Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo 3 – Ročník 34

matik.strom.sk

Ahoj!

Je tu ďalší časopis *MATIK*a, ktorý prináša vzorové riešenia druhej série. Žiaľ, ani napriek tomu, že je posledným v semestri, pozvánky na sústredenie s ním neprichádzajú. Situácia je aj naďalej komplikovaná, preto sme usúdili, že je bezpečnejšie v zime sústredenia neorganizovať. Je však možné, že sa situácia v priebehu školského roka zlepší. V takom prípade sa nemusíš báť (ak si sa dostal medzi najlepších) – informácie o prípadnom sústredení sa k Tebe určite dostanú. Avšak nenechávame to len tak – v čase zimných sústredení sa predsa len niečo bude diať. Bude to pravdepodobne na čiare (online) a bude to zaujímavé. Tak nezabudni sledovať novinky na stránke, tam sa dozvieš všetko potrebné.

vedúci *MATIK*a

Vzorové riešenia 2. série úloh zimného semestra

1 opravovali: **Lenka Hake** a **Sara Gašparová**

najkrajšie riešenia: Tomáš Kubrický, Kalista Semancová

51 riešení

Zadanie

Po vytrvalom trénovaní počas leta si chcel tréner svojich hráčov odvážiť, aby zistil, aký pokrok urobili. Stálo pred ním 11 hráčov, o ktorých vedel, že schudli nasledovne:

- všetci hráči schudli dokopy o 40 kg,
- hráči na párnych pozíciách schudli dokopy o 16,5 kg,
- hráči na pozíciách deliteľných 3 schudli dokopy o 12,5 kg,
- súčet hmotností, o ktoré schudli dvaja krajní a traja prostrední hráči, je dokopy 19 kg.

Zabudol však, o koľko schudol stredný (šiesty) hráč. Koľko to je?

Riešenie

Pozrime sa na posledné 3 informácie zo zadania. Môžeme si všimnúť, že ak sčítame hmotnosť, o ktorú schudli hráči na párnych pozíciách (2., 4., 6., 8., 10.), hráči na pozíciách deliteľných trojkou (3., 6., 9.) a skupina dvoch krajných a troch prostredných hráčov (1., 11, 5., 6., 7.), výsledok bude obsahovať schudnutie každého hráča práve raz, iba schudnutie šiesteho hráča tam bude započítané 3-krát. Tento súčet je $16{,}5\,\mathrm{kg} + 12{,}5\,\mathrm{kg} + 19\,\mathrm{kg} = 48\,\mathrm{kg}$.
Rozdiel medzi touto hmotnosťou a hmotnosťou, ktorú schudli všetci hráči spolu (čo je 40 kg), je vlastne dvojnásobok schudnutia šiesteho hráča (keďže sa v 48 kg nachádza dvakrát „navyše“).
Šiesty hráč teda schudol polovicu z $48\,\mathrm{kg} - 40\,\mathrm{kg} = 8\,\mathrm{kg}$, čiže $8\,\mathrm{kg} : 2 = 4\,\mathrm{kg}$.

Komentár

Veľmi nás potešilo, že veľká časť odovzdaných riešení si zaslúžila plný počet bodov. Tiež nás milo prekvapili niektoré riešenia, ktoré vo svojom postupe využili Vennove diagramy.
Väčšina z vás si správne všimla, že medzi hráčmi z 2., 3. a 4. podmienky sa všetky pozície (okrem 6.) nachádzajú práve raz. Chceli by sme však upozorniť na dôležitosť slova *práve*, ktoré niektorí vynechali. Keď v matematike povieme „nachádza sa tam raz“, je to rovnaké, ako keby sme povedali „nachádza sa tam *aspoň* raz“, teda tam vlastne môže byť aj dvakrát, trikrát a tak ďalej – preto pridávame slovo *práve*.

2 opravovali: **Dano Onduš** a **Adel Horváthová**

najkrajšie riešenia: Oliver Seman, Katarína Farbulová

50 riešení

Zadanie

Na turnaj prišlo 35 hráčov vrátane teba. Medzi niektorými z vás už existujú vzájomné priateľstvá a zároveň každý hráč má aspoň 17 kamarátov. Skamarátiť sa s nejakým hráčom je možné iba vtedy, ak sa s ním kamaráti už niektorý z tvojich doterajších kamarátov. Ukáž, že sa vieš skamarátiť so všetkými hráčmi.

Riešenie

Pozrime sa na to pomocou sporu. Ak by sme sa nevedeli skamarátiť s niekým z hráčov, musela by nastať situácia, v ktorej by sa hráči nejakých skupín kamarátili iba medzi sebou.

Naša uzavretá skupinka ľudí by pozostávala aspoň z 18 hráčov – nás a našich 17 kamarátov. Na turnaji ale máme 35 hráčov, a ak by teda existovala uzavretá skupinka tvorená 18 hráčmi, zvyšných hráčov by ostalo najviac 17.

Vezmime si nejakého zo zvyšných hráčov, s ktorým sa nevieme skamarátiť. Vieme, že má tiež aspoň 17 kamarátov. Zo zvyšných hráčov môže mať kamarátov najviac 16, čiže musí mať určite aj kamaráta z našej skupiny, takže sa s ním vieme skamarátiť, čo je spor.

Komentár

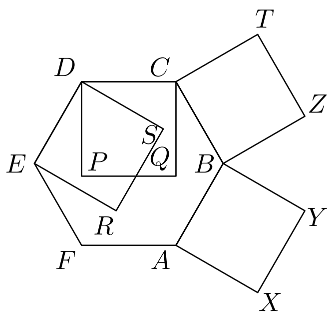
Úloha nebola veľmi náročná a väčšine z vás sa ju podarilo vyriešiť podobným spôsobom ako tu. Body ste najčastejšie stratili, ak ste rozoberali nejakú konkrétnu možnosť, ktorú ste označili za najhoršiu. V takom prípade však je nutné ukázať, že po vyriešení tejto možnosti už vieme vyriešiť aj všetky ostatné, čo je často ťažšie, ako vyriešiť samotnú úlohu.

3 opravovali: **Mirka Horváthová** a **Jano Richnavský**

najkrajšie riešenie: Miško Vodička

52 riešení

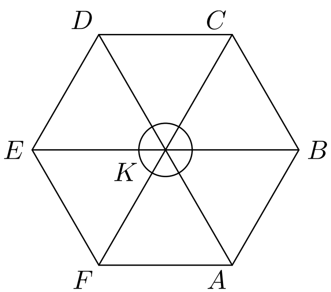
Zadanie

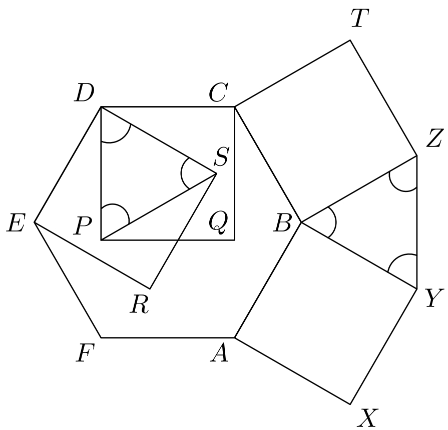


Na obrázku je nakreslený návrh nových kraťasov. Tie sú tvorené pravidelným šesťuholníkom $ABCDEF$ a dvoma štvorcami $BAXY$ a $CBZT$. Na kraťasoch sú dva vzory $CDPQ$ a $DERS$, ktoré sú tiež štvorce. Ukážte, že $|PS| = |YZ|$.

Riešenie

Do šesťuholníka $ABCDEF$ umiestnime bod K. Po spojení každého vrcholu šesťuholníka s týmto bodom K dostaneme 6 trojuholníkov: ABK, BCK, CDK, DEK, EFK a AFK. Vieme, že súčet uhlov v trojuholníku je 180°, takže súčet všetkých uhlov v týchto trojuholníkoch je $180° \cdot 6 = 1080°$. Okolo vrcholu K je plný uhol – 360°. Ak tento uhol odpočítame, dostaneme súčet zvyšných uhlov – súčet vnútorných uhlov šesťuholníka: $1080° - 360° = 720°$. Keďže ide o pravidelný šesťuholník, vnútorné uhly majú rovnakú veľkosť, a to $720° : 6 = 120°$. Vnútorný uhol v štvorci má veľkosť 90°.





Pozrime sa na štvorce $BAXY$, $BZTC$, $DPQC$ a $DERS$. Každý z týchto štvorcov má práve jednu stranu spoločnú s naším pravidelným šesťuholníkom, a teda všetky majú rovnakú dĺžku strany, preto sú tieto štvorce zhodné.
Pozrime sa najprv na trojuholník PDS. Zo zhodnosti štvorcov $|PD| = |DS|$. Ukázali sme, že vnútorný uhol v tomto šesťuholníku má 120°, preto $|\sphericalangle EDC| = 120°$. $\sphericalangle PDC$ a $\sphericalangle EDS$ sú vnútornými uhlami štvorca, čiže sú pravé. Vidíme, že

$$|\sphericalangle EDP| = |\sphericalangle EDC| - |\sphericalangle PDC| = 120° - 90° = 30° \text{ a}$$
$$|\sphericalangle PDS| = |\sphericalangle EDS| - |\sphericalangle EDP| = 90° - 30° = 60°.$$

Dostávame trojuholník PDS, ktorý je rovnoramenný (ramená PD a DS), pričom tieto ramená zvierajú 60°. Keďže súčet uhlov v trojuholníku je 180°, zvyšným dvom uhlom tak pripadá 120°, a vďaka rovnoramennosti tieto uhly sú rovnaké a každý má $120 : 2 = 60°$. Keďže sú všetky uhly v tomto trojuholníku zhodné, tento trojuholník je rovnostranný. Z toho vyplýva, že PS má rovnakú dĺžku ako PD alebo DS, teda dĺžku strany pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$.

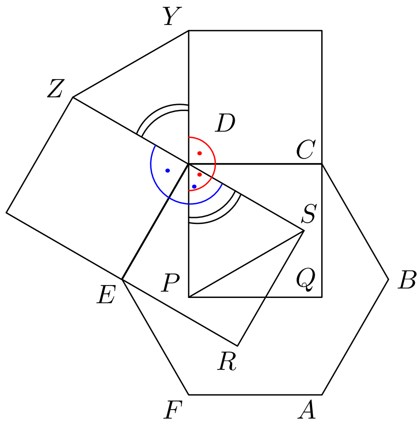
Pozrime sa teraz na trojuholník YBZ. Zo zhodnosti štvorcov $|YB| = |BZ|$. Okolo bodu B majú všetky uhly súčet 360°. $\sphericalangle ABC$ je vnútorným uhlom šesťuholníka, preto $|\sphericalangle ABC| = 120°$. $\sphericalangle ABY$ a $\sphericalangle CBZ$ sú vnútorné uhly štvorca, preto sú pravé. Od plného uhla pri B odpočítame tieto tri uhly a dostávame

$$|\sphericalangle YBZ| = 360° - |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ABY| - |\sphericalangle CBZ| = 360° - 120° - 90° - 90° = 60°.$$

Analogicky ako pri prvom trojuholníku zisťujeme, že ide opäť o rovnostranný trojuholník, kde sa dĺžka strany rovná dĺžke strany pravidelného šesťuholníka. Preto sa aj $|YZ|$ rovná dĺžke strany šesťuholníka $ABCDEF$.
Ukázali sme, že PS má dĺžku ako strana pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ a rovnako aj YZ, čím dokázali sme, že $|PS| = |YZ|$.

Iné riešenie

Pozrime sa na štvorce $BAXY$, $BZTC$, $DPQC$ a $DERS$. Každý z týchto štvorcov má práve jednu stranu spoločnú s naším pravidelným šesťuholníkom, takže všetky majú rovnakú dĺžku strany, preto sú tieto štvorce zhodné. Pre zhodnosť štvorcov a pravidelnosť šesťuholníka môžeme bez ujmy na všeobecnosti štvorce $BAXY$ a $BZTC$ presunúť nad ktorékoľvek dve strany pravidelného šesťuholníka za zachovania ich poradia. Nuž si ich presuňme nad strany ED a DC (viď obrázok).



$\sphericalangle PDC$ a $\sphericalangle YDC$ sú pravé (červené), keďže sú vnútornými uhlami vo štvorcoch. Spolu tak tvoria priamy uhol a body Y, D a P ležia na jednej priamke. Podobne to vieme prehlásiť o bodoch S, D a Z (modrá). Keďže štvorce majú rovnaké strany, vieme, že $|DP| = |DY| = |DS| = |DZ|$. Z týchto znalostí vieme povedať, že body P a S sú stredovo súmerne zobrazené podľa bodu D do bodov Y a Z. Keďže stredová súmernosť je zhodným zobrazením, trojuholník PSD je zhodný s trojuholníkom YZD a z toho už vyplýva, že $|PS| = |YZ|$. (Ak nepoznáme stredovú súmernosť, zhodnosť vieme vysvetliť aj vrcholovými uhlami – podľa nich totiž $|\sphericalangle PDS| = |\sphericalangle YDZ|$ a potom dôkaz vieme dokončiť pomocou vety sus o zhodnosti trojuholníkov.)

Komentár

Väčšina riešiteľov, ktorá využívala princíp prvého riešenia, sa k deväťbodovému zisku dostala, miestami sme sťahovali body, ak nám riešiteľ nedostatočne vysvetlil to, že trojuholníky PDS a YBZ budú naozaj zhodné, alebo v prípade, keď riešiteľ vo svojom riešení nespomenul dôvod, prečo sú všetky strany štvorcov rovnaké (tento fakt sa mohol zdať ako zjavný, zo zadania však priamo nevyplýva, a preto to bolo treba v riešení zdôvodniť).
Druhé riešenie uvádzame aj preto, pretože bolo pomerne mnoho riešiteľov, ktorí sa chceli vydať podobnou cestou, no veľmi často svoje riešenie nedotiahli dokonca. Najčastejšie chýbalo v riešení zdôvodnenie toho, že trojice bodov S, D, Z a Y, D, P ležia na jednej priamke, čo bolo základom na to, aby fungovalo zdôvodnenie stredovou súmernosťou alebo vrcholovými uhlami. Toto bola veľmi podstatná časť v takýchto riešeniach, preto riešitelia, ktorí toto dostatočne nezdôvodnili, stratili určité množstvo bodov.

4

opravovali: **Gabča Genčiová** a **Matúš Masrna**
najkrajšie riešenie: Milan Jozef Pokorný

25 riešení

Zadanie

Na frisbee campe sú pravdovravci a klamári. Všetci pravdovravci hovoria vždy pravdu a všetci klamári vždy klamú. Niektorí pravdovravci sa rozhodli hrať HotBox, podobne niektorí klamári začali hrať discgolf. Ľudia na campe sa združili do rôznych tímov, pričom hráč môže patriť do viacerých tímov. Tímy, ktoré vznikli na frisbee campe, spĺňajú nasledujúce 4 podmienky:

- Všetci pravdovravci, ktorí hrajú HotBox, tvoria tím.
- Všetci klamári, ktorí hrajú discgolf, tvoria tím.
- Pre každý tím T platí, že tí hráči, ktorí nie sú v tíme T, tvoria tiež tím.
- Ku každému tímu T existuje aspoň jeden hráč, ktorý o sebe prehlasuje, že je členom tímu T (jeho tvrdenie nemusí byť pravdivé, môže to byť klamár).

Ukážte, že na turnaji je aspoň jeden pravdovravec, ktorý nehrá HotBox, a aspoň jeden klamár, ktorý nehrá discgolf. Zistite, či všetci pravdovravci tvoria jeden tím, a toto svoje zdôvodnenie vysvetlite.

Riešenie

Najprv si poďme ukázať, že existuje taký klamár, ktorý nehrá discgolf. Predstavme si situáciu, kde všetci klamári hrajú discgolf. V tom prípade by podľa druhej podmienky všetci spolu tvorili jeden samostatný tím pozostávajúci iba z klamárov. Pozrime sa, či sa pre tento tím dá splniť štvrtá podmienka. Nikto z toho tímu neprehlási,

že je jeho súčasťou, keďže všetci klamú. A takisto nikto mimo toho tímu neprehlási, že je jeho súčasťou, pretože to môže povedať len klamár a tí sú už všetci v tom tíme. Tým pádom by v tejto situácii pre tento tím nebola splnená štvrtá podmienka, teda nemôže nastať. Tým pádom aspoň jeden klamár nehrá discgolf.
Podobným spôsobom poďme ukázať, že existuje pravdovravec, ktorý nehrá HotBox. Predstavme si situáciu, že všetci pravdovravci hrajú HotBox. Podľa tretej podmienky potom všetci ostatní tvoria druhý tím. Vieme, že všetci pravdovravci sú v tíme hrajúcich HotBox, preto v tom druhom tíme sú iba všetci klamári. Tu sa dostávame k presne rovnakému problému, pre tím všetkých klamárov sa nedá splniť štvrtá podmienka. Preto nemôžu všetci pravdovravci hrať HotBox.
Otázka, či všetci pravdovravci môžu tvoriť jeden tím, je už len všeobecnejšia verzia tej predošlej. Keby všetci pravdovravci tvorili jeden tím, podľa tretej podmienky potom všetci klamári tvoria druhý, pre ktorý sa nedá splniť štvrtá podmienka. To znamená, že nemôžu všetci pravdovravci tvoriť jeden tím.

Komentár

Samotná úloha nebola veľmi zložitá, čiže väčšine z vás sa aj podarilo získať deväť bodov. Najčastejšie ste stratili body práve preto, že ste mali problém s pochopením zadania.
Niektorí ste úlohu riešili napríklad tak, že ste rátali s tým, že na celom campe sú len 2 tímy, alebo ste si neuvedomili, že prvá podmienka hovorí o tom, že v danom tíme majú byť len pravdovravci, a rovnako druhá podmienka hovorí o tom istom, len s klamármi. Tým pádom ste v podstate riešili inú úlohu a nemohli ste sa dopátrať správneho riešenia.

5

opravovali: **Erik Novák** a **Mimi Hanus**
najkrajšie riešenia: Katarína Ostertágová a Eva Krajčiová

44 riešení

Zadanie

Nedávno si si zmenil číslo svojho dresu. Toto číslo n má po delení 3 zvyšok 2. Ukáž, že potom existuje prvočíslo p, ktoré delí n a tiež má po delení 3 zvyšok 2.

Riešenie

Pozrime sa na prvočísla v prvočíselnom rozklade n a na ich zvyšky po delení tromi. Po delení trojkou existujú tri rôzne zvyšky, a to 0, 1 a 2. Môžeme vylúčiť možnosť, že n je deliteľné nejakým p so zvyškom 0 po delení tromi, pretože jediné také prvočíslo je 3 a na to, aby číslo n bolo deliteľné trojkou, by muselo mať zvyšok 0 po delení trojkou, no to zo zadania vieme, že nemá.
V prvočíselnom rozklade n sa teda nachádzajú iba prvočísla, ktoré majú zvyšky 1 a 2 po delení trojkou. My chceme dokázať, že tam určite je aspoň jedno také, čo má zvyšok 2.

Dokážeme to sporom, čiže si predstavíme, že v prvočíselnom rozklade n sa nenachádza ani jedno prvočíslo so zvyškom 2, a zistíme, že je na tom niečo v rozpore s matematikou alebo so zadaním.
V prvočíselnom rozklade n sa nenachádza žiadne prvočíslo so zvyškom 2 a zároveň sme hneď na začiatku vylúčili zvyšok 0, čo znamená, že n je súčin prvočísel so zvyškom 1 po delení trojkou.
Takéto číslo vieme zapísať v tvare $3k + 1$, teda $n = (3k_1 + 1) \cdot (3k_2 + 1) \cdot \cdots \cdot (3k_x + 1)$. Po roznásobení zátvoriek v tomto súčine dostaneme súčet niekoľkých čísel, z ktorých každé vzniklo tak, že sme z každej zátvorky vybrali jeden zo sčítancov a tieto sčítance sme vynásobili, pričom vždy sme brali inú kombináciu sčítancov zo zátvoriek. V každom z týchto súčinov sa tak aspoň raz nachádza 3 okrem toho, ktorý vznikol vybratím jednotky z každej zátvorky, v tomto prípade je súčin 1. Číslo n je preto súčet niekoľkých čísel deliteľných tromi a jednej jednotky. Tým pádom n má zvyšok 1 po delení trojkou, čo je v spore so zadaním, keďže zo zadania n má po delení trojkou zvyšok 2.
Nemôže sa stať, že by v prvočíselnom rozklade n so zvyškom 2 po delení trojkou boli iba prvočísla so zvyškom 1 alebo 0, takže sa v ňom musí nachádzať prvočíslo p, ktorého zvyšok po delení tromi je 2. Tým sme dokázali tvrdenie zo zadania.

Komentár

Mnohí z vás sa s úlohou popasovali bez značných ťažkostí. Okrem postupu v zadaní sa vyskytol aj prístup, pri ktorom ste z n vyrobili nejaké menšie číslo a ukázali, že stačí, aby dokazované tvrdenie platilo preň. Takéto riešenie funguje o niečo komplikovanejšie, ale nezamotali ste sa.
Časť z vás však neriešila úlohu dostatočne všeobecne, keď nehľadala prvočísla p pre všetky možné n, ale iba nejaké vyhovujúce n, čo úloha nechcela – n bolo dané. Aj pri jednoduchom a krátkom zadaní si dajte pozor, aby ste ho chápali správne, nech nestratíte príležitosť vyriešiť príklad.

6

opravovali: **Bia Gurská** a **Timka Szöllősová**
najkrajšie riešenia: Milan Jozef Pokorný a Eva Krajčiová

19 riešení

Zadanie

Po dlhom dni plnom zápasov sa Marco rozhodol, že si zahrá hru. Nakreslil si rovnostranný trojuholník, ktorý rozdelil na 9 menších trojuholníkov. V každom malom trojuholníku je napísané číslo 0. Hra spočíva v tom, že Marco si v každom ťahu vyberie 2 trojuholníky, ktoré majú spoločnú stranu, a pričíta rovnaké celé číslo k obom číslam, ktoré sú v trojuholníkoch napísané, alebo ho od nich odčíta. Po nejakom čase si uvedomí, že čísla napísané na 9 trojuholníkoch sú v nejakom poradí n, $n+1$ a tak ďalej až po $n+8$, kde n je nezáporné celé číslo. Ukážte, že hodnota n môže byť len 0 alebo 2 (nemusíte ukazovať, že to pre tieto hodnoty môže nastať).

Riešenie

Najprv si treba uvedomiť, že súčet čísel v trojuholníku bude vždy párny. Na začiatku máme deväť núl, ktorých súčet (0) je párne číslo. Potom v každom ťahu Marco pripočíta alebo odpočíta nejaké celé číslo c k dvom trojuholníkom. $2c$ je násobok 2, takže je vždy párny.

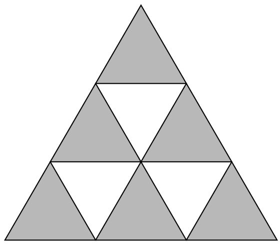
Ak sa pozrieme na zmeny parít čísel pri odčítavaní a pričítavaní, zistíme, že súčet dvoch párnych čísel je párny a rovnako rozdiel dvoch párnych čísel je párny. Čo znamená, že po každom ťahu Marco dostane párny súčet čísel v trojuholníku.

Zo zadania vieme, že súčet čísel v trojuholníku vyzerá takto:

$$n + n + 1 + n + 2 + n + 3 + n + 4 + n + 5 + n + 6 + n + 7 + n + 8 = 9n + 36$$

Už vieme, že $9n + 36$ má byť párne, takže sa pozrime na paritu týchto sčítancov: 36 je párne, 9 je nepárne, n musí byť tiež párne, pretože násobok $9n$ bude párny len vtedy, ak n bude tiež párne, totiž platí, že súčin párneho a nepárneho čísla je párny. Takže už vieme, že n bude párne.

Teraz sa pozrime na hrací plán. Vyfarbíme si ho nasledovne:



V každom ťahu Marco pripočíta alebo odpočíta číslo k jednému nevyfarbenému a jednému vyfarbenému trojuholníku – toto platí vždy, nevyfarbené trojuholníky majú spoločnú stranu len s vyfarbenými a žiadne dva vyfarbené trojuholníky nemajú spoločnú stranu.

Teda súčet vyfarbených trojuholníkov a súčet nevyfarbených trojuholníkov sa budú rovnať. Keďže nevyfarbené trojuholníky sú tri, ich najväčší možný súčet dostaneme po sčítaní najväčších možných hodnôt n zo zadania:

$$n + 8 + n + 7 + n + 6 = 3n + 21 = x$$

Tento súčet si označíme ako x. Potom x musí byť aspoň polovica súčtu všetkých čísel a na základe toho si zostavíme nerovnicu:

$$\frac{9n + 36}{2} \leq x$$

$$9n + 36 \leq 2 \cdot 3n + 2 \cdot 21$$

$$9n - 6n \leq 42 - 36$$

$$3n \leq 42 - 36$$
$$n \leq \frac{42}{3} - 12$$
$$n \leq 14 - 12$$
$$n \leq 2$$

Zo zadania vieme, že n je nezáporné celé číslo. Už sme zistili, že n je párne číslo a takisto, že $n \leq 2$. Týmto podmienkam vyhovujú len možnosti, keď $n = 2$ alebo $n = 0$.

Komentár

Väčšina z vás, ktorí ste túto úlohu odovzdali, ste ju mali na deväť bodov. Je to zrejme tým, že keď už sa vám podarilo nájsť ten správny uhol pohľadu, tak bolo hračkou dotiahnuť úlohu do konca. Je fajn mať osvojený aj takýto náhľad na úlohy – spojený s ofarbovaním – je totiž nemálo úloh, kde to zužitkujete, preto je super, ak si túto úlohu zapamätáte. :)

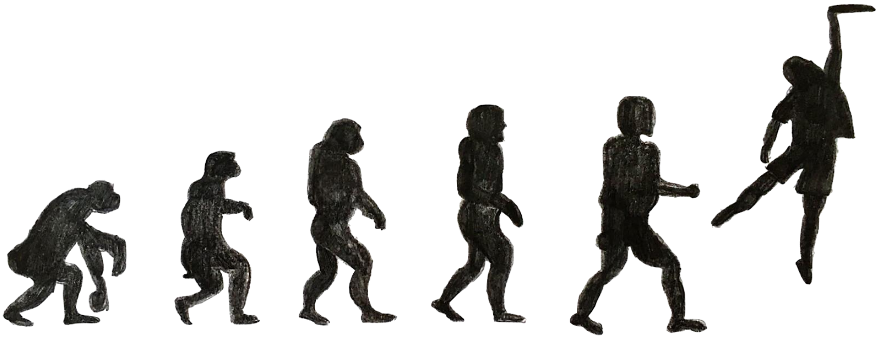
Autori vzorových riešení: Erik Berta, Viktória Brezinová, Martin Albert Gbúr, Matej Hanus, Patrik Paľovčík, Róbert Sabovčík, Timea Szöllősová

Konečné poradie zimného semestra 34. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1. - 5.	Milan Jozef Pokorný	Z8	GJHNHTT	54	9	9	9	9	9	9	**108**
	Richard Prikler	Z7	GJARMPO	54	9	9	9	9	8	9	**108**
	Lucia Chladná	Z9	GAMČABA	54	9	9	9	9	9	9	**108**
	Katarína Ostertágová	Z8	CENADA	54	9	9	9	9	9	-	**108**
	Eva Krajčiová	Z8	GAlejKE	54	9	9	9	9	9	9	**108**
6.	Michal Vodička	Z7	GAlejKE	53	9	9	9	9	9	9	**107**
7. - 8.	Michal Iľkovič	Z9	GSMTŠPO	52	9	9	9	9	9	9	**106**
	Richard Vodička	Z9	GAlejKE	52	9	9	9	9	9	9	**106**
9. - 10.	Janka Urbánová	Z7	GAlejKE	51	9	6	9	9	9	-	**102**
	Tomáš Kubrický	Z9	ZKro4KE	48	9	9	9	9	9	9	**102**
11.	Martina Osuska	Z7	ZDrJDMA	53	9	9	8	8	4	-	**100**
12.	Lea Gašparová	Z8	GABerSC	45	9	9	9	-	9	9	**99**
13.	Veronika Vodičková	Z9	GAlejKE	48	9	3	9	9	9	9	**96**
14.	Vlastimil Marek Urda	Z9	ZBPPGPO	53	9	9	9	-	6	9	**95**
15.	Ondrej Králik	Z9	GAlejKE	54	9	9	9	1	3	9	**94**
16. - 18.	Lev Melnychuk	Z8	ZKro4KE	54	9	9	8	3	4	3	**90**
	Katarína Farbulová	Z9	GAlejKE	45	9	9	9	9	9	-	**90**
	Vladimír Slanina	Z9	ZKro4KE	45	9	9	9	9	9	-	**90**
19.	Martin Franek	Z8	GsvFHZA	46	9	9	9	9	-	3	**88**
20.	Emma Stajančová	Z7	ZPečoNV	43	9	9	3	3	-	-	**76**
21.	Paulína Tkáčová	Z9	ZLevoSN	34	9	9	8	9	3	3	**75**
22.	Natália Tkáčová	Z8	ZLevoSN	35	9	6	9	9	3	3	**74**
23.	Sebastián Mačura	Z7	GJARMPO	31	9	3	8	9	3	-	**72**
24.	Ondrej Tóth	Z7	GVaršZA	29	9	9	9	3	3	-	**71**
25.	Lukáš Jacko	Z9	ZKro4KE	35	9	8	9	-	8	-	**69**
26.	Jakub Čaník	Z8	GAlejKE	28	9	7	9	9	3	-	**68**
27.	Martin Dudjak	Z9	SMládPP	36	9	9	5	-	8	-	**67**
28. - 29.	Oliver Seman	Z8	GAlejKE	37	8	9	3	-	9	-	**66**
	Patrik Barnišin	Z9	ZBPPGPO	46	6	7	4	-	3	-	**66**
30. - 31.	Janka Ľochová	Z7	GOpatKE	31	9	6	5	0	3	1	**64**
	Kalista Semancová	Z9	ZSNP1HE	40	9	6	9	-	0	-	**64**
32.	Viktória Sarnovská	Z7	ZStanKE	35	9	5	5	-	-	-	**63**
33.	Katarína Chabová	Z8	ZLNovKE	35	8	9	9	-	0	-	**61**
34.	Ľudmila Krupová	Z8	ZKro4KE	34	6	6	9	-	3	-	**58**
35.	Zuzana Beňová	Z7	ZFKráZC	30	9	-	9	-	-	-	**57**
36.	Marek Horváth	Z9	GKonšPO	29	9	9	9	-	-	-	**56**
37.	Lenka Prevužňáková	Z7	ZPečoNV	35	7	-	6	-	-	-	**55**
38. - 39.	Samuel Györi	Z7	ZKro4KE	27	9	-	9	-	-	-	**54**
	Sarah Klopstock	Z7	ŠpMNDaG	31	9	0	2	-	0	3	**54**
40.	Boris Köröš	Z7	GAlejKE	24	9	4	7	-	0	-	**53**
41.	Radovan Milián	Z8	ZKro4KE	30	9	5	5	-	3	-	**52**
42.	Tomáš Sukeľ	Z8	ZJŠveHE	23	9	1	9	-	3	-	**45**
43.	Natália Poliačiková	Z9	ZKro4KE	16	9	8	9	-	-	-	**42**
44. - 45.	Lucia Poradová	Z8	ZK2Svit	23	6	8	3	-	0	-	**40**
	Matúš Libák	Z9	GAlejKE	40	-	-	-	-	-	-	**40**
46.	Soňa Grofčíková	Z7	ZLNovKE	39	-	-	-	-	-	-	**39**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
47.	Nina Kapustová	Z7	ZBadín	37	-	-	-	-	-	-	**37**
48.	Tatiana Mizeráková	Z7	ZPečoNV	31	-	1	0	-	-	-	**33**
49.	Matúš Chovančák	Z9	ZKro4KE	32	-	-	-	-	-	-	**32**
50.	Matej Válek	Z8	ZKro4KE	21	4	5	-	-	-	-	**30**
51. - 52.	Matúš Vlčko	Z7	UNESJNR	29	-	-	-	-	-	-	**29**
	Ján Štiavnický	Z7	ZKro4KE	29	-	-	-	-	-	-	**29**
53. - 54.	Martin Vrba	Z7	ZKro4KE	28	-	-	-	-	-	-	**28**
	Lukáš Hanes	Z8	ZKro4KE	28	-	-	-	-	-	-	**28**
55. - 56.	Henrietta Antožy	Z9	ZKro4KE	26	-	-	-	-	-	-	**26**
	Radka Mlynarčiková	Z7	ZJansZH	26	-	-	-	-	-	-	**26**
57.	Libuša Vrbjarová	Z8	ZBystRK	3	8	8	6	-	0	-	**25**
58. - 60.	Peter Varga	Z9	ZKro4KE	22	-	-	-	-	-	-	**22**
	Zina Babinská	Z8	ZMRŠHLC	22	-	-	-	-	-	-	**22**
	Petra Uhrovičová	Z9	ZJansZH	22	-	-	-	-	-	-	**22**
61. - 62.	Adam Gubík	Z7	ZKro4KE	21	-	-	-	-	-	-	**21**
	Oskar Cacara	Z8	ZKro4KE	7	7	-	7	-	0	-	**21**
63.	Sofia Lujza Machovičová	Z9	ZJansZH	20	-	-	-	-	-	-	**20**
64. - 65.	Viktoria Hujová	Z5	ŠpMNDaG	18	-	0	-	-	-	-	**18**
	Kiana Ševčíková	Z7	ZJansZH	18	-	-	-	-	-	-	**18**
66. - 68.	Erik Kavenský	Z9	ZBystRK	16	1	0	0	-	0	0	**17**
	Šimon Stripaj	Z8	ZKro4KE	15	1	0	1	-	-	-	**17**
	Nataly Očovanová	Z9	ZJansZH	17	-	-	-	-	-	-	**17**
69.	Juraj Horňák	Z7	ZKro4KE	16	-	-	-	-	-	-	**16**
70. - 72.	Matej Hric	Z8	ZBystRK	13	2	0	0	0	0	-	**15**
	Paula Mikolášová	Z9	ZDoSúča	15	-	-	-	-	-	-	**15**
	Artur Pankuch	Z8	GAlejKE	15	-	-	-	-	-	-	**15**
73. - 75.	Dorián Lovič	Z7	ZKro4KE	13	-	-	-	-	-	-	**13**
	Sofia Rožníková	Z9	ZDoSúča	13	-	-	-	-	-	-	**13**
	Anna Kuchtová	Z8	GAlejKE	13	-	-	-	-	-	-	**13**
76. - 78.	Damián Jurica	Z8	ZDoSúča	12	-	0	0	-	0	-	**12**
	Martina Ľuptáková	Z8	ZMRŠHLC	12	-	-	-	-	-	-	**12**
	Filip Olej	Z9	ZKro4KE	12	-	-	-	-	-	-	**12**
79. - 80.	Martin Šedovič	Z8	ZKro4KE	11	-	-	-	-	-	-	**11**
	Kristián Lovčičan	Z8	ZJansZH	11	-	-	-	-	-	-	**11**
81.	Alžbeta Petzová	Z7	ZKúp2PO	10	-	-	-	-	-	-	**10**
82.	Nina Anna Betáková	Z8	ZJŠveHE	9	-	-	-	-	-	-	**9**
83. - 84.	Miroslav Kútik	Z9	ZJansZH	8	-	-	-	-	-	-	**8**
	Adam Herich	Z8	ZJansZH	8	-	-	-	-	-	-	**8**
85. - 86.	Yarden Cohen	Z9	ZKro4KE	7	-	-	-	-	-	-	**7**
	Katarína Petrufová	Z8	ZPečoNV	7	0	0	0	-	0	-	**7**
87.	Tomáš Polomský	Z7	ZKro4KE	6	-	-	-	-	-	-	**6**
88.	Adam Ilčík	Z8	ZKro4KE	5	-	-	-	-	-	-	**5**
89. - 91.	Kristián Ohman	Z8	GAlejKE	4	-	-	-	-	-	-	**4**
	Viktor Sedliak	Z9	ZJansZH	4	-	-	-	-	-	-	**4**
	Ado Urblík	Z9	ZJansZH	4	-	-	-	-	-	-	**4**
92. - 93.	Eduard Lehocký	Z9	ZKro4KE	3	-	-	-	-	-	-	**3**
	Dávid Györi	Z8	ZKro4KE	3	-	-	-	-	0	-	**3**
94. - 96.	Filip Fetyko	Z9	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	-	**0**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
	Margaréta Mikulová	Z8	ZJansZH	0	-	-	-	-	-	-	**0**
	Dušan Ivan	Z8	ZKro4KE	0	-	-	-	-	0	-	**0**



Názov: *MATIK* – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 3 • December 2020 • Zimný semester 34. ročníka

Internet: `matik.strom.sk`

E-mail: `matik@strom.sk`

Riešenia: Prijímame poštou, na webe a v prípade poruchy na `riesenia@strom.sk`

Organizátor: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach,
Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice
Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk