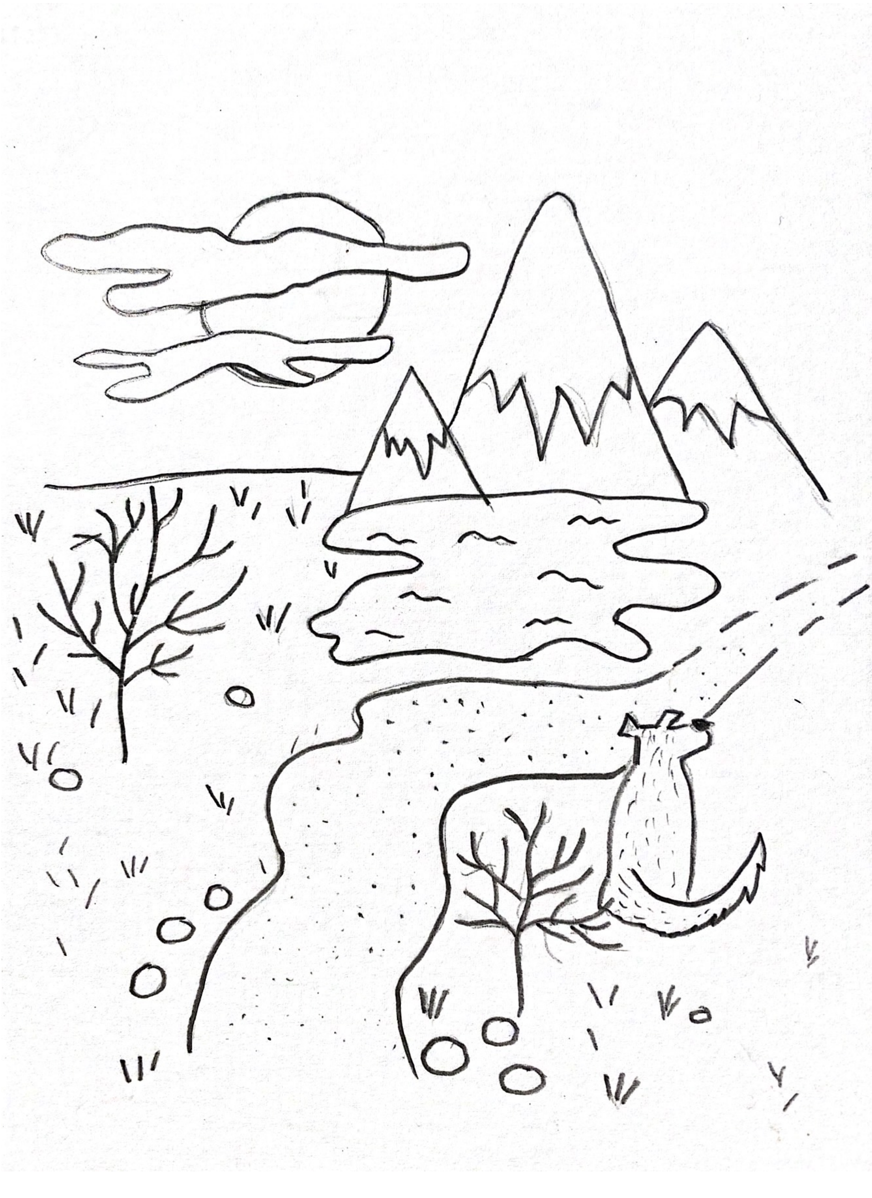
Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo 5 – Ročník 35 matik.strom.sk



Ahoj!

Tvojmu pohľadu zjavne neuniklo ďalšie vydanie *MATIK*a, v ktorom nájdeš nielen poradie po prvej sérii tohto semestra, ale aj naše vzorové riešenia. Nezabúdaj však, že sme ešte len v polčase, tak určite nepoľavuj a pusti sa do druhej série. S radosťou očakávame Tvoje ďalšie riešenia!

vedúci *MATIK*a

Ako bude

2% z daní

Aj tento rok je možné venovať 2% (v niektorých prípadoch dokonca až 3%) daní verejnoprospešným organizáciám, ako sme my.
Peniaze získané z 2% využívame na pokrytie časti nákladov spojených s aktivitami pre vás (kopírovanie časopisov, poštovné, ceny na súťažiach, aktivity na sústredeniach...).
Chceme vás preto poprosiť, aby ste rodičom, členom svojej blízkej aj vzdialenej rodiny, susedom a pokojne aj cudzím ľuďom na ulici porozprávali o našich aktivitách a poprosili ich, aby svojou troškou podporili našu dobrovoľnícku činnosť a pomohli tým skupine mladých cieľavedomých ľudí zabezpečujúcich chod týchto úžasných seminárov, ktoré tak zbožňujete. Porozprávajte im, čo pre vás znamená sústredenie, čo vám dáva riešenie úloh seminára, a vysvetlite im, že takto podporia aj váš rozvoj a prispejú k zmysluplnému tráveniu vášho voľného času.
Potrebné informácie o tom, ako darovať 2%, nájdete na stránke nášho združenia `https://zdruzenie.strom.sk/sk/zdruzenie/2percenta/` a radi vám odpovieme na ľubovoľné otázky ohľadom našej podpory aj mailom na `info@strom.sk`.
Ďakujeme!

Tábor mladých matematikov

V termíne od 12. do 19. augusta 2022 sa udeje ten najlepší tábor tohoto roka – Tábor mladých matematikov! Bude sa konať na Chate Radzim pri obci Vyšná Slaná. Všetky podrobné informácie nájdete v pozvánke na `seminar.strom.sk/media/uploads/pozvankaucastniktmm2022.pdf`.
Pýtate sa, čo je Tábor mladých matematikov? Je to tábor určený pre budúcich siedmakov základných škôl až pre budúcich druhákov stredných škôl (a, samozrejme, prislúchajúce ročníky viacročných gymnázií). Program tábora pripomína obľúbené sústredenia, je však o dva dni dlhší, a preto o dva dni lepší!
Neváhajte pridlho, kapacita tábora je obmedzená. Tešíme sa na vás!

Vzorové riešenia 1. série úloh letného semestra

1 opravovali: **Ján Richnavský** a **Adel Horváthová**

najkrajšie riešenie: Oliver Seman

29 riešení

Zadanie

Na túru prišlo aspoň 5 detí (aspoň 1 chlapec a aspoň 1 dievča). Niektorí chlapci sa s niektorými dievčatami zvítali objatím. Všetky dvojice, ktoré sa neobjali, si iba podali ruky. Môžeme ľudí rozdeliť do dvoch skupín tak, aby ani v jednej skupine neboli dve deti, ktoré si spolu podali ruku? Ak áno, ako? Ak nie, prečo?

Riešenie

Zo zadania vieme, že dievča s dievčaťom a chlapec s chlapcom si určite podajú ruky, preto nesmú byť v žiadnej zo skupín dve dievčatá alebo dvaja chlapci. Aby si ruky v rámci skupiny mohli nepodať, musia byť preto v skupine nanajvýš jedno dievča a jeden chlapec (môžu sa objať). Keďže máme dve skupiny, spolu v nich takto môžu byť iba 4 deti bez toho, aby si podali ruky. Avšak detí máme aspoň 5, a ak ku ktorejkoľvek skupine jedno dieťa (či už dievča alebo chlapca) pridáme, určite si s niekým podá ruku.

Komentár

Táto úloha potrápila len málo riešiteľov, o čom svedčí počet deväťbodových riešení. Občas sme sa stretli s tým, že si riešiteľ vybral jeden konkrétny prípad rozdelenia do skupín a na tomto rozdelení nám ukázal, že si niekto ruky podá. Avšak my potrebujeme ukázať, že to platí vždy a pri akomkoľvek rozdelení. Takých prípadov však bolo len veľmi málo, preto môžeme zhodnotiť, že úloha vám problémy nenarobila :).

2 opravovali: **Vilo Geffert** a **Timka Szöllősová**

najkrajšie riešenie: Nina Hudáková

24 riešení

Zadanie

Tri horolezkyne Adel, Bia a Lujza rady lezú. Dve stále lezú a jedna ich istí. Tá, ktorá z dvojice vylezie na kopec ako prvá, na ďalšom kopci istí a tá, čo istila, ide liezť. Po vylezení všetkých kopcov zistili, že Adel liezla dokopy 12-krát, Bia liezla dokopy 21-krát a Lujza 8-krát istila. Ktorá z horolezkýň vyliezla ako prvá na šiesty kopec?

Riešenie

Najprv skúsme zistiť, koľkokrát Adel a Bia istili a koľkokrát Lujza liezla. Z toho budeme schopní dopočítať počet kopcov, na ktoré dievčatá vyliezli. Keď liezla Adel, istiť musela Bia alebo Lujza. Vieme, že Lujza istila 8-krát a Adel liezla 12-krát. Bia teda musela istiť zvyšných 4-krát. Viackrát istiť už nemohla, keďže potom by Adel musela liezť viac ako 12-krát. Vieme teda, že Bia liezla 21-krát a istila 4-krát, dokopy tak museli dievčatá vyliezť na 25 kopcov.
Z toho teda vieme zistiť, že Adel musela istiť 13-krát. Zo zadania vyplýva, že osoba, ktorá istí na jednom kopci, musí na druhom liezť - inak povedané, nik nemôže istiť dvakrát po sebe. Aby mohla Adel istiť 13-krát, musí istiť na prvom kopci a následne na každom ďalšom nepárnom, čo nám dá dokopy presne 13 istení, čo je teda najväčší možný počet. Keby istila na každom párnom kopci, istila by iba 12-krát. Keďže Adel istí na nepárnych kopcoch, istí aj na siedmom kopci, a teda na šiesty kopec musí vyliezť ako prvá.

Komentár

Veľká časť z vašich riešení bola veľmi pekná a teda sme ich ocenili deviatimi bodmi. Za niektoré riešenia sme však museli strhnúť body, keďže neobsahovali dôležité časti postupu, ako napríklad výpočet počtu kopcov. V niektorých riešeniach taktiež nebolo vysvetlené, prečo Adel vylezie ako prvá na šiesty kopec - častokrát však stačilo len spomenúť, že nemôže istiť dvakrát po sebe.

3

opravovali: **Lujza Milotová** a **Martin „Iskra“ Dudjak**
najkrajšie riešenia: Rišo Prikler

28 riešení

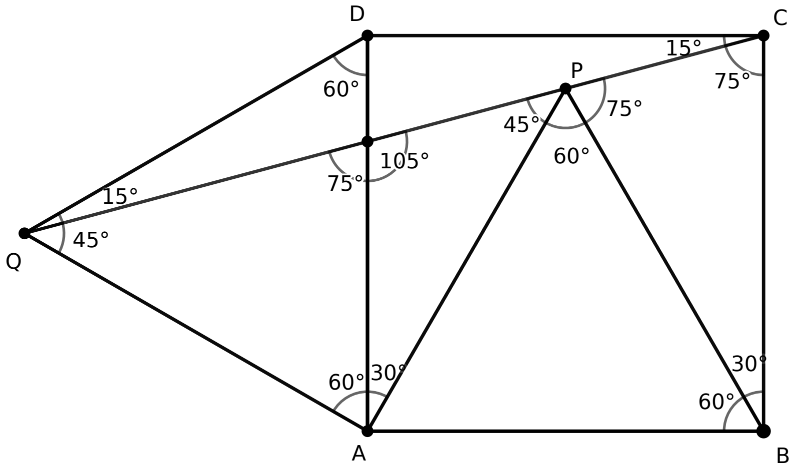
Zadanie

Máme stan so štvorcovým pôdorysom $ABCD$. Doň si Mihál položil jednu topánku (označme ju P) tak, aby trojuholník ABP bol rovnostranný. Druhú topánku (označme ju Q) si však zabudol pred stanom tak, že trojuholník ADQ je rovnostranný. Dokážte, že body P, Q a C ležia na jednej priamke.

Riešenie

Ak body P, Q a C ležia na jednej priamke, znamená to, že uhol CPQ je priamy, takže chceme dokázať práve to. $\angle ABC$ je vnútorný uhol v štvorci, čiže má $90°$. $\angle ABP$ je vnútorný uhol v rovnostrannom trojuholníku, čiže má $60°$. Potom uhol PBC má $90° - 60° = 30°$.
Trojuholník PBC je rovnoramenný s ramenami BP a BC, takže uhly $\angle BPC$ a $\angle BCP$ pri základni PC sú rovnako veľké. Vieme, že $|\angle PBC| = 30°$, takže uhly pri základni budú mať $\frac{180° - 30°}{2} = 75°$.

Trojuholník APQ je rovnoramenný s ramenami AP a AQ.Uhol $\angle PAQ$ sa skladá z uhlov $\angle DAQ$ a $\angle PAD$. Uhol DAQ je vnútorný uhol rovnostranného trojuholníka, čiže má 60°. Uhol PAD má $90° - 60° = 30°$. Potom uhol PAQ má $30° + 60° = 90°$. Uhly pri základni majú potom každý $\frac{180°-90°}{2} = 45°$. Uhol $\angle CPQ$ sa skladá z uhlov $\angle CPB$, $\angle APB$ a $\angle APQ$. Tieto uhly majú spolu $75° + 60° + 45° = 180°$, čiže uhol $\angle CPQ$ je priamy, a teda body P, Q a C ležia na jednej priamke.



Komentár

Väčšine z vás sa úlohu podarilo vyriešiť podobným spôsobom, aký je opísaný vo vzorovom riešení, ale našli sa aj takí, ktorí si obrázok narysovali a tak chceli dokázať, že body P, Q, C ležia na jednej priamke. To však, nie je matematicky korektný postup riešenia geometrickej úlohy, a tak sme týmto riešeniam nemohli udeliť veľa bodov.
Niektorí z vás vypočítali veľkosti iba niektorých uhlov a povedali, že podobne vypočítajú aj veľkosti ostatných uhlov, ale samotné výpočty nenapísali. Za také riešenia sme tiež nemohli udeliť plný počet bodov.

4

opravovali: **Michal Masrna** a **Ondrej Králik**
najkrajšie riešenia: Eva Krajčiová a Marie Kalasová

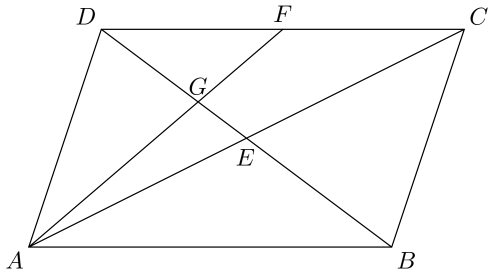
30 riešení

Zadanie

Dano má konzervu tvaru rovnobežníka $ABCD$. V akom pomere rozdeľuje priamka prechádzajúca vrcholom A a stredom strany CD uhlopriečku BD?

Riešenie

Keďže $ABCD$ je rovnobežník, tak strany AB a CD sú rovnobežné a rovnako dlhé a tiež strany BC a AD sú rovnobežné a rovnako dlhé. To znamená, že uhly BAG a GFD sú striedavé, čiže rovnako veľké. Zároveň uhly ABG a GDF sú striedavé, čiže rovnako veľké. To znamená, že trojuholníky ABG a FDG sú podľa vety *uu* podobné, čiže majú prislúchajúce strany v rovnakých pomeroch.
Ďalej vieme, že úsečka CD je rovnako dlhá ako úsečka AB. Keďže F je stred strany CD, tak DF bude mať dĺžku polovice zo strany CD, čiže polovicu zo strany AB. Trojuholníky ABG a FDG sú teda podobné a veľkosti ich prislúchajúcich strán sú v pomere $2:1$. Z toho priamo dostávame $|DG|:|BG| = 1:2$. Priamka AF teda delí uhlopriečku BD v pomere $1:2$.



Iné riešenie

Keďže $ABCD$ je rovnobežník, jeho uhlopriečky sa rozpoľujú, čo znamená, že E sa nachádza v strede BD aj AC. Pozrime sa na trojuholník ACD. Keďže E je stredom AC, úsečka DE je jeho ťažnicou. Rovnako, keďže F je stredom DC, musí byť aj AF ťažnicou. Priesečníkom ťažníc DE a AF je G, čiže G je ťažiskom trojuholníka ACD. Z toho vyplýva, že G sa nachádza v tretine ťažnice DE, bližšie k E.
Dostávame $|DG| = 2|GE|$, $|BE| = |DE| = |DG| + |GE| = 2|GE| + |GE| = 3|GE|$.
To znamená, že G rozdeľuje DB v pomere $\frac{|DG|}{|GE|+|BE|} = \frac{2|GE|}{|GE|+3|GE|} = \frac{2|GE|}{4|GE|} = \frac{1}{2}$.

Komentár
Väčšina z vás úlohu vyriešilo správne a dostalo plný počet bodov. Taktiež nás teší, že sme videli riešenia používajúce podobnosť aj riešenia využívajúce ťažnice.
Na druhej strane nás mrzí, že sme dostali aj riešenia, ktoré sa úlohu snažili narysovať a potom výsledný pomer odmerať. Tento postup je nepresný a matematicky nesprávny, preto za neho nemôžeme udeľovať žiadne body.

5 opravovali: **Mirka Horváthová** a **Peťo Kovács**
najkrajšie riešenie: Oliver Seman, Richard Prikler

28 riešení

Zadanie
Dano a Mihál na túre hrali nasledovnú hru: Mihál povedal kladné celé číslo a Dano ho musel zapísať ako súčet niekoľko po sebe idúcich kladných celých čísel. Ak sa mu to podarilo, vyhral. Pri akých číslach vie Dano vyhrať?

Riešenie
Ľubovoľné z čísel, ktoré Mihál povie, je buď párne alebo nepárne. Poďme si teda našu úlohu pre začiatok rozdeliť na 2 prípady – keď Mihál povie párne a keď povie nepárne číslo. Označme číslo, ktoré Mihál povie ako x.

Samostatne vyriešme prípad, kde $x = 1$. Dano vyhrať nevie, keďže 1 nemôžeme zapísať ako súčet aspoň 2 kladných celých po sebe idúcich čísel, keďže najmenšie celé kladné číslo je práve 1.

Pozrime sa najskôr na prípad, ak **Mihál povie nepárne číslo**. Keďže x je nepárne, vieme ho zapísať ako $2k + 1$, kde k je celé kladné číslo (zapísať ho tak vieme preto, lebo nepárne čísla majú zvyšok 1 po delení 2). Teraz si vieme všimnúť, že číslo $2k+1$ vieme zapísať ako $k + (k+1)$, čo sú 2 po sebe idúce kladné celé čísla. Dano teda vie týmto spôsobom vyhrať pre ľubovoľné nepárne číslo.

Prípad, kedy **Mihál povie párne číslo** si ešte rozdeľme na dve časti, podľa toho, či toto číslo má nejakého nepárneho deliteľa (okrem 1).

Ak má nepárneho deliteľa, označme ho ako n (x je teda deliteľné n bezo zvyšku). Potom vieme x zapísať ako:

$$x = \underbrace{m + \cdots + m}_{n}$$

kde $m = \frac{x}{n}$. Keďže n je nepárne číslo, tak máme aj nepárny počet m-iek. Jedno m sa teda nachádza v strede postupnosti a zvyšné môžeme popárovať podľa vzdialenosti od stredu postupnosti. Každý pár nám dá súčet $2m$.

Teraz vieme tento rad upraviť na rad po sebe idúcich čísel tak, aby súčet v každom páre zostal zachovaný:

$$\left(m - \frac{n-1}{2}\right) + \cdots + (m-1) + m + (m+1) + \cdots + \left(m + \frac{n-1}{2}\right)$$

Uvedomme si, že nie všetky členy postupnosti musia byť kladné. Vieme však to, že stredný člen postupnosti (m) je nutne nenulový (zároveň je aspoň 2, keďže x je párne), teda kladných členov je aspoň o 2 viac, ako tých nekladných. Povedzme si teda, že sa nám naľavo od stredu vyskytne 0 na $k+1$ mieste. Vzniknutý súčet vyzerá takto:

$$x = \underbrace{-k + \cdots + -1}_{k} + \underbrace{0}_{1} + \underbrace{1 + \cdots + k}_{k} + \cdots + \left(m + \frac{n-1}{2}\right)$$

Všimnime si, že podčiarknuté členy majú dokopy nulový súčet. Nula sama o sebe nič do súčtu nepridáva. Zvyšné členy vieme popárovať tak, aby dávali súčet 0. Podčiarknutú časť postupnosti teda môžeme jednoducho vyškrtnúť. Nevyškrtnutý zvyšok dáva stále súčet x, je to postupnosť po sebe idúcich čísel, a keďže sme vyškrtli $k+1$ nekladných a k kladných čísel, museli nám ostať aspoň dve neškrtnuté čísla (keďže kladných bolo aspoň o dve viac ako nekladných teda $k+3$).

Posledný prípad ktorý nám zostal je, že **Mihál povie párne číslo bez nepárneho deliteľa**. Takéto číslo bude mať v prvočíselnom rozklade samé 2-ky, keďže 2 je jediné párne prvočíslo. Teda nám ostali len mocniny čísla 2. Po vyskúšaní niekoľkých takýchto čísel si všimneme, že Dano asi nebude vedieť vyhrať.

Pre spor si predstavme, že by vyhrať vedel. Potom x vieme zapísať ako n po sebe idúcich čísel, z ktorých prvé označme ako a. V takom prípade sa súčet dá zapísať ako $\frac{n}{2} \cdot (2a+n-1)$, lebo ak popárujeme členy súčtu tak, aby ich výsledný súčet bol rovnaký, tak súčet každej takejto dvojice by bol $(2a+n-1)$ a takýchto párov bude $\frac{n}{2}$.

Upravme tento súčet:

$$\begin{aligned} x &= \frac{n}{2} \cdot (2a+n-1) \quad | \cdot 2 \\ 2x &= n \cdot (2a+n-1) \\ 2 \cdot \underbrace{2 \cdot \cdots \cdot 2}_{=x} &= n \cdot (2a+n-1) \end{aligned}$$

Vidíme, že ľavá strana nemá žiadneho nepárneho deliteľa, teda ani pravá strana rovnice nesmie mať žiadneho nepárneho deliteľa. Teda n nesmie byť nepárne. Ale ak je n párne, tak $(2a + n - 1)$ je nepárne. Teda rovnosť nemôže nastať a teda x nevieme zapísať ako n po sebe idúcich čísel.

Teda Dano vie vyhrať pre všetky kladné celé čísla okrem mocnín čísla 2 (teda aj okrem 1, keďže $2^0 = 1$).

Komentár

Úloha bola ťažká, a to nie len na správne vyriešenie, ale aj na dobré spísanie riešenia. Iba dvom riešiteľom sa podarilo napísať riešenie, ktorému by vôbec nič nechýbalo. Niektorým sa ale podarilo riešenie dotiahnuť skoro do úspešného konca. Vzhľadom na náročnosť úlohy je aj nižší bodový zisk úspechom (takže nezúfajte, ak ste nemali práve najviac bodov, aj tak ste sa s tým veľmi dobre popasovali :)).
Väčšina riešiteľov odhalila spôsob akým zapísať číslo s nepárnym deliteľom, avšak zabudla ošetriť prípad, keď ich postup vytvorí postupnosť zo zápornými číslami. Ďalšia skupina našla pár spôsobov, akými sa dajú čísla zapisovať, a tie čísla, ktoré sa im nepodarilo zapísať jedným z nájdených spôsobov prehlásili za také, kde Dano nevie vyhrať. To však ako dôkaz nestačí. Čo ak by zabudli na nejaký lepší spôsob?

6

opravovali: **Mimi Hanus** a **Martin „Kopy“ Kopčány** — 20 riešení
najkrajšie riešenie: Eva Krajčiová

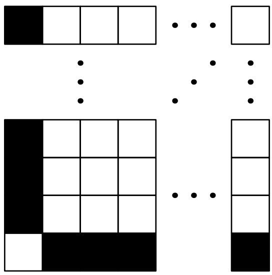
Zadanie

Spišo bol už hladný a tak sa rozhodol, že sa posilní čokoládou. Čokoláda má tvar štvorcovej mriežky s rozmermi $k \times k$. Spišo z nej začne vyjedať po jednom políčku. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že ak Spišo zje z čokolády n políčok, tak budú s istotou existovať 3 zjedené políčka, ktorých stredy tvoria pravouhlý trojuholník, ktorého odvesny sú rovnobežné so stranami štvorcovej čokolády.

Riešenie

Položme si radšej otázku, koľko najviac môže Spišo zjesť políčok tak, aby trojuholník podľa zadania nevytvoril. Hľadané n potom bude číslo o 1 vyššie, keďže tento vyšší počet je príliš vysoký na to, aby sa Spišo vyhol trojuholníku, a pri nižšom sa mu vyhnúť bude vedieť.
V trojuholníku (budeme vždy myslieť iba taký, aký spomína zadanie, teda pravouhlý s vrcholmi v stredoch políčok a odvesnami rovnobežnými so stranami čokolády) vrchol s pravým uhlom má vo svojom riadku ďalšie zjedené políčko a vo svojom stĺpci tiež ďalšie zjedené políčko.
Zároveň vždy, keď nejaké zjedené políčko nie je jediné vo svojom stĺpci ani jediné vo svojom riadku, je pravouhlým vrcholom trojuholníka.

Keď teraz nazveme stĺpec alebo riadok čokolády *stĺdok* a stĺdok s najviac jedným zjedeným políčkom *skúpy*, trojuholník v mriežke existuje práve vtedy, keď existuje zjedené políčko nachádzajúce sa v neskúpom riadku a neskúpom stĺpci.
Majme rozloženie zjedených políčok v čokoláde $k \times k$, kde neexistuje trojuholník. Každé zjedené políčko je v skúpom riadku alebo v skúpom stĺpci a zároveň v každom skúpom stĺdku je najviac jedno zjedené políčko, takže skúpych stĺdkov je aspoň toľko, koľko zjedených políčok.
Teraz rozoberme tri možnosti podľa toho, či všetky riadky sú skúpe, všetky stĺpce sú skúpe, alebo ani jedno z toho (aspoň jedna z týchto troch možností nutne nastáva).
Ak sú všetky riadky skúpe, v každom riadku je najviac jedno zjedené políčko, čiže je ich najviac k. Rovnako, ak sú všetky stĺpce skúpe.
Ak nie sú všetky stĺpce ani všetky riadky skúpe, skúpych stĺpcov je najviac $k-1$ a skúpych riadkov rovnako. Skúpych stĺdkov dokopy, a teda aj zjedených políčok je potom najviac $2k-2$. Z toho plynie, že zjedených políčok je alebo najviac k, alebo najviac $2k-2$. Inými slovami, ich počet nemôže presiahnuť najväčšie z čísel k a $2k-2$.
Keď $k = 1$, toto maximum sa rovná $k = 1$, pre všetky väčšie k je to $2k-2$. A maximum je dosiahnuteľné – keď $k = 1$, Spišo zje jediné políčko čokolády, inak zje z jedného riadka a jedného stĺpca všetky políčka okrem ich priesečníka (ako na obrázku).



Pre k väčšie než 1 je výsledok $2k-1$, kde sa Spišo nevie vyhnúť zjedeniu trojuholníka. Keď $k = 1$, odpoveďou je 2, aj keď čokoláda toľko políčok nemá.

Komentár

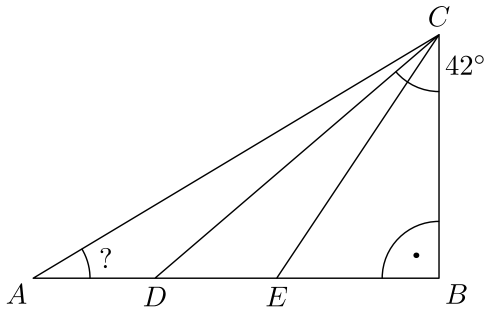
Väčšina z vás našla spôsob, ktorým Spišo dokáže zjesť $2k-2$ políčok. Tým nám dokázali, že $n \geq 2k-1$. Avšak týmto riešeniam zväčša chýbalo zdôvodnenie, že n nie je ešte väčšie – že Spišo nevie (ak $k > 1$) zjesť viac než $2k-2$ políčok bez toho, aby vytvoril trojuholník.
Niektorí ste si možno ani neuvedomili, že je to potrebné, ale išlo o väčšinu úlohy (ako vidno aj zo vzorového riešenia). Rovnako to býva pri väčšine úloh tohto typu (najmenší alebo najväčší počet, umožňujúci nejakú konštrukciu), tak si na to do budúcna dávajte pozor :)

Zadania 2. série úloh letného semestra

Riešenia pošlite najneskôr do **2. mája 2022**

Úloha 1

Na mape sú mestá A, B, C, D a E. Dorot sa chce zorientovať pomocou tejto mapy, a preto chce nájsť veľkosť uhla BAC, ak vie že priamka CD rozdeľuje uhol ACE na polovicu, $|AE| = |EC|$, veľkosť uhla DCB je 42 stupňov a uhol pri vrchole B je pravý.



Úloha 2

Na túre boli štyri dievčatá Kel, Lujza, Maxi a Naťa a dvaja chlapci Dano a Erik. Počas túry si vymenili vaky tak, že každý mal po výmene (ale aj pred ňou) práve jeden vak. Boli povedané nasledujúce pravdivé výroky:

- *Kel: „Môj vak má Dano“,*
- *Lujza: „Môj vak má ten, koho vak má Erik“,*
- *Maxi: „Môj vak má ten, koho vak má ten, koho vak má Erik“,*
- *Naťa: „Môj vak má ten, koho vak má ten, koho vak má ten, koho vak mám ja“.*

Kto môže mať koho vak? Nájdite všetky možnosti a ukážte, že iné neexistujú.

Úloha 3

Juro sa chcel ísť pozrieť na vrch vyhliadkovej veže, ktorá má 1000 poschodí. Povedal si, že zvládne vyšliapať najviac prvých 200 poschodí (prízemie berieme ako nulté poschodie). Zvyšok cesty chce ísť výťahom. Výťah má tlačidlá +1 poschodie, +3 poschodia, +9 poschodí, +27 poschodí, +81 poschodí. Koľko najviac stlačení Jano bude potrebovať na to, aby výťah dostal na 1000. poschodie potom, čo doň na niektorom poschodí nastúpi?

Úloha 4
Paťo si nesie na túre cukríky v dvoch balíčkoch. V prvom je ich m a v druhom n, pričom m a n sú kladné celé čísla. Paťo vie buď zobrať z oboch balíčkov rovnaký počet cukríkov a zjesť ich, alebo vie zdvojnásobiť počet cukríkov v ľubovoľnom z balíčkov. Pre aké hodnoty m a n vie Paťo po konečnom počte krokov vyprázdniť oba balíčky s cukríkmi? A čo v prípade, ze by nemohol počet cukríkov zdvojnásobovať, ale mohol by ich strojnásobovať?

Úloha 5
Na stôl v altánku Jano nakreslil priamku a na nej vyznačil ***v tomto poradí*** *body A, B, C a D tak, že $|AB| = |CD|$. Nad priamku potom dvakrát pichol nožíkom. Vzniknuté body označil P a Q. Platí, že trojuholníky ABP a BDQ sú rovnostranné. Dokážte, že trojuholník CPQ je rovnostranný.*

Úloha 6
V Košiciach sú tri turistické kluby, z ktorých má každý 2021 členov. Zároveň platí, že nikto nie je členom viacerých turistických klubov. Tiež vieme, že každý turista má medzi turistami z iných klubov dokopy aspoň 2022 kamarátov. Dokážte, že existuje trojica turistov z rôznych klubov, v rámci ktorej sa priatelí každý s každým.

Poradie po 1. sérii letného semestra

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1.	Richard Prikler	Z8	GJARMPO	9	9	9	9	9	3	54
2. - 3.	Michal Vodička	Z8	GAlejKE	9	9	9	9	8	3	53
	Eva Krajčiová	Z9	GAlejKE	9	9	9	9	8	9	53
4. - 5.	Oliver Seman	Z9	GAlejKE	9	9	9	9	9	7	52
	Janka Urbánová	Z8	GAlejKE	9	9	9	9	7	0	52
6.	Žofia Bartová	Z7	ZBajkBA	9	9	9	9	5	3	50
7.	Martina Osuská	Z8	ZDrJDMA	9	9	9	9	4	3	49
8. - 9.	Nina Hudáková	Z7	GAlejKE	9	9	9	9	3	3	48
	Ľuboš Šesták	Z7	ZVývoBA	9	9	9	9	-	3	48
10.	Alenka Bálintová	Z8	CZRZaZA	9	7	9	7	8	3	47
11.	Marie Kasalová	Z7	GTruhla	9	8	5	9	2	3	43
12.	Magdaléna Škriabová	Z7	ZKro4KE	9	9	6	5	3	-	41
13.	Tomáš Sukeľ	Z9	ZJŠveHE	9	9	9	9	4	0	40
14.	Natália Tkáčová	Z9	ZLevoSN	9	5	9	9	6	-	38
15.	Ondrej Tóth	Z8	GVaršZA	7	4	9	9	3	0	36
16.	Severín Karabinoš	Z8	GAlejKE	8	9	6	5	-	-	33
17.	Dušan Ivan	Z9	ZKro4KE	9	0	9	9	1	3	31
18.	Michal Válek	Z7	ZKro4KE	-	-	9	9	-	3	30
19.	Linda Mičicová	Z9	GMMH9LM	9	9	0	2	5	3	28
20. - 22.	Matej Válek	Z7	ZKro4KE	-	-	9	9	-	-	27
	Boris Köröš	Z8	GAlejKE	9	9	9	-	-	-	27
	Lenka Harmanska	Z7	ZKro4KE	-	-	9	9	-	-	27
23.	Tomáš Boledovič	Z9	CZNarBA	-	9	4	9	-	-	22
24.	Jakub Šimon Konrád	Z8	ZKe28KE	3	2	1	9	1	3	20
25.	Nina Anna Betáková	Z9	ZJŠveHE	5	-	9	3	2	-	19
26.	Lukáš Hanes	Z9	ZKro4KE	-	-	9	9	-	-	18
27.	Miriam Varechová	Z7	ZKro4KE	9	-	-	-	4	-	17
28.	Martin Azari	Z7	ZKro4KE	7	-	-	4	-	-	15
29. - 31.	Barbora Menšíková	Z7	ZKro4KE	3	7	-	-	-	-	13
	Daniela Harmanska	Z7	ZKro4KE	-	2	9	-	-	-	13
	René Ivan	Z7	ZKro4KE	7	-	-	3	-	-	13
32.	Ján Štiavnický	Z8	ZKro4KE	9	-	-	0	0	0	9
33.	Gorazd Korečko	Z7	ZKro4KE	3	-	-	-	2	-	7
34.	Oskar Cacara	Z9	ZKro4KE	-	-	-	-	4	2	6
35.	Samuel Šimurda	Z7	ZKro4KE	4	-	-	-	0	-	4
36. - 38.	Marko Strompf	Z7	ZKro4KE	-	1	-	-	1	-	3
	Richard Orosz	Z7	ZKro4KE	-	-	-	1	1	-	3
	Bronislava Hájasová	Z8	ZGbelce	3	-	-	-	0	-	3
39.	Šimon Varga	Z7	ZKro4KE	-	-	0	1	-	-	1
40. - 41.	Tomáš Polomský	Z8	ZKro4KE	-	-	-	-	0	-	0
	Jakub Stramba	Z7	ZKro4KE	-	-	-	-	0	0	0

Názov: *MATIK* – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 5 • Apríl 2022 • Letný semester 35. ročníka

Web: `matik.strom.sk`

E-mail: `matik@strom.sk`

Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe, poštou a len v prípade poruchy na adrese `riesenia@strom.sk`

Organizátor: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach,
Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice
Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice