majú všetky oblúky na obvode. Oblúk ČZ má hodnotu 1, oblúk ČM má hodnotu 2, oblúk MZ má hodnotu 3 a oblúky ČČ, MM a ZZ majú hodnoty 0. Teda celkový súčet (označme ho $x$) vieme zapísať ako

$$x = a + 2b + 3c + 0(d + e + f) = a + 2b + 3c.$$

Chceme zistiť, čomu sa toto rovná. Preto sa vrátime k trom vyššie uvedeným rovniciam na vyjadrenie počtu oblúkov, ktorých je daná farba súčasťou. Z druhej rovnice si môžeme vyjadriť $b$ a z tretej rovnice si môžeme vyjadriť $a$. Dostaneme:

$$b = 40 - c - 2e,$$

$$a = 20 - c - 2f.$$

Toto teraz dosadíme do rovnice pre $x$.

$$x = 20 - c - 2e + 2(40 - c - 2f) + 3c$$
$$x = 20 - c - 2e + 80 - 2c - 4f + 3c$$
$$x = 100 - 2e - 4f$$

Tento súčet chceme maximalizovať. Keďže $e$ a $f$ vyjadrujú počty oblúkov MM a ZZ, tak sú to nezáporné celé čísla, preto ten výraz bude mať maximálnu hodnotu vtedy, keď $e$ a $f$ budú rovné 0. Vtedy $x = 100 - 2e - 4f = 100 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 100$. Maximálny súčet, aký teoreticky vieme dostať, je teda 100, a to vtedy, keď nebudeme mať žiadne oblúky MM a ZZ, takže žiadne dva modré alebo dva zelené body nebudú vedľa seba. Treba nám však ešte ukázať, že takéto rozmiestnenie bodov naozaj existuje. Napríklad, keď do kruhu desaťkrát za sebou zopakujeme postupnosť bodov ČČČMZM. Alebo keď každý druhý bod dáme červený a medzi ne hocijako modré a zelené. V každom z týchto dvoch príkladov použijeme 30 červených, 20 modrých a 10 zelených bodov, nikde nebudeme mať dva zelené ani dva modré vedľa seba a súčet bude naozaj 100.

### *Iné riešenie*

Na tejto úlohe sa dá pekne vidieť, že niekedy nám iný pohľad dokáže riešenie niekoľkonásobne zjednodušiť. V tomto prípade bude zmena uhla pohľadu spočívať v tom, že namiesto sledovania, koľko bodov nám dá ktorá dvojica bodov, sa pozrieme na to, koľko bodov nám dá ktorý konkrétny bod.

Môžeme si všimnúť, že pokiaľ sú susedné body rôzne, tak červený bod má v každej dvojici hodnotu 0, modrý 2 a zelený 1 (ak si aj toto nevšimneme hneď, dá sa na to prísť vyjadrením z troch rovníc v zadaní $\check{c} + z = 1$, $\check{c} + m = 2$ a $m + z = 3$).

Jediný problém nastane, ak mám vedľa seba dva modré alebo dva zelené body – vtedy totiž stratia hodnotu. Našťastie počty bodov sú také, že tomuto vieme zabrániť – napríklad tak, že každý druhý bod bude červený.

Pozrime sa teda, koľko bodov vieme dosiahnuť – máme 20 modrých bodov, každý z nich je v dvoch oblúkoch a v každom z nich má hodnotu dva body. Teda za modré body máme $20 \cdot 2 \cdot 2 = 80$ bodov. Zelených máme 10, každý z nich je v dvoch oblúkoch a má hodnotu dva body, teda dokopy $10 \cdot 2 \cdot 1 = 20$ bodov. To je dokopy 100 bodov $(80 + 20 = 100)$.

### *Komentár*

K správnemu výsledku ste sa dopracovali takmer všetci. Horšie to bolo s dokazovaním, že viac bodov skutočne nejde získať. To je vždy dôležitá časť riešenia všetkých úloh, ale mnohí z vás si ani neuvedomili, že ju treba urobiť. Pri dôkaze nestačí povedať {modro-zelený oblúk dáva najviac bodov, čiže tých chceme mať čo najviac, lebo potom to určite bude najlepšie rozloženie}. Dôvod je jednoduchý – takýto prvoplánový prístup vôbec nemusí viesť k správnemu riešeniu. Čo ak by za MZ oblúk bolo 5 bodov a za ČM aj ČZ oblúk po 3 body? Oplatí sa aj v tom prípade urobiť čo najviac MZ oblúkov, pretože je za ne najviac bodov? (Hint: Odpoveď nie je áno.)

## 6

opravovali **Timka Szöllősová** a **Michal Masrna**
najkrajšie riešenie: Lucka Chladná

32 riešení

### *Zadanie*

Strelec cvičil streľbu na pizzu. V strede pizze bolo koliesko klobásy a zvyšok pizze bol pokrytý syrom. Strelec vystrelil dvadsaťkrát. Keď sa trafil do klobásy, získal 30 bodov, keď sa trafil do časti, kde je syr, získal 18 bodov, a ak trafil okraj pizze, získal 6 bodov. Mohlo sa stať aj to, že sa ani do pizze netrafil, a potom nezískal žiaden bod. Na svojom celkovom skóre si všimol, že jeho priemerný bodový zisk za trafenie sa do pizze je 17 bodov (strely mimo pizze do priemeru nepočítal). Koľko najviac mohol streliť bodov?

### *Riešenie*

Najskôr sa zamyslime nad tým, čo je to priemerné skóre. Je to počet bodov, ktoré strelec získal, predelený počtom striel, ktorými trafil pizzu. To znamená, že celkový počet bodov je súčin počtu zásahov pizze a priemerného skóre. Čiže ak chceme vedieť maximálny počet bodov, pričom priemerné skóre máme fixné, tak chceme vedieť maximálny počet zásahov pizze.

$$\textit{počet bodov} = \textit{počet zásahov} \cdot 17$$

Všimnime si, že počet bodov za trafenie pizze je vždy deliteľný šiestimi. Odtiaľ aj súčet strelcových bodov (ľavá strana rovnice) bude deliteľný šiestimi. Keď sa pozrieme na druhú stranu rovnice, musí byť aj tá deliteľná šiestimi. 17 je prvočíslo, takže jediná ďalšia vec na tejto strane, počet zásahov, musí byť deliteľná šiestimi. Strelec sa tým pádom trafil 18, 12 alebo 6 ráz.

Pozrime sa teraz na to, čo sa stane, ak rovnicu predelíme 6. Počty bodov, ktoré strelec získa v jednotlivých zásahoch, sa zmenšia na šestinu – ľavá strana bude súčtom niekoľkých čísel 5, 3 a 1 (namiesto pôvodných 30, 18 a 6). Všetky tieto nové hodnoty sú nepárne čísla a ukázali sme si, že ich počet (čo je počet zásahov) je párne číslo. Súčet dvoch nepárnych čísel je párny, a teda aj súčet ľubovoľného párneho počtu nepárnych čísel bude stále párny. Preto ľavá strana je aj po predelení šiestimi párne číslo.

Na pravej strane po predelení šiestimi dostaneme súčin 17 a jedného z čísel 3, 2 a 1 (z pôvodných 18, 12 a 6). Súčin dvoch nepárnych čísel je vždy nepárny. Jediný prípad, keď je po predelení šiestimi aj pravá strana párne číslo, je, pokiaľ strelec zasiahol pizzu dvanásťkrát.

Zatiaľ sme sa dopracovali k tomu, že jediný (a najväčší) počet bodov, ktorý mohol strelec dosiahnuť, je $12 \cdot 17 = 204$. Dôležité je však ukázať, že strelec sa k tomuto počtu bodov naozaj mohol dopracovať – čo je skutočne pravda, lebo možno jedenásťkrát trafil syr a raz trafil okraj.

### *Komentár*

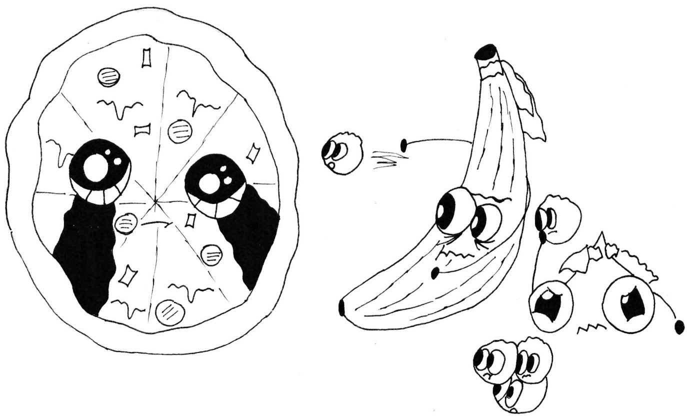
Väčšina z vás správne odhalila prvú deliteľnosť – to, že počet striel musí byť deliteľný šiestimi. Druhá časť – ukázať, prečo sa nedá poskladať $18 \cdot 17 = 306$ – už bola náročnejšia. Často ste sa pokúšali na jednom príklade ukázať, že sa to nedá dosiahnuť, avšak dostatočný dôkaz si vyžaduje v takomto postupe vypísať naozaj všetky možnosti. Na záver nás ešte teší, že ste poväčšine nezabúdali na konštrukciu (ako mohol strelec získať požadovaný počet bodov), keďže tá je veľmi dôležitou súčasťou riešenia a treba na ňu myslieť. :)

**Autori vzorových riešení:** Viktória Brezinová, Jakub Genči, Martin Masrna, Martin Mihálik, Kristína Mišlanová, Daniel Onduš, Žaneta Semanišinová, Martin Števko

## *Konečné poradie letného semestra 33. ročníka*

| Poradie | Meno a priezvisko | Ročník | Škola | PS | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | CS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Lucia Chladná | Z8 | GAMČABA | 54 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | **108** |
| 2. | Milan Jozef Pokorný | Z7 | GJHNHTT | 50 | 9 | 9 | 9 | 9 | 3 | 9 | **104** |
| 3. - 6. | Barbora Baltovičová | Z9 | GAlejKE | 52 | 9 | 9 | 9 | 9 | 6 | 9 | **103** |
| | Ondrej Králik | Z8 | GAlejKE | 49 | 9 | 9 | 9 | 9 | 3 | 9 | **103** |
| | Veronika Vodičková | Z8 | GAlejKE | 49 | 9 | 9 | 9 | 9 | - | 9 | **103** |
| | Eva Krajčiová | Z7 | GAlejKE | 49 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | **103** |
| 7. | Richard Vodička | Z8 | GAlejKE | 47 | 9 | 9 | 9 | 9 | - | 9 | **101** |
| 8. | Ivana Varsányiová | Z9 | GBilíBA | 49 | 9 | 9 | 9 | 9 | 5 | 9 | **99** |
| 9. | Henrietta Antožy | Z8 | ZKro4KE | 44 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 1 | **98** |
| 10. | Samuel Osusky | Z9 | ZDrJDMA | 52 | 9 | 9 | 7 | 9 | 1 | 9 | **96** |
| 11. | Alžbeta Klimentová | Z9 | ZLNovKE | 45 | 9 | 9 | 9 | 9 | 3 | 9 | **93** |
| 12. | Branislav Ječim | Z9 | ZOKožSN | 50 | 9 | 9 | 9 | 9 | 2 | 4 | **92** |
| 13. | Terézia Stanová | Z9 | EGJAKKE | 37 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | **91** |
| 14. | Vladimír Slanina | Z8 | ZKro4KE | 40 | 9 | 9 | 7 | 9 | - | 9 | **90** |
| 15. - 16. | Tomáš Kubrický | Z8 | ZKro4KE | 35 | 9 | 9 | 9 | 9 | - | 9 | **89** |
| | Katarína Farbulová | Z8 | GAlejKE | 37 | 9 | 9 | 9 | 8 | 5 | 9 | **89** |
| 17. - 18. | Bianka Gurská | Z9 | GAlejKE | 44 | 6 | 9 | 9 | 9 | 2 | 9 | **88** |
| | Natália Tkáčová | Z7 | ZLevoSN | 45 | 9 | 9 | 9 | 6 | 1 | 1 | **88** |
| 19. | Dávid Kepič | Z9 | GAlejKE | 36 | 8 | 9 | 9 | 9 | 4 | 9 | **84** |
| 20. - 21. | Martin Šmilňák | Z9 | GAlejKE | 49 | 6 | 9 | 9 | 9 | - | - | **82** |
| | Adela Horváthová | Z9 | ZDnepKE | 45 | 8 | 9 | 9 | 6 | - | 5 | **82** |
| 22. | Lukáš Jacko | Z8 | ZKro4KE | 40 | 9 | 9 | 9 | 6 | 1 | 4 | **81** |
| 23. | Eduard Fedorčuk | Z9 | EGJAKKE | 35 | 7 | 9 | 9 | 9 | 9 | - | **78** |
| 24. | Paulína Tkáčová | Z8 | ZLevoSN | 38 | 8 | 9 | 9 | 9 | 1 | 1 | **75** |
| 25. | Radovan Milián | Z7 | ZKro4KE | 31 | 6 | 9 | 9 | 6 | 2 | 4 | **74** |
| 26. | Kalista Semancová | Z8 | ZSNP1HE | 41 | 9 | 8 | 3 | 6 | 1 | 3 | **73** |
| 27. | Martin Dudjak | Z8 | SMládPP | 28 | 9 | 9 | 9 | 9 | 0 | 4 | **72** |
| 28. - 29. | Ľudmila Krupová | Z7 | ZKro4KE | 32 | 6 | 9 | - | 9 | 2 | 4 | **71** |
| | Jakub Čaník | Z7 | GAlejKE | 26 | 9 | 9 | 9 | 9 | - | - | **71** |
| 30. | Ondrej Tóth | Z6 | GVaršZA | 31 | 9 | 9 | 7 | - | - | 4 | **69** |
| 31. - 33. | Ján Brajerčík | Z9 | ZŠmerPO | 30 | 9 | 9 | 0 | 9 | 1 | 5 | **63** |
| | Erik Jochman | Z9 | GAlejKE | 34 | 9 | 9 | 0 | 6 | - | 5 | **63** |
| | Šimon Stano | Z7 | EGJAKKE | 17 | 9 | 9 | 9 | 9 | 1 | - | **63** |
| 34. | Katarína Adamčová | Z7 | ZPapiBJ | 23 | 9 | 9 | - | 3 | - | - | **53** |
| 35. | Marek Horváth | Z8 | GKonšPO | 18 | 9 | 9 | - | 6 | - | 8 | **50** |
| 36. | Tomáš Daňo | Z7 | ZDružKE | 22 | 6 | 9 | - | 3 | - | - | **49** |
| 37. | Artur Pankuch | Z7 | GAlejKE | 46 | - | - | - | - | - | - | **46** |
| 38. | Matej Kundrík | Z9 | ZKro4KE | 21 | 9 | - | 9 | - | - | - | **39** |
| 39. | Lea Gašparová | Z7 | GABerSC | 38 | - | - | - | - | - | - | **38** |
| 40. | Viliam Karol Kubičár | Z8 | ZOKožSN | 14 | 6 | 9 | - | 6 | - | - | **35** |
| 41. - 42. | Oskar Cacara | Z7 | ZKro4KE | 31 | - | - | - | - | - | - | **31** |
| | Matúš Libák | Z8 | GAlejKE | 31 | - | - | - | - | - | - | **31** |
| 43. | Matej Válek | Z7 | ZKro4KE | 26 | - | - | - | - | - | - | **26** |
| 44. | Vladimír Sklenár | Z9 | GTVanSL | 13 | 7 | - | - | - | - | 5 | **25** |
| 45. | Tomáš Hazucha | Z8 | GMMH9LM | 23 | - | - | - | - | - | - | **23** |
| 46. | Tomáš Gaja | Z9 | ZKro4KE | 15 | 7 | - | - | - | - | - | **22** |
| 47. | Dušan Ivan | Z7 | ZKro4KE | 18 | - | - | - | - | - | - | **18** |

| Poradie | Meno a priezvisko | Ročník | Škola | PS | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | CS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 48. - 50. | Ema Lola Škombárová | Z8 | ZKro4KE | 17 | - | - | - | - | - | - | **17** |
| | Šimon Borovský | Z8 | ZCádrBA | 17 | - | - | - | - | - | - | **17** |
| | Michal Kaško | Z8 | ZKro4KE | 15 | 0 | 2 | 0 | - | - | 0 | **17** |
| 51. | Maximiliána Ferencová | Z8 | ZOKožSN | 1 | - | 9 | - | 4 | - | - | **14** |
| 52. | Dávid Györi | Z7 | ZKro4KE | 12 | - | - | - | - | - | - | **12** |
| 53. | Bogdana Studenková | Z7 | ZKro4KE | 11 | - | - | - | - | - | - | **11** |
| 54. - 55. | Filip Fetyko | Z8 | ZKro4KE | 8 | - | - | - | - | - | - | **8** |
| | Natália Poliačiková | Z8 | ZKro4KE | 8 | - | - | - | - | - | - | **8** |
| 56. | Šimon Stripaj | Z7 | ZKro4KE | 4 | - | - | - | - | - | - | **4** |
| 57. | Matej Vojtaník | Z8 | ZKro4KE | 3 | - | - | - | - | - | - | **3** |
| 58. | Richelle Andrássyová | Z7 | ZKro4KE | 0 | - | - | - | - | - | - | **0** |



**Názov:** *MATIK* – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 6 • Máj 2020 • Letný semester 33. ročníka

**Internet:** matik.strom.sk
**E-mail:** matik@strom.sk

**Organizátor:** Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach,
Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice
Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

*Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.*

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM
ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk