Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo 2 — Ročník 34 matik.strom.sk

Ahoj!

Tvojmu pohľadu zjavne neuniklo ďalšie vydanie MATIKa, v ktorom nájdeš nielen poradie po prvej sérii tohto semestra, ale aj naše vzorové riešenia. Nezabúdaj však, že sme ešte len v polčase, tak určite nepoľavuj a pusti sa do druhej série. S radosťou očakávame Tvoje ďalšie riešenia!

vedúci MATIKa

Vzorové riešenia 1. série úloh zimného semestra

1 opravovali: **Kubo Farbula** a **Ľubo Vargovčík**

najkrajšie riešenie: Martin Dudjak

89 riešení

Zadanie

V Kamirlande vznikol nový tím FírKe. Na tréningu si hráči nahrávajú disk. O FírKe je známe, že na jednom tréningu nehodia disk menej ako 77-krát ani viac ako 88-krát. Tiež platí, že na každom tréningu je počet diskov, ktoré hráči chytia, dvakrát väčší ako počet diskov, ktoré hráči nechytia.

- Koľko najmenej diskov môžu hráči chytiť za tréning?
- Môže tím mať 55 tréningov, počas ktorých nechytili 1600 diskov?

Riešenie

Označme si počet nechytených diskov za tréning x. Zo zadania vieme, že chytených je dvakrát viac, čiže $2x$. Počet hodených diskov získame súčtom chytených a nechytených ako $2x + x = 3x$. Počet hodených diskov musí byť číslo deliteľné tri, keďže ho vieme zapísať ako $3x$. V rozmedzí 77 až 88 sú len štyri čísla deliteľné 3: $78, 81, 84$ a 87.

Teraz chceme nájsť najmenší počet chytených diskov. Logicky začneme najmenším počtom hodených, teda 78. Ak ho vydelíme tromi, dostaneme 26, čo je počet nechytených diskov. Počet chytených bude dvakrát väčší, čiže 52, čo je najmenší možný počet chytených diskov za tréning.

V druhej časti je naším cieľom zistiť, či mohli nechytiť 1600 diskov za 55 tréningov – nájdime najväčší možný počet nechytených diskov a porovnajme ho s číslom 1600. Hľadáme najväčší počet nechytených, tak si vyberieme najväčší počet hodených diskov, čiže 87. Pretože chceme počet nechytených diskov za 55 tréningov, číslo 87 vydelíme tromi a výsledok vynásobíme 55. Dostaneme číslo 1595. To je menej ako 1600, ale zároveň je to maximálny počet nechytených diskov, takže nemohli nechytiť 1600 diskov za 55 tréningov.

Komentár

Mnohí ste si neuvedomili, že počet hodov musí byť deliteľný tromi, a často sa stávalo, že aj keď ste si to uvedomili, tak ste to nedostatočne vysvetlili. Ďalšou častou chybou bolo, že ste počítali s desatinnými číslami a zaokrúhľovali. To je ale chyba, pretože maximálny počet hodov za tréning je 29 a vám vyšlo 29,0909. Ak ste to vynásobili 55, tak ste síce dostali 1600, ale znamená to, že na niekoľkých tréningoch museli hodiť viac ako 29 diskov, čo je v rozpore so zadaním.

2 opravovali: **Paťo Paľovčík** a **Karin Eštoková**

najkrajšie riešenia: Evka Krajčiová, Rišo Prikler

78 riešení

Zadanie

Frisbeesti hrajú turnaj vo futbale. Zúčastnili sa tímy Plasto-Kus, FírKe, UpSky a OverLeft a každý tím hral s každým. Za výhru si tím pripíše 3 body, za remízu 1 bod a porazený tím nedostane žiadny bod. Poradie sa určilo podľa počtu bodov, v prípade rovnosti bodov rozhoduje vzájomný zápas. V prípade, že zápas skončil remízou, skončil lepšie tím, ktorý dostal menej gólov za celý turnaj. Určte, ako dopadol zápas medzi Plasto-Kusom a FírKe, ak tabuľka na konci turnaja vyzerala takto:

poradie	názov tímu	skóre	body
1.	Plasto-Kus	7 : 3	5
2.	FírKe	4 : 4	4
3.	UpSky	1 : 1	4
4.	OverLeft	1 : 5	3

Riešenie

Pozrime sa najprv na to, ktorý tím má na základe výsledkov tabuľky aký počet výhier, prehier a remíz.

- Plasto-Kus má 5 bodov. Nemohol vyhrať dvakrát, lebo za 2 výhry je spolu 6 bodov, ale musel vyhrať aspoň raz, lebo za 3 remízy sú len 3 body. Vyhral teda práve raz a zo zvyšných 2 zápasov získal 2 body, čo sa dá docieliť len dvomi remízami.

- FírKe a UpSky majú oba po 4 body. Taktiež museli vyhrať práve raz, lebo majú viac ako 3 body, ale menej ako 6 bodov. Zo zvyšných dvoch zápasov však získali len jeden bod, čiže raz remizovali a raz prehrali.

- OverLeft má 3 body. To sa dá získať 1 výhrou a 2 prehrami alebo 3 remízami. Keby trikrát remizovali, museli by rovnaký počet gólov dať ako dostať. Vidíme však v tabuľke, že ich skóre je 1 : 5, čiže museli raz vyhrať a dvakrát prehrať.

Pozrime sa na tím Plasto-Kus. Vieme, že museli vyhrať proti tímu OverLeft, lebo OverLeft nemá žiadne remízy a Plasto-Kus nemá žiadne prehry. Okrem tejto výhry v dvoch zápasoch remizovali, a to so zvyšnými dvoma tímami, čiže s FírKe a UpSky. UpSky má celkové skóre 1 : 1 a vieme, že raz vyhrali, raz remizovali a raz prehrali. V zápase, ktorý vyhrali, museli dať jeden gól a v zápase, ktorý prehrali, museli jeden gól dostať. S Plasto-Kusom teda remizovali 0 : 0.
OverLeft dal za celý turnaj len jeden gól. Vieme, že jeden zápas vyhrali, takže museli streliť gól práve v tomto zápase. Pri prehre s Plasto-Kusom nestrelili žiaden

gól, a keďže Plasto-Kus má skóre $7 : 3$ a vyhral len jeden zápas, musel ho vyhrať o $7 - 3 = 4$ góly $4 : 0$.
Vieme už o Plasto-Kuse, že remizoval $0 : 0$ s UpSky a vyhral $4 : 0$ nad OverLeftom. V poslednom zápase potom musel 3 góly dať aj 3 góly dostať, čo sedí, pretože sme na začiatku zistili, že zápas PlastoKus – FírKe skončil remízou. Zápas medzi nimi teda skončil $3 : 3$.
Môžeme si overiť, ako dopadli ostatné zápasy, či môže byť platná tabuľka so skóre. FírKe muselo vyhrať nad UpSky, lebo je vyššie v tabuľke a dostalo viac gólov za turnaj, čiže sa muselo uplatniť pravidlo vzájomného zápasu. UpSky dostal len jeden gól za turnaj, nuž FírKe muselo vyhrať $1 : 0$. UpSky má jednu výhru a vyhralo tým pádom nad posledných zostávajúcim tímom, OverLeftom. Keďže UpSky strelil len jeden gól za turnaj, musel vyhrať $1 : 0$. Posledný zápas ostáva OverLeft – FírKe, OverLeft má zatiaľ skóre $0 : 5$ a FírKe $4 : 3$, takže musel vyhrať OverLeft $1 : 0$, aby sedeli skóre aj body podľa tabuľky.
Všetky skóre sú takto správne a zápas PlastoKus – FírKe skutočne skončil $3 : 3$.

Komentár

Takmer všetci ste sa dopracovali k správnemu výsledku. Viacerí ste však napísali len samotnú tabuľku s výsledkami bez postupu, ako ste sa k nej dopracovali. Objavili sa aj riešenia, kde ste vôbec neriešili skóre, iba, či daný zápas dopadol výhrou, prehrou alebo remízou. Tí, čo rozoberali podrobne výsledky, mali väčšinou deväťbodové riešenia. Menšie chybičky boli len, že ste nerozobrali, prečo nemohol OverLeft trikrát remizovať, ak získal 3 body (na základe skóre alebo počtov výhier a prehier) a niektorí sa odrážali od toho, že UpSky vyhral nad FírKe, čo vás v tejto úlohe dostalo stále k správnemu výsledku, ale vo všeobecnosti to protirečilo zadaniu a pri iných skóre by mohol vzniknúť aj iný výsledok.

3

opravovali: **Sara Gašparová** a **Jano Richnavský**
najkrajšie riešenie: Tomáš Kubrický

81 riešení

Zadanie

Tréner pripravil pre hráčov na rozcvičku kruhový plánik, ktorý má 12 stanovísk označených kuželkami očíslovanými od 1 po 12. Tréner zakričí číslo 1 a hráči sa vtedy postavia na stanovisko s číslom 1. Postupne tréner kričí nasledujúce prirodzené čísla a pri každom čísle sa hráči posunú o jedno stanovisko v kruhu (z dvanásteho idú naspäť na prvé, ale čísla sa ďalej zvyšujú). Vždy, keď je aktuálne zakričané číslo prvočíslo, tak kuželku označujúcu stanovisko vymenia za farebný disk (na stanovisku označenom farebným diskom už nič nemenia). Budú niekedy vymenené všetky kuželky za farebné disky? Ak áno, vysvetlite, ako sa to stane. Ak nie, tak ukážte, ktoré kuželky sa im podarí vymeniť za disk a prečo sa im nepodarí vymeniť tie zvyšné.

Riešenie

Hneď v prvom kole vymenia kuželky na tých pozíciách, ktoré sú označené prvočíslami – stanoviská 2, 3, 5, 7 a 11. V ďalšom kole na stanovisku 1 bude zakričané číslo 13, čo je tiež prvočíslo, a teda aj na tomto stanovisku kuželku vymenia. Teraz si uvedomme, že každé ďalšie kolo bude na každom stanovisku zakričané číslo o 12 väčšie ako v predchádzajúcom kole. Ostali nám zatiaľ nezamenené stanoviská 4, 6, 8, 9, 10 a 12. Všimnime si, že nech ku ktorémukoľvek párnemu číslu pripočítame 12, dostaneme párne číslo. To bude platiť pre akýkoľvek počet pripočítaných dvanástok, pretože súčet dvoch párnych čísel je vždy párny. Vidíme, že na párnych pozíciach nikdy nebude prvočíslo, keďže tam budeme mať vždy párne číslo, čo je číslo deliteľné dvomi (jediným prvočíslom deliteľným dvomi je 2 a to už sme vyriešili). Ostáva už len stanovisko 9. Číslo 9 je deliteľné tromi. V ďalších kolách budeme pripočítavať vždy niekoľkokrát 12, no 12 je tiež deliteľné tromi. To znamená, že aj tento súčet bude vždy deliteľný tromi a nikdy nebude prvočíslom (jedine 3 je prvočíslo deliteľné trojkou, ale to už sme mali). Ukázali sme, že kuželky zameníme na pozíciách 1, 2, 3, 5, 7 a 11, a ukázali sme, že ostatné nikdy zamenené nebudú.

Komentár

Mnoho riešiteľov malo problém nám ukázať, že bez ohľadu na to, aké kolo bude, budú na párnych pozíciách vždy párne čísla – toto sa snažili tvrdiť preto, lebo vyskúšali niekoľko prvých kôl a videli, že sa tam iné ako párne čísla nevyskytovali. V riešení však potrebujeme, aby ste dôsledne vysvetlili, prečo to tak bude fungovať pri každom z kôl, ktoré môžu nastať. Rovnako bolo problémové aj dokazovanie toho, že na mieste stanoviska 9 bude vždy číslo deliteľné tromi. Okrem toho sa však drvivej väčšine riešiteľov podarilo nájsť správne riešenie, aj keď nie nutne úplne vysvetlené.

4

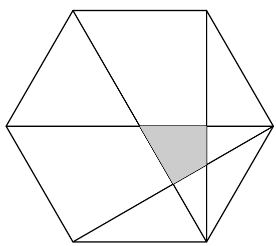
opravovali: **Erik Novák** a **Klára Hricová**

najkrajšie riešenia: Vlado Slanina a Katarína Ostertágová

82 riešení

Zadanie

Na obrázku máme ihrisko tvorené pravidelným šesťuholníkom s nasledovne vyznačenými uhlopriečkami. Vieme, že jeho vyfarbená časť má obsah $1\,\mathrm{cm}^2$. Aký obsah má celý šesťuholník?

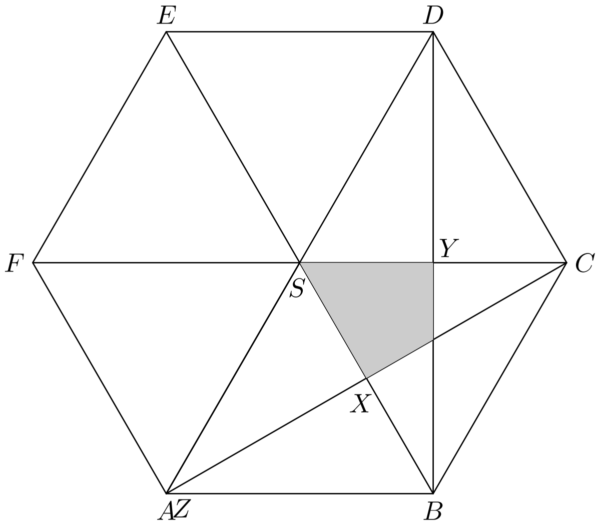


Riešenie

Pomenujme daný šesťuholník $ABCDEF$ a priesečník uhlopriečok spájajúcich protiľahlé vrcholy S tak, aby vyznačená plocha ležala v trojuholníku BCS.

Uhlopriečky AD, BE a CF sa stretávajú v bode S, rozdeľujú tým šesťuholník na šesť trojuholníkov ABS, BCS, CDS, DES, EFS a FAS. Tieto trojuholníky majú zhodné po dve ramená o veľkosti polovice uhlopriečky šesťuholníka a zhodné tretie strany zhodné so stranami šesťuholníka, a teda sú všetky zhodné. Keďže okolo bodu S majú uhly súčet 360 stupňov a v každom trojuholníku sa pri bode S nachádza uhol oproti strane šesťuholníka, budú tieto uhly rovnakej veľkosti $360 : 6 = 60$ stupňov. Tieto trojuholníky sú určite rovnoramenné s vnútorným uhlom o veľkosti 60 stupňov. Potom pri základni musia mať oba uhly veľkosť $(180 - 120) : 2 = 60$ stupňov. Týchto 6 trojuholníkov je rovnostranných.

Z rovnostrannosti a zhodnosti týchto trojuholníkov vieme, že strany AB, BC, CS aj AS sú rovnako dlhé, takže štvoruholník $ABCS$ je kosoštvorec. AC a BS sú uhlopriečky kosoštvorca, a preto sú na seba kolmé a rozpoľujú sa.



Nazvime X priesečník AC a BS. CX je kolmé na BS a zároveň X je v polovici BS, teda CX je ťažnicou a zároveň výškou trojuholníka BCS na stranu BS.

Keď priesečník SC a BD pomenujeme Y, môžeme analogicky zistiť, že vďaka tomu, že $BCDS$ je kosoštvorec, BY je ťažnicou a zároveň výškou v trojuholníku BCS na stranu CS. Nech Z je stred strany BC.

Zostrojme tretiu ťažnicu a zároveň výšku trojuholníka BCS, úsečku SZ. Ťažnice sa v každom trojuholníku pretínajú v ťažisku, deliacom ich v pomere $2 : 1$, a v rovnostrannom trojuholníku navyše platí, že jeho ťažnice sú rovnako dlhé. Vyznačením všetkých troch ťažníc trojuholník rozdelíme na šesť pravouhlých trojuholníkov

so stranami o dĺžkach tretiny výšky rovnostranného trojuholníka, dvoch tretín výšky rovnostranného trojuholníka a polovice jeho strany. Všetky tieto pravouhlé trojuholníky sú zhodné.
Vyznačený útvar pokrýva dva takéto trojuholníky, jeden má obsah $1/2 = 0{,}5\,\mathrm{cm}^2$. Týchto pravouhlých trojuholníkov je v jednom trojuholníku tvorenom stranou a stredom šesťuholníka šesť a trojuholníkov tvorených stranou a stredom šesťuholníka je v šesťuholníku taktiež šesť. Obsah celého šesťuholníka je teda $0,5 \cdot 6 \cdot 6 = 18\,\mathrm{cm}^2$.

Komentár

S geometriou ste sa mnohí popasovali statočne. Našlo sa veľa kreatívnych a dobre spracovaných riešení. Väčšine z vás však robilo problém dokázať, prečo sú útvary zhodné a majú zhodný obsah – to bolo z obrázka zrejmé a rýchlo ste na to prišli. Vystačili ste si so zdaním a úplne ste zabudli na to, čo platí o rovnostranných trojuholníkoch, o jeho ťažniciach a výškach, ako sa počíta obsah. Sme presvedčení, že to dobre poznáte a nabudúce sa o to s nami nezabudnete podeliť.

5 opravovali: **Martin Masrna** a **Matúš Masrna**

najkrajšie riešenia: Veronika Vodičková, Martina Osuská

47 riešení

Zadanie

Máme 7 pravých a 7 falošných diskov, ktoré sú o trochu ľahšie. Máme aj robota, ktorý funguje ako rovnoramenné váhy. Ak mu dáme do dvoch rúk rovnako vážiace disky (alebo skupiny diskov), tak nám to povie. Ak disky (alebo skupiny diskov) v jeho rukách majú rôzne hmotnosti, tak nám povie, v ktorej ruke je ťažší disk (alebo skupina diskov) a zároveň si jeden náhodný disk z ťažšej skupiny vezme ako odmenu. My vyhráme, ak sa nám podarí identifikovať s istotou aspoň jeden pravý disk, ktorý si robot nevzal ako odmenu (nezáleží na tom, o koľko pravých diskov pri tom prídeme). Vieme vyhrať? Ak áno, napíšte ako, ak nie, vysvetlite prečo.

Riešenie

Začneme tým, že budeme porovnávať dva disky tak, že do jednej ruky dáme jeden a do druhej ruky druhý. Ak je jeden disk ťažší ako druhý, robot si ho zoberie, ale o tom ľahšom už vieme, že je falošný. Tento falošný si odložíme bokom a skúšame dvojice ďalej, až kým týmto spôsobom nenájdeme a neodložíme bokom 5 falošných diskov. To znamená, že robot nám v procese zobral 5 pravých diskov. Ostalo nám teda 5 diskov, o ktorých vieme, že sú falošné, a 4 disky, o ktorých vieme, že 2 z nich sú pravé a 2 falošné, ale nie, ktoré sú ktoré.
Túto štvoricu diskov teraz odvážime tak, že do každej robotovej ruky dáme 2. Teraz máme dve možnosti.
Možno jedna strana preváži druhú, čo znamená, že na tej ťažšej museli byť oba disky

pravé a na tej ľahšej oba falošné. Z tých dvoch pravých si zobral iba jeden, takže vďaka tomu druhému sme vyhrali.
Druhá možnosť je, že strany budú v rovnováhe. Vtedy vieme, že na každej strane bol jeden pravý disk a jeden falošný, ale nevieme, ktorý je ktorý. Preto zoberieme náhodne jeden disk a vymeníme ho za taký, o ktorom už vieme, že je falošný. Ak sú strany opäť v rovnováhe, znamená to, že sme vymenili falošný za falošný, takže ten druhý disk z pôvodnej dvojice je pravý. Ak po tejto výmene danú dvojicu už preváži tá druhá, znamená to, že sme vymenili pravý disk za falošný, a teda ten disk, ktorý sme vymenili, je pravý.
Týmto spôsobom vieme vždy určiť aspoň jeden pravý disk, ktorý nám robot nezobral.

Komentár

Väčšina z vás si správne uvedomila, že sa vieme postupne zbavovať jedného pravého a jedného falošného disku. Mnohí ste si ale neuvedomili, že aj informácia o tom, že nejaký disk je falošný, sa dá využiť. Vyskytli sa aj riešenia, ktoré boli „takmer správne“. To znamená, že ste pri riešení zabudli na jednu alebo dve možnosti. Bohužiaľ vás to stálo viac ako jeden či dva body, keďže pri úlohách tohto typu je naozaj kľúčové myslieť na všetko.

6

opravovali: **Dano Onduš** a **Lujza Milotová**
najkrajšie riešenia: Janka Urbánová, Katka Farbulová

52 riešení

Zadanie

Na frisbee kempe bolo niekoľko hráčov a každý z nich nadiktoval trénerom čísla svojich dresov. Každý dres má na sebe nepárne číslo. Trénerka vynásobila všetky dresové čísla dohromady, odčítala od súčinu jednotku a zapísala si polovicu výsledného čísla. Tréner nevie násobiť veľa čísel, a tak radšej od každého dresového čísla odčítal jednotku a potom ho vydelil dvomi. Dostal tak nový zoznam čísel, v ktorom všetky čísla sčítal a zapísal si výsledok. Ukážte, že čísla, ktoré si tréner a trénerka zapísali, majú rovnakú paritu.

Riešenie

Vieme, že všetky čísla na dresoch sú nepárne. Každé nepárne číslo vieme vo všeobecnosti zapísať ako $2k + 1$. Totiž keď ľubovoľné celé číslo k vynásobíme dvomi, tak dostaneme párne číslo. Keď následne k tomuto párnemu číslu pripočítame 1, tak dostaneme nepárne číslo. Čísla na dresoch potom môžeme označiť $2a_1 + 1$, $2a_2 + 1$ a tak ďalej až po $2a_n + 1$.
Trénerka si zapísala číslo $((2a_1 + 1) \cdot (2a_2 + 1) \cdot (2a_3 + 1) \cdot \dots \cdot (2a_n + 1) - 1)/2$.
Pre lepšiu predstavu o úprave tohto čísla si ukážeme, čo sa bude diať, ak budú hráči dvaja alebo traja.

$n = 2$:

$$\frac{(2a_1+1)\cdot(2a_2+1)-1}{2} = \frac{(2\cdot 2\cdot a_1a_2 + 2\cdot(a_1+a_2)+1)-1}{2}$$
$$= \frac{2\cdot 2a_1a_2 + 2\cdot(a_1+a_2)}{2}$$
$$= 2\cdot a_1a_2 + (a_1+a_2)$$

$n = 3$:

$$\frac{(2a_1+1)\cdot(2a_2+1)\cdot(2a_3+1)-1}{2} =$$
$$\frac{(2\cdot 2\cdot 2\cdot a_1a_2a_3 + 2\cdot 2\cdot(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1) + 2(a_1+a_2+a_3)+1)-1}{2} =$$
$$2\cdot 2\cdot a_1a_2a_3 + 2\cdot(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1) + (a_1+a_2+a_3)$$

Pre všeobecné n násobíme n zátvoriek každú s každou. Keďže každá zátvorka je súčet dvoch čísel, násobíme n dvojíc čísel, a teda dokopy dostaneme súčet 2^n čísel. Ak zo všetkých zátvoriek vyberieme jednotky a vynásobíme ich, dostaneme číslo 1. Potom máme n čísel takých, kde z jednej zátvorky vyberieme $2a_i$ a násobíme ho s jednotkami z ostatných zátvoriek. Tie nám dokopy dajú $2\cdot(a_1+\cdots+a_n)$. Pre všetky ostatné čísla sme vybrali aspoň dvakrát $2a_i$, takže každé z nich bude deliteľné štyrmi. Ich súčet je preto tiež deliteľný štyrmi, označme ho $4s$. Číslo, ktoré si zapísala trénerka, preto je $(4s+2\cdot(a_1+\cdots+a_n)+1-1)/2 = 2s+(a_1+\cdots+a_n)$. Vidíme, že $2s$ je vždy párne, takže trénerkino číslo má rovnakú paritu ako $a_1+\cdots+a_n$. Tréner si zapísal číslo $((2a_1+1)-1)/2+((2a_2+1)-1)/2+\cdots+((2a_n+1)-1)/2$, čo vieme upraviť na $a_1+\cdots+a_n$. Vyššie sme však už dokázali, že toto číslo má rovnakú paritu ako číslo trénerky, úloha je vyriešená.

Iné riešenie

Nepárne číslo má po delení štyrmi zvyšok 1 alebo 3. V prvom prípade ho vieme zapísať v tvare $4k+1$ a vidíme, že ak od neho odčítame jednotku a vydelíme rozdiel dvoma, dostaneme $2k$, čo je vždy párne. V druhom prípade má tvar $4k+3$, čo po odčítaní jednotky a vydelení dvoma dáva $2k+1$, čo je vždy nepárne.

Vidíme, že v trénerovom prípade nám čísla so zvyškom 1 paritu súčtu nemenia, lebo pridávajú párnu hodnotu. Naopak, čísla so zvyškom 3 pridávajú nepárnu hodnotu. Ak ich máme párny počet, hodnota celého súčtu bude párna, ak nepárny, nepárna. Ostáva ukázať, že to tak bude aj v trénerkinom prípade.

Pozrime sa na súčin všetkých čísel. Zaujíma nás jeho zvyšok po delení štyrmi. Ak vynásobíme dve čísla so zvyškom 1, tak dostaneme číslo so zvyškom 1, lebo $(4k+1)\cdot(4l+1) = 16kl+4k+4l+1$ a všetko okrem jednotky na konci je deliteľné štyrmi. Pre zvyšky 1 a 3 máme $(4k+1)\cdot(4l+3) = 16kl+12k+4l+3$ a z rovnakého dôvodu dostávame zvyšok 3. Nakoniec pre zvyšky 3 a 3 máme $(4k+3)\cdot(4l+3) = 16kl+12k+12l+9$, ale 9 má zvyšok 1 po delení štyrmi, takže sme dostali zvyšok 1.

Násobenie číslami so zvyškom 1 zvyšok nemení, nuž zvyšok súčinu od ich počtu nezávisí. Pozrime sa na tie so zvyškom 3. Ak je ich počet párny, tak ich môžeme zoskupiť do dvojíc a následne vynásobiť, čím dostaneme pre každú dvojicu zvyšok 1. Preto aj celkový súčin má zvyšok 1. Ako sme však ukázali na začiatku, po odčítaní jednotky a vydelení dvoma bude toto číslo párne. V opačnom prípade môžeme zoskupiť všetky čísla so zvyškom 3 okrem jedného, ktoré nám zostane. Celý súčin bez neho bude mať zvyšok po delení štyrmi 1, takže po vynásobení číslom so zvyškom 3 dostaneme číslo so zvyškom 3. To bude po odčítaní jednotky a vydelení dvoma nepárne.

Ukázali sme, že ak je počet čísel v tvare $4k + 3$ párny, tak tréner aj trénerka dostali párne číslo a v opačnom prípade nepárne, čím je dôkaz dokončený.

Komentár

Potešilo nás veľa rôznych pekných riešení, často ste však vo vašich riešeniach robili chybu v tvrdení, že každé párne číslo je po vydelení dvoma tiež párne. To však neplatí pre párne čísla, ktoré nie sú deliteľné štyrmi, napríklad $10 : 2 = 5$ a 5 nie je párne číslo. Okrem toho si väčšina z vás myslela, že dokázať úlohu znamená ukázať, že to platí pre nejaké konkrétne čísla. Pri dokazovaní úlohy však musíte ukázať, že to platí pre všetky čísla. Nestačilo si teda zvoliť nejaké tri či štyri nepárne čísla a vypočítať z nich trénerovo aj trénerkino číslo a povedať, že majú rovnakú paritu, a prehlásiť, že to platí pre všetky čísla.

Autori vzorových riešení: Erik Berta, Viktória Brezinová, Martin Albert Gbúr, Matej Hanus, Patrik Paľovčík, Róbert Sabovčík, Timea Szöllősová

Zadania 2. série úloh zimného semestra

Riešenia pošlite najnekôr do **23. novembra 2020**

Úloha 1

Po vytrvalom trénovaní počas leta si chcel tréner svojich hráčov odvážiť, aby zistil, aký pokrok urobili. Stálo pred ním 11 hráčov, o ktorých vedel, že schudli nasledovne:

- *všetci hráči schudli dokopy o* 40 kg,
- *hráči na párnych pozíciách schudli dokopy o* 16,5 kg,
- *hráči na pozíciách deliteľných 3 schudli dokopy o* 12,5 kg,
- *súčet hmotností, o ktoré schudli dvaja krajní a traja prostrední hráči, je dokopy* 19 kg.

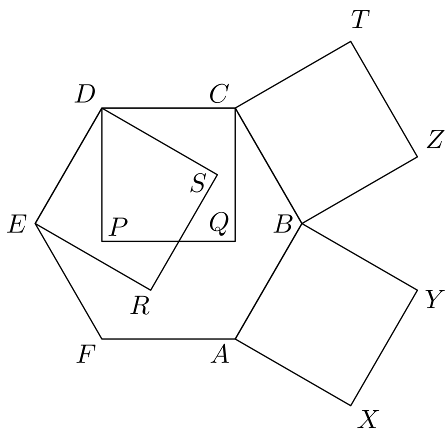
Zabudol však, o koľko schudol stredný (šiesty) hráč. Koľko to je?

Úloha 2

Na turnaj prišlo 35 hráčov vrátane teba. Medzi niektorými z vás už existujú vzájomné priateľstvá a zároveň každý hráč má aspoň 17 kamarátov. Skamarátiť sa s nejakým hráčom je možné iba vtedy, ak sa s ním kamaráti už niektorý z tvojich doterajších kamarátov. Ukáž, že sa vieš skamarátiť so všetkými hráčmi.

Úloha 3

Na obrázku je nakreslený návrh nových kraťasov. Tie sú tvorené pravidelným šesťuholníkom $ABCDEF$ a dvoma štvorcami $BAXY$ a $CBZT$. Na kraťasoch sú dva vzory $CDPQ$ a $DERS$, ktoré sú tiež štvorce. Ukážte, že $|PS| = |YZ|$.



Úloha 4
Na frisbee campe sú pravdovravci a klamári. Všetci pravdovravci hovoria vždy pravdu a všetci klamári vždy klamú. Niektorí pravdovravci sa rozhodli hrať HotBox, podobne niektorí klamári začali hrať discgolf. Ľudia na campe sa združili do rôznych tímov, pričom hráč môže patriť do viacerých tímov. Tímy, ktoré vznikli na frisbee campe, spĺňajú nasledujúce 4 podmienky:

- *Všetci pravdovravci, ktorí hrajú HotBox, tvoria tím.*
- *Všetci klamári, ktorí hrajú discgolf, tvoria tím.*
- *Pre každý tím T platí, že tí hráči, ktorí nie sú v tíme T, tvoria tiež tím.*
- *Ku každému tímu T existuje aspoň jeden hráč, ktorý o sebe prehlasuje, že je členom tímu T (jeho tvrdenie nemusí byť pravdivé, môže to byť klamár).*

Ukážte, že na turnaji je aspoň jeden pravdovravec, ktorý nehrá HotBox, a aspoň jeden klamár, ktorý nehrá discgolf. Zistite, či všetci pravdovravci tvoria jeden tím, a toto svoje zdôvodnenie vysvetlite.

Úloha 5
Nedávno si si zmenil číslo svojho dresu. Toto číslo n má po delení 3 zvyšok 2. Ukáž, že potom existuje prvočíslo p, ktoré delí n a tiež má po delení 3 zvyšok 2.

Úloha 6
Po dlhom dni plnom zápasov sa Marco rozhodol, že si zahrá hru. Nakreslil si rovnostranný trojuholník, ktorý rozdelil na 9 menších trojuholníkov. V každom malom trojuholníku je napísané číslo 0. Hra spočíva v tom, že Marco si v každom ťahu vyberie 2 trojuholníky, ktoré majú spoločnú stranu, a pričíta rovnaké celé číslo k obom číslam, ktoré sú v trojuholníkoch napísané, alebo ho od nich odčíta. Po nejakom čase si uvedomí, že čísla napísané na 9 trojuholníkoch sú v nejakom poradí n, $n+1$ a tak ďalej až po $n+8$, kde n je nezáporné celé číslo. Ukážte, že hodnota n môže byť len 0 alebo 2 (nemusíte ukazovať, že to pre tieto hodnoty môže nastať).

Poradie po 1. sérii zimného semestra

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1. - 7.	Lucia Chladná	Z9	GAMČABA	9	9	9	9	9	9	54
	Richard Prikler	Z7	GJARMPO	9	9	9	9	9	-	54
	Milan Jozef Pokorný	Z8	GJHNHTT	8	9	9	9	9	9	54
	Ondrej Králik	Z9	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	54
	Eva Krajčiová	Z8	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	54
	Lev Melnychuk	Z8	ZKro4KE	9	9	9	9	0	9	54
	Katarína Ostertágová	Z8	CENADA	9	9	9	9	9	9	54
8. - 10.	Martina Osuska	Z7	ZDrJDMA	9	9	9	8	9	3	53
	Michal Vodička	Z7	GAlejKE	8	9	9	9	9	-	53
	Vlastimil Marek Urda	Z9	ZBPPGPO	9	9	9	9	9	8	53
11. - 12.	Michal Iľkovič	Z9	GSMTŠPO	8	8	9	9	9	9	52
	Richard Vodička	Z9	GAlejKE	9	9	9	7	9	9	52
13.	Janka Urbánová	Z7	GAlejKE	9	6	9	9	-	9	51
14. - 15.	Tomáš Kubrický	Z9	ZKro4KE	9	9	9	9	3	9	48
	Veronika Vodičková	Z9	GAlejKE	9	8	9	5	9	8	48
16. - 17.	Patrik Barnišin	Z9	ZBPPGPO	5	9	9	5	9	9	46
	Martin Franek	Z8	GSF	9	9	9	9	0	5	46
18. - 20.	Katarína Farbulová	Z9	GAlejKE	9	9	9	9	-	9	45
	Vladimír Slanina	Z9	ZKro4KE	9	9	9	9	9	0	45
	Lea Gašparová	Z8	GABerSC	9	9	9	8	-	5	45
21.	Emma Stajančová	Z7	ZŠsMŠPNV	9	9	8	8	-	0	43
22.	Kalista Semancová	Z9	ZSNP1HE	9	9	9	8	0	5	40
23.	Soňa Grofčíková	Z7	ZLNovKE	8	8	9	5	-	-	39
24. - 26.	Oliver Seman	Z8	GAlejKE	9	8	9	9	-	1	37
	Matúš Libák	Z9	GAlejKE	9	9	5	6	6	2	37
	Nina Kapustová	Z7	ZBadín	9	3	3	4	9	0	37
27.	Martin Dudjak	Z9	SMládPP	9	9	9	9	0	0	36
28. - 32.	Natália Tkáčová	Z8	ZLevoSN	9	9	8	5	1	2	35
	Lukáš Jacko	Z9	ZKro4KE	9	9	9	8	-	-	35
	Katarína Chabová	Z8	ZLNovKE	9	9	9	8	-	-	35
	Viktória Sarnovská	Z7	ZStanKE	9	7	6	4	0	0	35
	Lenka Prevužňáková	Z7	ZŠsMŠPNV	9	4	9	4	0	0	35
33. - 34.	Paulína Tkáčová	Z9	ZLevoSN	8	8	5	9	2	2	34
	Ľudmila Krupová	Z8	ZKro4KE	9	8	5	4	4	-	34
35.	Matúš Chovančák	Z9	ZKro4KE	9	9	9	5	-	-	32
36. - 39.	Janka Ľochová	Z7	GOpatKE	4	6	7	4	3	0	31
	Sarah Klopstock	Z7	ŠpMNDaG	8	5	4	4	2	0	31
	Tatiana Mizeráková	Z7	ZŠsMŠPNV	9	-	9	4	-	-	31
	Sebastián Mačura	Z7	GJARMPO	5	9	4	4	0	-	31
40. - 41.	Radovan Milián	Z8	ZKro4KE	9	7	9	5	-	0	30
	Zuzana Beňová	Z7	ZFKráZC	9	4	-	8	-	-	30
42. - 45.	Ondrej Tóth	Z7	GVaršZA	4	5	9	1	1	-	29
	Marek Horváth	Z9	GKonšPO	9	6	9	4	1	0	29
	Ján Štiavnický	Z7	ZKro4KE	9	9	2	-	0	-	29
	Matúš Vlčko	Z7	UNESJNR	9	7	2	2	-	0	29
46. - 48.	Lukáš Hanes	Z8	ZKro4KE	9	9	2	8	-	0	28
	Jakub Čaník	Z8	GAlejKE	9	6	9	4	0	-	28
	Martin Vrba	Z7	ZKro4KE	9	7	3	-	0	-	28
49.	Samuel Györi	Z7	ZKro4KE	9	3	2	4	-	0	27

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
50.	Henrietta Antožy	Z9	ZKro4KE	9	9	-	8	-	0	26
51.	Boris Köröš	Z7	GAlejKE	9	-	2	1	3	-	24
52. - 53.	Tomáš Sukeľ	Z8	ZJŠveHE	9	-	9	5	-	-	23
	Lucia Poradová	Z8	ZK2Svit	9	4	2	8	-	0	23
54. - 56.	Peter Varga	Z9	ZKro4KE	9	-	9	4	-	-	22
	Zina Babinská	Z8	ZMRŠHLC	9	4	4	5	-	0	22
	Petra Uhrovičová	Z9	ZŠJanZH	8	3	9	2	-	-	22
57. - 58.	Matej Válek	Z8	ZKro4KE	9	9	3	-	-	-	21
	Adam Gubík	Z7	ZKro4KE	7	-	7	-	-	-	21
59.	Sofia Lujza Machovičová	Z9	ZŠJanZH	8	2	9	1	-	-	20
60. - 62.	Radka Mlynarčiková	None		8	1	5	4	-	0	18
	Viktoria Hujová	Z5	ŠpMNDaG	6	-	5	0	1	-	18
	Kiana Ševčíková	Z7	ZŠJanZH	5	2	5	1	-	-	18
63.	Nataly Očovanová	Z9	ZŠJanZH	8	1	5	3	-	-	17
64. - 66.	Natália Poliačiková	Z9	ZKro4KE	6	6	-	4	-	-	16
	Juraj Horňák	Z7	ZKro4KE	4	4	3	-	-	1	16
	Erik Kavenský	Z9	ZŠ Bystrická	2	2	9	1	2	0	16
67. - 69.	Šimon Stripaj	Z8	ZKro4KE	9	4	-	2	-	-	15
	Artur Pankuch	Z8	GAlejKE	-	-	9	6	-	-	15
	Paula Mikolášová	Z9	ZDoSúča	5	5	3	2	-	-	15
70. - 73.	Anna Kuchtová	Z8	GAlejKE	-	7	-	6	-	-	13
	Dorián Lovič	Z7	ZKro4KE	5	0	-	-	3	0	13
	Sofia Rožníková	Z9	ZDoSúča	6	1	2	4	-	-	13
	Matej Hric	Z8	ZŠ Bystrická	8	2	2	1	0	0	13
74. - 76.	Filip Olej	Z9	ZKro4KE	-	-	4	8	-	-	12
	Martina Ľuptáková	Z8	ZMRŠHLC	8	-	2	-	2	-	12
	Damián Jurica	Z8	ZDoSúča	5	0	3	2	2	-	12
77. - 78.	Martin Šedovič	Z8	ZKro4KE	7	-	-	4	-	-	11
	Kristián Lovčičan	Z8	ZŠJanZH	1	1	4	2	2	0	11
79.	Alžbeta Petzová	Z7	ZKúp2PO	2	1	3	1	0	0	10
80.	Nina Anna Betáková	Z8	ZJŠveHE	0	2	5	2	0	0	9
81. - 82.	Adam Herich	Z8	ZŠJanZH	6	2	-	-	-	-	8
	Miroslav Kútik	Z9	ZŠJanZH	6	-	1	1	-	0	8
83. - 85.	Oskar Cacara	Z8	ZKro4KE	-	2	1	4	-	-	7
	Yarden Cohen	Z9	ZKro4KE	7	-	-	-	-	-	7
	Katarína Petrufová	Z8	ZŠsMŠPNV	4	1	0	2	0	0	7
86.	Tomáš Polomský	Z7	ZKro4KE	2	2	-	-	-	-	6
87.	Adam Ilčík	Z8	ZKro4KE	-	-	-	5	-	-	5
88. - 90.	Kristián Ohman	Z8	GAlejKE	3	-	1	-	-	-	4
	Viktor Sedliak	Z9	ZŠJanZH	2	0	1	1	0	0	4
	Ado Urblík	Z9	ZŠJanZH	1	1	1	1	-	0	4
91. - 93.	Eduard Lehocký	Z9	ZKro4KE	3	-	-	-	-	-	3
	Dávid Györi	Z8	ZKro4KE	-	-	-	3	-	0	3
	Libuša Vrbjarová	Z8	ZŠ Bystrická	2	1	0	0	-	-	3
94. - 95.	Filip Fetyko	Z9	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	0
	Margaréta Mikulová	Z8	ZŠJanZH	0	0	0	0	0	0	0

Názov:	*MATIK* – korešpondenčný matematický seminár Číslo 2 • November 2020 • Zimný semester 34. ročníka
Internet:	`matik.strom.sk`
E-mail:	`matik@strom.sk`
Riešenia:	Prijímame poštou, na webe a v prípade poruchy na `riesenia@strom.sk`
Organizátor:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM
ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk