Korešpondenčný Matematický Seminár

MATIK

Číslo 3 — Ročník 37 matik.strom.sk

Ahoj!

Je tu ďalší časopis *MATIK*a, ktorý prináša vzorové riešenia druhej série. Okrem toho, že je posledný v tomto semestri, je výnimočný aj tým, že s ním prichádzajú aj pozvánky pre tých najšikovnejších z vás. Tí sa môžu tešiť na odmenu vo forme týždňového netradičného sústredenia v obklopení skvelými účastníkmi a vedúcimi. Ak sa ti tam tentoraz nepodarilo dostať, nezúfaj. Pevne veríme, že nabudúce sa s tebou uvidíme!

vedúci *MATIK*a

Ako bude

Vianočný Maxiklub

Tradične v čase vianoc sa bude konať Vianočný Maxiklub, čo je vianočné stretnutie STROMákov! Vítaní sú všetci, účastníci, vedúci, bývalí vedúci a každý, kto má rád Strom a Stromákov. Stretneme sa 27. 12. o 14:00 v miestnosti P19 na PF UPJŠ, Jesenná 5 v Košiciach.

Tábor mladých matematikov

Ak premýšľaš, čo s časom počas ďalších letných prázdnin, máme pre teba dobré správy! Už vieme, kedy a kde sa bude konať TMM, teda Tábor mladých matematikov! V kalendári si rezervuj 29. júla až 5. augusta 2024, pretože práve vtedy sa ocitneme v Rekreačnom stredisku Zelený breh na najúžasnejšej akcii roka.
Nevieš, čo je TMM? Tábor mladých matematikov je ako sústredenie, avšak je o 2 dni dlhšie, takže o 2 dni lepšie! Viac informácií a samotnú pozvánku s prihlasovaním nájdeš na `https://matik.strom.sk/tmm/`.

Minisústredenia na školách

Niektoré zážitkové a vzdelávacie aktivity, ktoré robíme, by sme radi priniesli trošku bližšie aj k skupine žiakov ktorí neriešia naše semináre a to v podobe krátkeho matematického sústredenia priamo na škole. V spolupráci so školami organizujeme 1 alebo 2-dňové matematické „minisústredenia“ pre 30 až 60 žiakov 5. - 9. ročníka (vždy rozsah najviac 4 ročníkov). Sústredenia prebiehajú priamo v priestoroch školy. Viac sa dozviete na `https://matik.strom.sk/sk/aktivity/minisustredenia/`.

Vzorové riešenia 2. série úloh zimného semestra

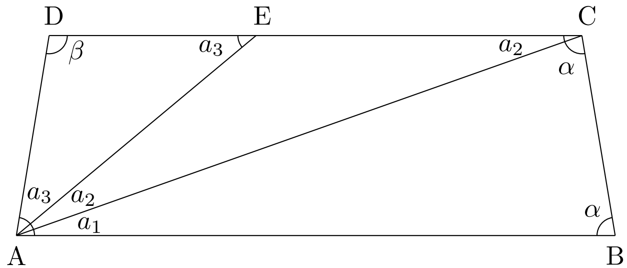
1 opravovali: **Martin „Šmili“ Šmilňák** a **Lucka Kleščová** • 56 riešení
najkrajšie riešenia: Vojto Bálint, Daniel Ryan Takáč

Zadanie

1. aptembra 19XX
Nalodili sme sa do ponorky. Jaj, konečne vietor v plachtách! I keď vlastne plachty nemáme, lebo sme v ponorke. Ale keby sme ich mali, boli by tvaru rovnoramenného lichobežníka $ABCD$ so základňami AB a CD, v ktorom by platilo, že $|AB| > |CD|$. Na strane CD by ležal bod E tak, že trojuholník ACE by bol rovnoramenný so základňou AC a AED by bol rovnoramenný so základňou AE. Trojuholník ABC by bol tiež rovnoramenný, so základňou BC. No počkať, ale potom aký veľký by bol uhol CAE?

Riešenie

Z vlastností rovnoramenného lichobežníka vyplýva, že uhly pri jednej základni sú rovnaké. Označme si teda uhly pri základni AB ako α a uhly pri základni CD ako β. Z vlastností lichobežníka taktiež vyplýva, že súčet uhlov pri jednom ramene je 180°, teda $\alpha + \beta = 180°$.
Zo zadania vieme, že náš rovnoramenný lichobežník rozdelia úsečky AE a AC na tri rovnoramenné trojuholníky. Označme si uhly pri vrchole A v týchto trojuholníkoch ako a_1 v trojuholníku ABC, a_2 v trojuholníku ACE a a_3 v trojuholníku AED.



Zo zadania vieme, že v trojuholníku AED bude strana AE základňou a strany AD, DE ramenami. Poďme si teda určiť veľkosť uhla pri základni, ktorým bude a_3.

$$2a_3 = 180° - \beta$$
$$2a_3 = \alpha$$
$$a_3 = \frac{\alpha}{2}$$

.

Zadanie nám taktiež hovorí, že v trojuholníku ACE bude základňou strana AC. Uhol pri vrchole E si vieme vyjadriť ako $|\angle AEC| = 180° - a_3$, keďže je susedný uhlu a_3. Vieme si teda určiť aj veľkosť uhla a_2.

$$\begin{aligned} 2a_2 &= 180° - \angle AEC \\ 2a_2 &= 180° - (180° - a_3) \\ 2a_2 &= 180° - 180° + \frac{\alpha}{2} \\ a_2 &= \frac{\alpha}{4} \end{aligned}$$

Poďme sa pozrieť na uhol a_1 v trojuholníku ABC. Vieme, že BC je základňa v trojuholníku ABC, teda $|\angle ACB| = \alpha$. Z tohto si vieme vyjadriť uhol a_1 ako:

$$a_1 = 180° - 2\alpha$$

Teraz máme vyjadrené všetky uhly pomocou uhla α. Vieme, že $\alpha = a_1 + a_2 + a_3$. Dosaďme si vyjadrené uhly a vypočítajme veľkosť uhla α.

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= \alpha \\ 180° - 2\alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} &= \alpha \qquad / \cdot 4 \\ 720° - 8\alpha + \alpha + 2\alpha &= 4\alpha \\ 720° &= 9\alpha \\ \alpha &= 80° \end{aligned}$$

Keďže už poznáme veľkosť uhla α, poďme dopočítať veľkosť uhla a_2. Uhol a_2 sme si vyššie vyjadrili ako $a_2 = \frac{\alpha}{4}$. Poďme si teda dopočítať jeho veľkosť

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\alpha}{4} \\ a_2 &= \frac{80°}{4} \\ a_2 &= 20° \end{aligned}$$

Veľkosť uhla CAE je $20°$.

2

opravovali: **Martin „Štyri“ Mentel** a **Jano Richnavský** 42 riešení
najkrajšie riešenia: Alena Chladná, Nina Hudáková

Zadanie

2. aptembra 19XX
Náš palubný kartograf Peťo sa trocha zamotal. Pamätal si pár informácií, no nie presné číslo priamych ciest vedúcich medzi naším mestom a Atlantídou, naším mestom a dokmi a medzi Atlantídou a dokmi. Vedel ale, že z nášho mesta sa do dokov vieme dostať 11 rôznymi spôsobmi vrátane tých cez Atlantídu a do Atlantídy 13 rôznymi spôsobmi vrátane tých cez doky. Zároveň vedel, že medzi každou dvojicou miest vedie aspoň jedna priama cesta. Koľko existuje priamych ciest medzi jednotlivými miestami? Nájdite všetky možnosti a vysvetlite, prečo iné neexistujú.

Riešenie

Ak máme tri mestá (označme ich A, B a C), počet ciest z mesta A do mesta B je rovný súčtu počtu priamych ciest medzi týmito dvoma mestami a počtu nepriamych ciest, ktoré vedú cez mesto C. Počet nepriamych ciest z A do B je rovný súčinu počtu ciest z A do C a počtu z C do B (napr. ak by sme mali z A do C 3 cesty a z C do B 2 cesty, pre každú z troch ciest medzi A a C sa vieme vydať ktoroukoľvek z dvoch ciest medzi C a B, teda spolu existuje $3 \cdot 2 = 6$ nepriamych ciest).
Ak označíme počet priamych ciest medzi Atlantídou a dokmi neznámou a, medzi dokmi a naším mestom neznámou b, a medzi Atlantídou a naším mestom neznámou c, môžeme prepísať informácie zo zadania, ako

$$b + a \cdot c = 11, \tag{1}$$
$$c + a \cdot b = 13. \tag{2}$$

Keďže medzi každou dvojicou miest vedie aspoň jedna priama cesta, vieme, že a, b aj c sú kladné celé čísla. Ak ku ľavej strane prvej rovnosti pripočítame ľavú stranu druhej rovnosti a k pravej strane prvej rovnosti pripočítame pravú stranu druhej rovnosti, dostaneme novú rovnosť:

$$(b + a \cdot c) + (c + a \cdot b) = 11 + 13.$$

Následne môžeme v tejto rovnosti odstrániť zátvorky, preusporiadať poradie a jemne členy prepísať:

$$b + a \cdot c + c + a \cdot b = 24,$$
$$a \cdot b + 1 \cdot b + a \cdot c + 1 \cdot c = 24.$$

Vidíme, že b aj c sa vyskytujú na ľavej strane $(a+1)$-krát, čo znamená, že aj súčet $b+c$ sa vyskytuje na ľavej strane $(a+1)$-krát. Preto môžeme ľavú stranu prepísať na $(a+1)\cdot(b+c)$:

$$(a+1)\cdot(b+c)=24.$$

Keďže a, b aj c sú kladné celé čísla, obe zátvorky majú celočíselné hodnoty väčšie alebo rovné 2. Z toho vyplýva, že musia byť kladnými deliteľmi čísla 24. Takých možností je len niekoľko:

1. $(a+1)=2$, $(b+c)=12$ – z prvého vzťahu vyplýva, že $a=2-1=1$. Po dosadení do pôvodných rovností dostávame: $b+1\cdot c=11$ a $c+1\cdot b=13$, čo však očividne nemôže platiť, keďže ide o súčet tých istých dvoch čísel s dvomi rôznymi výsledkami.

2. $(a+1)=3$, $(b+c)=8$ – z prvého vzťahu vyplýva, že $a=3-1=2$. Po dosadení do pôvodných rovností dostávame: $b+2\cdot c=11$ a $c+2\cdot b=13$. V druhej rovnosti je oproti prvej o jedno b viac a o jedno c menej. Preto musí byť b o 2 väčšie ako c. Aby platilo $b+c=8$, musí $b=5$ a $c=3$. Po dosadení týchto hodnôt do oboch rovníc overíme, že sme našli prvé riešenie.

3. $(a+1)=4$, $(b+c)=6$ – z prvého vzťahu vyplýva, že $a=4-1=3$. Po dosadení do pôvodných rovností dostávame: $b+3\cdot c=11$ a $c+3\cdot b=13$. V druhej rovnosti je oproti prvej o dve b viac a o dve c menej. Keďže je v celkovom súčte rozdiel 2, musí byť b o 1 väčšie ako c, to znamená, že jedno z čísel bude určite párne a druhé nepárne. Číslo 6 však nevieme dostať ako súčet párneho a nepárneho kladného celého čísla, preto táto možnosť nevyhovuje.

4. $(a+1)=6$, $(b+c)=4$ – z prvého vzťahu vyplýva, že $a=6-1=5$. Po dosadení do pôvodných rovností dostávame: $b+5\cdot c=11$ a $c+5\cdot b=13$. V druhej rovnosti je oproti prvej o štyri b viac a o štyri c menej. Keďže je v celkovom súčte rozdiel 2, muselo by b byť o $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ väčšie ako c, čo ale nie je možné, keďže obe musia byť kladné celé čísla.

5. $(a+1)=8$, $(b+c)=3$ – z prvého vzťahu vyplýva, že $a=8-1=7$. Po dosadení do pôvodných rovností dostávame: $b+7\cdot c=11$ a $c+7\cdot b=13$. Všimnime si, že $7\cdot 2=14$, čo je už viac ako 13, preto b aj c môžu byť najviac 1. Ak však dosadíme za a číslo 7 a za b a c číslo 1, dostaneme: $1+7\cdot 1\neq 11$ a $1+7\cdot 1\neq 13$, preto ani táto možnosť nevedie k správnemu riešeniu.

6. $(a+1)=12$, $(b+c)=2$ – z prvého vzťahu vyplýva, že $a=12-1=11$. Po dosadení do pôvodných rovností dostávame $b+11\cdot c=11$ a $c+11\cdot b=13$. Všimnime si, že $b+11\cdot c$ bude určite väčšie ako 11, preto ani táto možnosť nevedie k správnemu riešeniu.

Keďže iné možnosti dvojice deliteľov čísla 24 neexistujú, overili sme všetky možnosti a našli len jedno správne riešenie, v ktorom sú medzi Atlantídou a dokmi 2 priame cesty, medzi dokmi a naším mestom 5 priamych ciest a medzi Atlantídou a naším mestom 3 cesty.

Komentár

Veľká väčšina riešiteľov sa rozhodla vydať nepeknou cestou – postupným skúšaním všetkých možností, podľa ktorých vieme dosadiť hodnoty do $b + a \cdot c = 11$. Okrem toho, že je takéto riešenie neelegantné, mnoho z vás zabudlo na časť možností – takéto riešenie potom nie je kompletné a nemôže byť ohodnotené plným počtom bodov. Z toho dôvodu uvádzame relatívne obsiahle vzorové riešenie, z ktorého, dúfame, si čo najviac z vás vezme niečo nové – najmä ak ide o prácu s premennými v rovniciach. Vo vzorovom riešení sa skúšaniu možností nevyhneme, je ich však oveľa menej a vieme ich systematicky prejsť. Napriek komplikovanosti mnohých riešení ste si však s úlohou poradili úspešne.

3

opravovali: **Martinka Osuská** a **Ľubo Vargovčík**

najkrajšie riešenie: Elena Kundríková

44 riešení

Zadanie

3. aptembra 19XX

Heuréka! Veže bájnej Atlantídy sa mi týčia v zornom poli. "Vitajte! Ja som morský Vilo," privítal nás muž so žiabrami namiesto uší, keď sme vystúpili z ponorky. Pozval nás na partiu tzv. atlantického pokra, ktorý hrá 2023 hráčov usadených v kruhu. V hre sa nachádza 4046 hracích kariet, z každej hodnoty od 1 do 2023 práve dva kusy. Každý hráč začína s dvomi kartami rôznych hodnôt. V každom ťahu vyberie každý hráč nižšiu z dvoch kariet, čo má na ruke a pošle ju hráčovi po pravej ruke. Dokážte, že po niekoľkých ťahoch tejto hry nastane, že aspoň jeden z hráčov bude mať v ruke dve karty rovnakej hodnoty.

Riešenie

V prvej časti riešenia dokážeme, že niektoré karty sa od istého momentu už nebudú hýbať. Inak povedané, po nejakom počte ťahov (konkrétne číslo nás nebude zaujímať, ide iba o to, že sa to niekedy stane) sa už žiadna z týchto kariet nikdy neposunie.

Karta s hodnotou 2023 nikdy nebude nižšia z dvojice kariet, preto sa tieto dve karty počas celej hry nepohnú. Čo karty s hodnotou 2022? Tieto karty by mohli byť nižšie z dvojice iba ak by boli v dvojici s kartou s hodnotou 2023, o ktorých ale vieme, že sa nehýbu. Preto sa každá z kariet s hodnotou 2022 pohne maximálne dva krát, a teda po druhom ťahu sa už tieto karty nikdy nepohnú. Karty s hodnotami 2021 sa pohnú, iba ak sú vo dvojici s kartou s hodnotou 2023 alebo 2022. Vieme však, že po druhom ťahu sa už karty s hodnotami 2023 a 2022 nehýbu - a teda karty

s hodnotami 2021 sa po druhom ťahu pohnú maximálne 4-krát, čo znamená, že po celkovo šiestom ťahu sa už nikdy nepohnú.
Podobne v našich úvahách pokračujeme až po hodnotu 1013. Vieme, že od istého ťahu sa karty s hodnotou väčšou ako k už nehýbu, to znamená, že karta s hodnotou k sa odvtedy pohne najviac toľko krát, koľko je kariet s vyššou hodnotou. Dôjdeme k záveru, že po niekoľko ťahoch (konkrétna hodnota pre riešenie nie je dôležitá, stačí že vieme, že sa to stane), sa karty s hodnotami 1013 až 2023 už nebudú hýbať. To je spolu 2022 kariet.
Pre spor predpokladajme, že ešte stále žiaden hráč nemá na ruke dvojicu rovnakých kariet. To znamená, že 2022 hráčov má na ruke po jednej z týchto 2022 kariet. Iba jeden z hráčov (označme ho hráč X) nemá na ruke kartu hodnoty 1013 a viac. Teraz sa pozrime na karty s hodnotou 1012. Ak je jedna z nich na ruke hráča iného ako X, tak je menšia z dvojice a bude sa hýbať doprava, až kým nepríde na ruku hráča X. Akonáhle príde na ruku hráča X, tak je väčšia z dvojice a teda sa už nikdy neposunie. To ale znamená, že eventuálne obe karty s hodnotou 1012 prídu na ruku hráča X a podmienka zo zadania sa tak naplní.

Komentár

Mnohí z vás ste skúsili na začiatku zmenšiť počet kartičiek a hráčov, aby sa vám to riešilo jednoduchšie. Je to často dobrý spôsob riešenia, pretože viete ľahšie odhaliť nejakú myšlienku na menších číslach. Problém však nastal vo chvíli, kedy bolo treba riešenie z menších čísel aplikovať na pôvodné čísla zo zadania. Netreba zabúdať na tento dôležitý krok a dostatočne opísať ako a prečo to funguje aj na väčších číslach.

4

opravovali: **Matúš Libák** a **Lenka Hake**
najkrajšie riešenie: Dominik Feňovčík, Vojto Bálint

25 riešení

Zadanie

4. aptembra 19XX
Miestni obyvatelia nám chceli ukázať, že sú múdrejší než my, tak si vytvorili test, z ktorého sa dalo získať 0 až 15 bodov. Spolu sa ho napokon podrobilo 9000 ľudí. Nastal ale istý... incident. Po bezpečnostnej kontrole sa záznamy z testu zmenili. Všetky záznamy, ktoré obsahovali skóre $1, 2$ alebo 3 sa zmenili na skóre 0. Všetky záznamy, ktoré obsahovali skóre $12, 13$ alebo 14 sa zmenili na skóre 15. Hodnotiaca komisia si incident všimla kvôli tomu, že priemerné skóre kleslo presne o desatinu bodu. Predseda komisie tvrdil, že pôvodne existovali dve rôzne hodnoty skóre, pre ktoré platí, že počty ľudí s danými skóre sa líšia aspoň o 150. Má pravdu?

Riešenie

Priemerné skóre počítame, ako súčet bodov všetkých ľudí vydelený počtom ľudí. Keďže ľudí bolo 9000, tak celkový súčet bodov klesol o $\frac{1}{10} \cdot 9000 = 900$. Ak niekto v teste dosiahol skóre 1, tak jeho skóre kleslo o 1, ak dosiahol skóre 2, tak kleslo o 2 a ak dosiahol skóre 3, tak kleslo o 3. Naopak, ak niekto dosiahol skóre 14, tak jeho skóre stúplo o 1, ak 13, tak jeho skóre stúplo o 2 a ak 12, tak jeho skóre stúplo o 3. Záznamy ľudí s inými hodnotami skóre sa nezmenili.

Poďme úlohu riešiť sporom. Podľa predsedu komisie pôvodne existovali dve rôzne hodnoty skóre, pre ktoré platí, že počty ľudí s danými skóre sa líšia aspoň o 150. Predpokladajme, že existujú také záznamy z testu, pre ktoré tvrdenie predsedu neplatí, čiže pre všetky hodnoty skóre sa počty ľudí líšia nanajvýš o 149. Pre takéto záznamy musí byť počet ľudí, ktorí dosiahli skóre 1, maximálne o 149 väčší, ako počet ľudí, ktorí dosiahli skóre 14, inak by bol medzi nimi rozdiel aspoň 150. Rovnako musí byť počet ľudí, ktorí dosiahli skóre 2 najviac o 149 väčší od počtu ľudí, ktorí dosiahli skóre 13. To isté platí aj o ľuďoch, ktorí dosiahli skóre 3 a 12. Počty ľudí s inými hodnotami skóre nás momentálne nezaujímajú, keďže ich výsledky sa nezmenili, a teda nemali vplyv na zmenu celkového priemeru.

Označme si počet ľudí so skóre 14 ako x, 13 ako y a 12 ako z. Potom počty ľudí so skóre 1, 2 a 3 môžu byť postupne najviac $x+149$, $y+149$ a $z+149$. To znamená, že celkovo skóre stúplo o $x+2y+3z$ a klesnúť mohlo najviac o $(x+149)\cdot 1+(y+149)\cdot 2+(z+149)\cdot 3 = x+2y+3z+149\cdot(1+2+3) = x+2y+3z+894$. Vieme, že celkové skóre kleslo presne o 900, takže musí platiť $(x+2y+3z+894)-(x+2y+3z) \geq 900$, čo je zjavne spor, keďže $894 < 900$. Teda pre niektorú z dvojíc 1-14, 2-13 a 3-12 sa musia počty ľudí s danými skóre líšiť aspoň o 150. Zároveň to znamená, že neexistujú záznamy, pre ktoré by predsedovo tvrdenie neplatilo, čiže predseda má pravdu.

Komentár

Mali sme veľa pekných riešení s dobrým postupom, ale nesprávnou odpoveďou, kvôli zle pochopenej otázke zo zadania. Už pri čítaní úlohy sa treba uistiť, že jej dobre rozumieme, aby sme náhodou neriešili celkom inú úlohu, než bolo myslené. Ak zadanie náhodou nie je úplne jasné alebo máte akékoľvek pochybnosti, vždy sa nás na to môžete opýtať v diskusii pri danej úlohe na našej stránke. Taktiež pripomíname, že každé riešenie by malo obsahovať jednoznačnú odpoveď na otázku v zadaní :)

5

opravovali: **Martin „Iskra“ Dudjak** a **Matúš Masrna**
najkrajšie riešenia: Kika Jančigová, Dominik Feňovčík

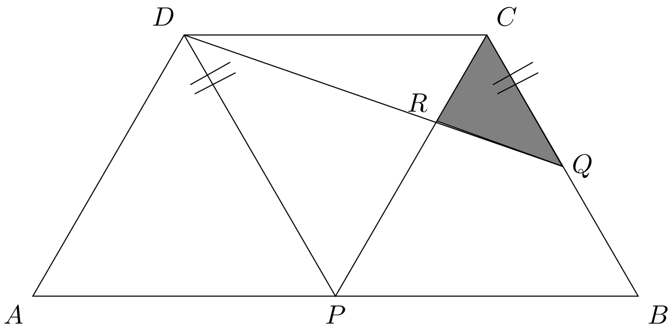
32 riešení

Zadanie

5. aptembra 19XX

Dnes sme boli pozvaní na audienciu k starostovi Atlantídy. Erb Atlantídy má tvar lichobežníka $ABCD$ pričom platí, že AB je rovnobežná s CD a $|AB| = 2\cdot|CD|$. Daný je bod P v strede strany AB a bod Q na strane BC. Obsah trojuholníka PBQ je 3 a obsah celého lichobežníka je 18. Nech R je priesečník úsečiek PC a QD. Aký je obsah trojuholníka RQC?

Riešenie



Poznáme obsah lichobežníka $ABCD$ a trojuholníka PBQ. Polohu bodu Q vieme vyjadriť zo vzorca na výpočet obsahu lichobežníka:

$$S = \frac{(a+c)\cdot v}{2}$$
$$18 = \frac{3\cdot |CD|\cdot v}{2}$$
$$|CD|\cdot v = 12$$

Definujme si v_2, ako výšku trojuholníka PBQ na stranu PB:

$$\frac{|CD|\cdot v_2}{2} = 3$$
$$|CD|\cdot v_2 = 6$$

Vyjadrime si teraz z týchto rovníc výšky v a v_2:

$$v_2 = \frac{6}{|CD|}$$
$$v = \frac{12}{|CD|}$$

Teraz si vieme vyjadriť pomer oboch výšok:

$$\frac{v}{v_2} = \frac{\frac{12}{|CD|}}{\frac{6}{|CD|}} = 2$$

Odtiaľ vyplýva, že bod Q sa nachádza v polovici výšky lichobežníka, a teda aj v strede úsečky BC. Pozrime sa na štvoruholník $PQCD$. Úsečky CD a PB sú rovnako dlhé a zároveň rovnobežné, preto sú aj PD a CQ rovnobežné, teda $PQCD$ je lichobežník. Platí, že

$$|PD| = 2 \cdot |CQ|,$$

pretože $PBCD$ je kosodĺžnik. Obsah tohto kosodĺžnika si vieme vypočítať:

$$S_{PBCD} = a \cdot v = |CD| \cdot v = 12$$

Obsah lichobežníka $PQCD$ vypočítame ako rozdiel obsahu kosodĺžnika a trojuholníka PBQ:

$$S_{PQCD} = S_{PBCD} - S_{PBQ} = 12 - 3 = 9$$

Trojuholníky PQR a CRD majú rovnaký obsah, lebo trojuholníky CQP a CQD majú rovnakú základňu CQ a výšku (ich tretie vrcholy ležia na úsečke rovnobežnej s CQ). Ich obsah vieme vypočítať ako rozdiel obsahov trojuholníka PBC a PBQ, lebo vieme, že obsah trojuholníka PBC je rovný polovici obsahu kosodĺžnika $PBCD$, teda 6.

$$S_{CQP} = S_{PBC} - S_{PBQ} = 6 - 3 = 3$$

Trojuholníky RDP a RQC sú podobné, pretože uhly DRP a QRC sú vrcholové uhly a úsečky PD a QC sú rovnobežné. Vieme, že $|PD| = 2 \cdot |CQ|$, takže výšky na stranu PD v trojuholníku DRP a stranu CQ v trojuholníku QRC sú v pomere 1 : 2. Obsahy týchto trojuholníkov sú potom v pomere 1 : 4. Odtiaľ teraz vyplýva:

$$S_{PQCD} = S_{CQP} + S_{CQD} + 4 \cdot S_{RQC} - S_{RQC}$$

Odtiaľ poznáme všetky obsahy okrem obsahu trojuholníka RQC. Jeho obsah si z rovnice vieme vyjadriť:

$$\begin{aligned}
S_{PQCD} &= S_{CQP} + S_{CQD} - S_{RQC} + 4 \cdot S_{RQC} \\
3 \cdot S_{RQC} &= S_{PQCD} - S_{CQP} - S_{CQD} \\
S_{RQC} &= \frac{S_{PQCD} - S_{CQP} - S_{CQD}}{3} \\
S_{RQC} &= \frac{9 - 3 - 3}{3} \\
S_{RQC} &= 1
\end{aligned}$$

Obsah trojuholníka RQC je 1.

Komentár

Riešenie tejto úlohy sa skladalo z viacerých krokov. Najskôr bolo potrebné prísť na to, že v lichobežníku máme nejaké rovnobežníky a zhodné trojuholníky a prísť na ich obsahy. Dôležité bolo prísť na to, že bod Q sa nachádza v strede strany BC. Pomocou všetkých týchto informácií bolo potom potrebné prísť na obsah trojuholníku RQC. V tomto bode sa začali riešenia veľmi líšiť, pretože tento dôkaz išiel viacerými spôsobmi. Bohužiaľ to taktiež bol najnáročnejší krok celej úlohy, preto sme dostali veľa riešení, ktoré prišli na všetky vyššie spomínané informácie, ale tento posledný krok nemali úplný alebo správny.
Chceli by sme ale pochváliť všetkých týchto riešiteľov, pretože ešte viac bolo riešiteľov, ktorí sa do úlohy nepustili vôbec, a tých by sme zas týmto chceli povzbudiť. Za takéto neúplné riešenie, ktoré ale prišlo na veľa informácií a myšlienok, ktoré by pre to úplné riešenie boli dôležité, sme udeľovali v niektorých prípadoch až polovicu či aj viac bodov.
A pre tých, ktorí došli do polovice úlohy a nevedeli ju korektne dokončiť, máme radu. Pokúste sa čo najlepšie využiť všetko, na čo ste v predošlom priebehu riešenia prišli. V tomto prípade to bola rovnobežnosť DP a BC a to, že Q je stred BC. Na čo sa dajú využiť rovnobežné úsečky, z ktorých jedna je presne dvakrát dlhšia? Odpoveďou bude najčastejšie podobnosť trojuholníkov a rátanie obsahov.

6

opravovali: **Tomáš Lang** a **Lujza Milotová**
najkrajšie riešenie: Alica Földesová, Marek Mičko

56 riešení

Zadanie

6. aptembra 19XX
Trhové námestie Atlantídy je vydláždené čiernymi a bielymi dlaždicami tak, ako šachovnica 8×8. Na námestí bolo rozmiestnených 8 strážcov tak, že v každom riadku a stĺpci bol iba jeden. Dokážte, že na čiernych dlaždiciach námestia je párny počet strážcov.

Riešenie

Označme súradnice políčka p ako $[x_p, y_p]$, kde obe hodnoty sú od 1 do 8. Nech $S_p = x_p + y_p$ pre každé políčko. Ďalej nech B_p je súčet súčtov S_p tých strážcov, ktorí stoja na bielych políčkach a C_p súčet súčtov S_p tých strážcov, ktorí stoja na čiernych políčkach.
Zo zadania vieme, že v každom riadku a v každom stĺpci je práve jeden strážca. To znamená, že súčet x-ových súradníc strážcov je $1 + \cdots + 8 = 36$ a rovnako aj súčet y-ových súradníc strážcov je $1 + \cdots + 8 = 36$. To je spolu 72, a teda aj $B_p + C_p = 72$. Bez ujmy na všeobecnosti nech políčko $[1, 1]$ je čierne. Ďalšie čierne políčka budú $[1, 3], [1, 5], [1, 7], [2, 2], [2, 4], \ldots$ Môžeme si uvedomiť, že čierne políčka sú práve tie, ktorých S_p je párne, a biele políčka sú práve tie, ktorých S_p je nepárne.

Z toho vyplýva, že C_p je vždy párne číslo. Keďže $B_p + C_p = 72$, tak aj B_p musí byť párne. B_p je tvorené súčtom nepárnych čísel, a preto bude párne iba vtedy, ak bude týchto nepárnych čísel párny počet, teda ak na bielych políčkach bude stáť párny počet strážcov. Spolu je strážcov 8, a teda aj na čiernych políčkach bude stáť párny počet strážcov.

Iné riešenie

Povedzme, že máme strážcov nejako rozmiestnených tak, že v každom riadku a v každom stĺpci je práve jeden. Postupne ich budeme po dvojiciach presúvať.
Vždy zoberieme strážcu (s_1) z nejakého stĺpca, a presunieme ho v rámci tohto stĺpca na iný riadok. Potom strážcu (s_2), ktorý bol v tomto riadku na nejakom inom stĺpci, presunieme do riadku, v ktorom bol pôvodne strážca s_1.
Teraz sa pozrieme na 4 políčka – 2 políčka, na ktorých pôvodne stáli strážcovia, a 2 políčka, na ktorých stoja po presunutí. Tieto štyri políčka tvoria vrcholy obdĺžnika. Z vlastností šachovnice vyplýva, že ak zoberieme ľubovoľný obdĺžnik, jeho vrcholy budú buď všetky biele, alebo všetky čierne, alebo 2 biele a 2 čierne.
To znamená, že po tomto presunutí strážcov s_1 a s_2 sa počet strážcov na čiernych políčkach buď nezmení, alebo sa zmení o 2. Toto bude platiť pre akékoľvek takéto presunutie.
Strážcov budeme presúvať nasledovne: najprv presunieme strážcu v prvom (najľavejšom) stĺpci na prvý (najspodnejší) riadok, potom strážcu v druhom stĺpci na druhý riadok, ..., strážcu v siedmom stĺpci na siedmy riadok. Vidíme, že akonáhle strážcu raz presunieme, už s ním nikdy nepohneme (lebo ideme postupne hore po riadkoch). Na konci teda budú strážcovia na uhlopriečke, ktorá začína v ľavo dole a končí v pravo hore.
Políčka na uhlopriečke sú buď všetky čierne, alebo všetky biele, ale v oboch prípadoch je na čiernych políčkach párny počet strážcov. Keďže tento počet sa v každom kroku buď nezmenil, alebo zmenil o 2, tak ich bol párny počet aj na začiatku. Na začiatku mohlo byť toto rozmiestnenie ľubovoľné – podarilo sa nám tak dokázať, že pre ľubovoľné rozmiestnenie spĺňajúce podmienku je na čiernych políčkach párny počet strážcov.

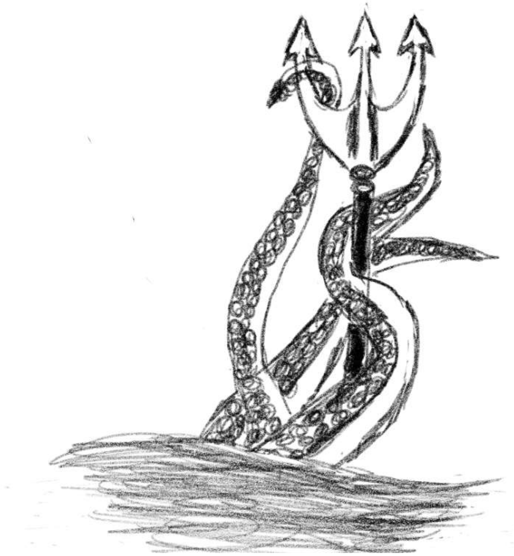
Komentár

Z hojného počtu riešení sme až polovici nemohli udeliť žiadne body a iba dve riešenia boli naozaj pekné. :(V dôkazových úlohách nestačí ukázať pre zopár konkrétnych prípadov, že to platí. To bola najčastejšia chyba a za také riešenia sme sa rozhodli neudeľovať žiadne body. Niekoľkí ste sa snažili úlohu riešiť ako v našom *inom riešení*, ale v žiadnom z týchto riešení to nebolo popísané úplne dostatočne. Úloha teda bola asi dosť ťažká, tak nás teší, že ste sa toľkí aspoň pokúsili ju vyriešiť. :)

Konečné poradie zimného semestra 37. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1. - 3.	Alena Chladná	Z8	GAMČABA	54	9	9	9	9	9	8	**108**
	Vojto Bálint	Z8	CZRZaZA	54	9	9	9	9	9	6	**108**
	Richard Semanišin	Z7	GAlejKE	54	9	9	9	9	9	5	**108**
4. - 5.	Richard Futáš	Z7	ZPAngKE	54	9	8	9	9	-	9	**107**
	Lívia Lukáčová	Z9	ZPoliKE	54	9	9	9	9	9	8	**107**
6.	Hana Erdélyiová	Z8	GAMČABA	54	9	8	8	-	9	8	**104**
7.	Šimon Jonaštík	Z7	GAMČABA	52	9	8	1	9	9	7	**103**
8.	Dominik Feňovčík	Z8	ZBeleKE	49	9	7	9	9	9	6	**101**
9.	Tomáš Cabúk	Z8	ZHlaGL	54	9	7	9	5	9	3	**100**
10.	Jakub Katrák	Z8	ZPoliKE	52	9	7	7	9	4	8	**99**
11. - 12.	Magdaléna Škriabová	Z9	ZKro4KE	54	9	9	9	4	9	4	**98**
	Alica Földesová	Z7	VSCharlott	51	9	8	3	9	-	9	**98**
13.	Hana Ihnátová	Z8	ZObcSeč	54	9	7	-	9	6	4	**95**
14. - 16.	Daniela Tkáčová	Z8	ZLevoSN	54	9	2	9	5	5	5	**92**
	Michal Revický	Z8	GJARMPO	49	9	9	9	-	8	-	**92**
	Sara Vojtkova	Z9	ZPoliKE	48	9	9	-	9	9	8	**92**
17.	Marek Mičko	Z7	ZKro4KE	53	9	2	4	4	-	9	**90**
18.	Jakub Tomasz	Z7	ZKro4KE	47	7	5	9	4	7	-	**86**
19.	Katarína Tóthová	Z7	ZHôrky	45	8	2	9	-	7	6	**85**
20. - 21.	Marek Babuščák	Z7	GAlejKE	49	9	8	1	-	3	3	**81**
	Šimon Mihalik	Z9	GsvTAKE	41	9	9	9	-	5	8	**81**
22. - 23.	Nina Hudáková	Z9	GAlejKE	46	9	9	9	-	-	7	**80**
	Sandra Futášová	Z7	ZPAngKE	44	9	7	-	6	-	7	**80**
24. - 25.	Elena Kundríková	Z7	ZKro4KE	53	-	8	9	-	-	-	**78**
	Jakub Jančiga	Z7	ZGoraZA	38	9	5	7	-	9	1	**78**
26.	Kristofer Noel Rjabinčák	Z7	ZKro4KE	40	9	2	9	4	2	3	**76**
27.	Sophia Sotáková	Z9	ZŠverHE	38	9	9	6	1	5	6	**74**
28.	Ján Meteňko	Z9	ZŠ Lúčna	52	9	9	-	-	2	0	**72**
29.	Kristina Jančigová	Z9	BGMHSuč	34	7	6	7	6	9	0	**69**
30.	Natália Kropuchová	Z8	ZKro4KE	54	9	-	-	-	1	-	**64**
31.	Daniel Ryan Takáč	Z9	GAlejKE	49	9	1	4	0	-	0	**63**
32.	Filip Feher	Z7	ZPAngKE	51	5	-	0	3	-	0	**62**
33.	Lukáš Kostík	Z9	GAlejKE	40	9	3	1	-	2	0	**55**
34.	Michal Hudák	Z7	GAlejKE	53	-	-	-	-	-	-	**53**
35. - 36.	Lukáš Húdek	Z9	GAlejKE	22	6	1	9	3	1	6	**48**
	Marie Kasalová	Z9	GTruhla	30	9	9	-	-	-	-	**48**
37. - 39.	Šimon Lukačín	Z8	GAlejKE	46	-	-	-	-	-	-	**46**
	Michal Stupák	Z9	GAlejKE	35	9	2	-	-	-	0	**46**
	Martina Kováčová	Z7	ZĎumbBB	32	8	-	3	-	0	0	**46**
40.	Richard Haň	Z7	GAlejKE	36	9	-	-	-	-	-	**45**
41. - 42.	Matúš Hudák	Z9	ZČsArPO	26	4	-	9	-	5	0	**44**
	Nadja Katkovčin	Z8	ZŠverHE	0	9	9	6	5	9	0	**44**
43.	Lýdia Mikušáková	Z7	GAlejKE	42	-	-	-	-	-	-	**42**
44.	Adam Horváth	Z7	GAlejKE	41	-	-	-	-	-	-	**41**
45.	Lukáš Paška	Z9	ZKe30KE	38	-	-	-	-	-	-	**38**

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
46.	Samuel Švec	Z8	ZKro4KE	21	6	7	1	-	-	1	**37**
47. - 48.	Lívia Sušková	Z9	EGJAKKE	36	-	-	-	-	-	-	**36**
	Barbora Brindžáková	Z9	GPMláKE	27	9	-	-	-	-	-	**36**
49. - 50.	Jakub Matracz	Z9	ZKe30KE	23	9	-	-	-	-	3	**35**
	Damián Fedor	Z8	ZJuhVnT	20	9	6	-	-	-	-	**35**
51.	Patrik Sklenár	Z7	GTVanSL	23	9	-	1	-	-	0	**34**
52. - 53.	Emilián Frischer	Z7	GAlejKE	33	-	-	-	-	-	-	**33**
	Eva Hricová	Z9	GAlejKE	33	-	-	-	-	-	-	**33**
54.	Viliam Vrchovinsky	Z7	ZKro4KE	19	1	2	7	-	1	0	**32**
55. - 56.	Hana Hricová	Z9	ZKro4KE	27	-	-	1	-	-	-	**28**
	Adam Šašala	Z9	GAlejKE	28	-	-	-	-	-	-	**28**
57. - 58.	Daniela Štulajterová	Z8	ZKro4KE	18	-	9	-	-	-	0	**27**
	Miriam Varechová	Z9	ZKro4KE	18	9	-	-	-	-	0	**27**
59.	Barbora Menšíková	Z9	ZKro4KE	11	9	-	-	-	-	4	**24**
60. - 61.	Robbin Šimko	Z8	ZKro4KE	22	-	-	-	-	-	-	**22**
	Kareem Tereska	Z9	ZKomeMI	22	-	-	-	-	-	-	**22**
62.	Sarah Horňáková	Z9	GAlejKE	21	-	-	-	-	-	-	**21**
63.	Jakub Stramba	Z9	ZKro4KE	18	-	2	0	-	-	-	**20**
64.	Leonardo Pizzolato	Z9	ZSNPBB	13	-	1	5	-	0	0	**19**
65. - 67.	Matúš Marček	Z7	ZSNPBB	13	-	-	5	-	-	0	**18**
	Viktória Môciková	Z7	ZSNPBB	9	1	1	5	0	1	0	**18**
	Filip Fekete	Z8	GJARMPO	18	-	-	-	-	-	-	**18**
68.	Olívia Kovaľová	Z8	ZJuhVnT	7	9	-	1	-	-	0	**17**
69.	Tomáš Kováč	Z8	ZZlatáRV	14	-	-	-	-	-	-	**14**
70. - 72.	Veronika Štiavnická	Z7	ZKro4KE	13	0	-	-	-	-	0	**13**
	František Krč	Z9	ZKro4KE	13	-	-	-	-	-	-	**13**
	Martin Janoško	Z8	ZKro4KE	10	-	-	2	-	-	1	**13**
73. - 74.	Lila Kondžurová	Z8	ZMájNPO	11	-	-	-	-	-	-	**11**
	Oliver Kruták	Z7	GAlejKE	11	0	-	-	-	-	0	**11**
75.	Adela Polomská	Z8	ZKro4KE	3	3	-	4	-	-	-	**10**
76. - 77.	Paulína Ďulová	Z7	GsvTAKE	9	-	-	-	-	-	-	**9**
	Šimon Petráš	Z8	GAMČABA	9	-	-	-	-	-	-	**9**
78. - 79.	Lukáš Kmec	Z8	ZKro4KE	8	0	-	-	-	-	0	**8**
	Leo Torma	Z8	ZKro4KE	8	-	-	-	-	-	-	**8**
80.	Anna Birková	Z9	ZKro4KE	7	-	-	-	-	-	0	**7**
81.	Lenka Harmanska	Z9	ZKro4KE	6	-	-	-	-	-	0	**6**
82. - 83.	Slavomira Synott	Z8	ZKro4KE	3	-	-	1	-	-	0	**4**
	Max Hložek	Z8	ZKro4KE	4	-	-	-	-	-	-	**4**
84. - 85.	Petra Juríková	Z7	GsvTAKE	3	-	-	-	-	-	-	**3**
	Marcel Falatko	Z8	ZKomeMI	3	-	-	-	-	-	-	**3**
86. - 88.	Róbert Plencner	Z8	ZKro4KE	2	-	-	-	-	-	-	**2**
	Lenka Kozubová	Z8	ZKro4KE	2	0	-	-	-	-	0	**2**
	Šimon Varga	Z9	ZKro4KE	0	2	-	-	-	-	0	**2**
89. - 90.	Marko Strompf	Z9	ZKro4KE	1	-	-	-	-	-	-	**1**
	Barbora Ševcová	Z8	ZKro4KE	1	-	-	-	-	-	-	**1**
91. - 92.	Matúš Katina	Z8	ZKro4KE	0	0	-	-	-	-	0	**0**
	Miroslav Slivko	Z8	ZKro4KE	0	-	-	-	-	-	0	**0**



Názov: MATIK – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 3 • December 2023 • Zimný semester 37. ročníka
Web: matik.strom.sk
E-mail: matik@strom.sk
Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe, poštou a len v prípade poruchy na adrese riesenia@strom.sk

Organizátor: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach,
Prírodovedecká fakulta, Šrobárova 2, 041 54 Košice
Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.