STROM

Korešpondenčný matematický seminár

Milí naši riešitelia,

dostávate do rúk posledný **STROM** v tomto školskom roku a spolu s nim vaše opravené riešenia, ktoré nám urobili veľkú radosť. Uživajte si prázdniny plnými dúškami, aby ste sa potom s nadšením vrhli na úlohy 33. ročníka vášho **STROM**u. Želáme vám krásne leto a tešíme sa na vás na jesennom sústromení

Vaši **STROM**isti

Math jokes

Top $ln(e^{10})$ reasons why e is better than π
10) e is easier to spell than π.

9) $\pi \cong 3.14$ while $e \cong 2.718281828459045$.
8) The character for e can be found on a keyboard, but π sure can't.
7) Everybody fights for their piece of the pie.
6) $ln(\pi^1)$ is a really nasty number, but $ln(e^1) = 1$.
5) e is used in calculus while π is used in baby geometry.
4) e is the most commonly picked vowel in Wheel of Fortune.
3) e stands for Euler's Number, π doesn't stand for squat.
2) You don't need to know Greek to be able to use e.
1) You can't confuse e with a food product.

Top ten reasons why e is inferior to π
10) e is less challenging to spell than π.

9) $e \cong 2.718281828459045$, which can be easily memorized to its billionth place, whereas π needs "skills" to be memorized.
8) The character for e is so cheap that it can be found on a keyboard. But π is special (it's under "special symbols" in word processor programs.)
7) π is the bigger piece of pie.
6) e has an easy limit definition and infinite series. The limit definition of π and the infinite series are much harder.
5) e you understand what it is even though you start learning it late when you're in pre-calculus. But π, even after ive or six years it's still hard to know what it really is.
4) People mistakenly confuse Euler's Number (e) with Euler's Constant (γ). There is no confusion with the one and only π.
3) e is named after a person, but π stands for itself.
2) π is much shorter and easier to say than "Euler's Number".
1) To read π, you don't have to know that Euler's name is really pronounced Oiler.

Riešenia 2. série úloh letného semestra 32. ročníka

1. Dada dostala v Nórsku úžasnú kalkulačku. Ak zadáte prirodzené číslo n a stlačíte tlačidlo označené symbolom $*$, v kalkulačke to zarachotí a na displeji sa objaví prirodzené číslo, nazvime ho n^*. Dada s pomocou slovníka a návodu na použitie kalkulačky zistila, že s číslom n sa deje toto: Prirodzené číslo n sa prevedie do dvojkovej sustavy. Počet jednotiek a počet núl (za prvou jednotkou) v získanom čísle sa zväčší o jedna. Získané dve čísla sa spolu vynásobia, výsledný súčin sa objaví na displeji. Napríklad 13 $(8+4+1)$ v dvojkovej sústave je 1101, takže 13^* je $(3+1)(1+1)$ čiže 8. Keď zadáme $8 = 1000_2$, kalkulačka vyráta $8^* = (1+1)(3+1)$, čiže opäť 8.
a) Zistite 2008^*.
b) Zistite, pre koľko prirodzených čísel n (vrátane 2008) platí $n^* = 2008^*$.
c) Zistite, pre koľko prirodzených čísel n platí $n^* = n$. Ktoré sú to čísla?

Opravoval: Feri Kardoš **Počet riešiteľov: 29**

Riešenie:

Časť a) Preveďme číslo 2008 do dvojkovej sústavy:

$$2008_{10} = 11111011000_2$$

Vidíme, že v zápise čísla 2008 vystupuje 7 jednotiek a 4 nuly, preto $2008^* = (7+1)(4+1) = 40$.

Časť b) Našou úlohou je zistiť pre koľko prirodzených čísel n platí $n^* = 40$. Ak označíme a počet jednotiek a b počet núl v zápise čísla n v dvojkovej sústave, tak pre čísla a a b musí platiť

$$n^* = (a+1)\cdot(b+1) = 40.$$

Potrebujeme teda číslo 40 rozložiť na súčin dvoch prirodzených čísel, čo sa dá urobiť ôsmimi spôsobmi. Pre každý z nich vieme jednoducho určiť počet jednotiek a núl, a z toho počet možných čísel n. Netreba zabúdať na to, že prvá číslica v zápise čísla n musí byť jednotka, potom už môže byť zvyšných $a-1$ jednotiek a b núl usporiadaných ľubovoľne. Počet prípustných čísel n je rovný počtu možností, ako z $a+b-1$ číslic zvoliť $a-1$ jednotiek, zvyšné potom budú nuly. Výsledky výpočtov uvedieme v tabuľke.

$a+1$	$b+1$	a	b	počet možností
1	40	0	40	0
2	20	1	20	1
4	10	3	9	$\binom{11}{2} = 55$
5	8	4	7	$\binom{10}{3} = 120$
8	5	7	4	$\binom{10}{6} = 210$
10	4	9	3	$\binom{11}{8} = 165$
20	2	19	1	19
40	1	39	0	1

Spolu teda existuje $1+55+120+210+165+19+1 = 571$ čísel s požadovanou vlastnosťou.

Časť c) Našou úlohou je zistiť pre koľko prirodzených čísel platí $n = n^*$. Keď začneme hľadať systematicky od najmenších prirodzených čísel, zistíme, že uvedený vzťah platí pre čísla 3, 6, 8 a 9, pozri priloženú tabuľku.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n^*	2	4	3	6	6	6	4	8	9	9	8	9	8	8	5

Na základe pozorovania týchto čísel môžeme nadobudnúť podozrenie, že pre $n > 9$ je číslo n^* vždy menšie ako n. Skúsme toto tvrdenie dokázať.

Pre n od 10 do 15 sa stačí pozrieť do tabuľky. Čísla od 16 po 31 vo svojom zápise v dvojkovej sústave obsahujú práve 5 cifier, z nich niektoré sú jednotky, ostatné sú nuly. Všetky možné hodnoty čísla n^* sú preto $(5+1)(0+1) = 6$, $(4+1)(1+1) = 10$, $(3+1)(2+1) = 12$. Vidíme, že maximálna možná

hodnota n^* (čiže 12) je menšia ako najmenšie (v dvojkovej sústave) 5-ciferné číslo (čiže 16), a teda pre všetky čísla od 16 po 31 platí $n > n^*$.
Bude to pravda aj pre všetky väčšie čísla? Skúsme podobným spôsobom odvodiť, že pre všetky aspoň 5-ciferné čísla platí $n > n^*$.
Nech n je v dvojkovej sústave k-ciferné číslo, pričom $k \geq 5$. Potom $2^{k-1} \leq n < 2^k$, takže minimálna hodnota čísla n je 2^{k-1}. Skúsme odhadnúť maximálnu možnú hodnotu čísla n^*. Človek intuitívne cíti, že ak súčet dvoch čísel je daný, tak súčin je maximálny vtedy, ak ich rozdiel je čo najmenší. Presnejšie, ak označíme a počet jednotiek a b počet núl v zápise čísla n, tak vieme, že $a + b = k$. Potom

$$\begin{aligned} n^* &= (a+1)(b+1) = \\ &= (a+1)(k-a+1) = \\ &= ak + k - a^2 - a + a + 1 = \\ &= -a^2 + ak - \frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{4} + k + 1 = \\ &= -\left(a - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k^2}{4} + k + 1 \leq \\ &\leq \frac{k^2}{4} + k + 1 = \\ &= \frac{(k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

Tento odhad môžeme dostať aj z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom čísel $a + 1$ a $b + 1$:

$$\begin{aligned} \frac{(a+1)+(b+1)}{2} &\geq \sqrt{(a+1)(b+1)} \\ \frac{k+2}{2} &\geq \sqrt{n^*} \\ \frac{(k+2)^2}{4} &\geq n^* \end{aligned}$$

Ak sa nám podarí dokázať, že maximálna možná hodnota čísla n^* (čiže $\frac{(k+2)^2}{4}$) je menšia ako minimálna hodnota čísla n (čiže 2^{k-1}), tak z toho už vyplýva, že pre všetky k-ciferné čísla n je n^* je vždy menšie ako n. Dokážme preto pre všetky $k \geq 5$ nerovnosť

$$\frac{(k+2)^2}{4} < 2^{k-1}. \tag{1}$$

Prvá možnosť ako sa to dá spraviť, je použiť matematickú indukciu. Pre $k = 5$ nerovnosť nadobúda tvar

$$\frac{49}{4} < 16 = \frac{64}{4},$$

a teda platí. (Najväčšia možná hodnota n^* je v tomto prípade $12 = \frac{48}{4}$, čo je menej než $\frac{49}{4}$. Je to preto, že maximum sa nadobúda len ak $a = b = \frac{k}{2}$, čo v prípade nepárneho k nie je možné. Pre účely tohoto dôkazu si ale s tým nemusíme lámať hlavu, dôležité je, že všetky možné hodnoty n^* sú menšie, nanajvýš rovné hranici $\frac{(k+2)^2}{4}$.)
Predpokladajme, že platí $\frac{(k+2)^2}{4} < 2^{k-1}$ pre nejaké $k \geq 5$. Potrebujeme ukázať, že z toho vyplýva platnosť nerovnosti

$$\frac{(k+3)^2}{4} < 2^k.$$

Ak nerovnosť z indukčného predpokladu vynásobíme dvoma, dostávame

$$\frac{(k+2)^2}{2} < 2^k.$$

Stačí potom dokázať, že platí

$$\frac{(k+3)^2}{4} < \frac{(k+2)^2}{2}$$
$$(k+3)^2 < 2(k+2)^2$$
$$k^2 + 6k + 9 < 2k^2 + 8k + 8$$
$$0 < k^2 + 2k - 1$$

Posledná nerovnosť je pre všetky $k \geq 5$ splnená, keďže $k^2 + 2k - 1 \geq 25 + 2 \cdot 5 - 1 = 34 > 0$, takže platí aj dokazovaná nerovnosť.
Na nerovnosť (1) sa môžeme pozerať aj z iného uhla pohľadu. Pre $k = 5$ nerovnosť platí. Ak zväčšíme k na $k+1$, pravá strana nerovnosti narastie z 2^{k-1} na 2^k, čiže na dvojnásobok pôvodnej hodnoty. Na druhej strane ľavá strana nerovnosti sa zväčší v pomere

$$\frac{\frac{(k+3)^2}{4}}{\frac{(k+2)^2}{4}} = \left(\frac{k+3}{k+2}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{k+2}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{1}{7}\right)^2 = \frac{64}{49} < 2.$$

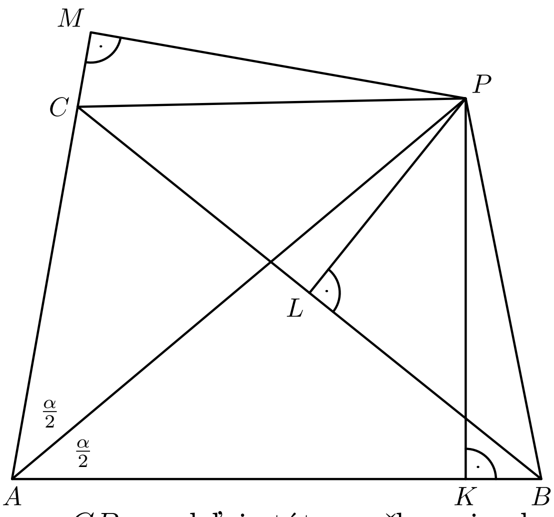
Ľavá strana sa zväčší na menej než dvojnásobok, takže pomer medzi ľavou stranou a pravou stranou bude narastať, a teda čím ďalej tým viac sa vzďaľovať od jednej. Preto nerovnosť (1) platí, a teda pre všetky aspoň 5-ciferné čísla n platí $n > n^*$. Dokázali sme, že čísla, pre ktoré platí $n = n^*$, sú naozaj len štyri, a to 3, 6, 8 a 9.

2. Majme trojuholník ABC. Nech P je priesečník osi uhla BAC a osi strany BC. Ďalej nech body K, L, M sú postupne päty kolmíc z bodu P na priamky AB, BC, CA. Dokážte, že
a) trojuholníky PKB a PMC sú podobné,
b) štvoruholník $ABPC$ je tetivový,
c) body K, L, M sú kolineárne.

Opravoval: Tomáš Lučivjanský **Počet riešiteľov: 22**

<u>**Riešenie:**</u>

Tento príklad ste veľmi pekne riešili a riešenia boli na naozaj vysokej úrovni. Občas sa ale vyskytli nejaké tvrdenia, ktoré ste uviedli bez dostatočného zdôvodnenia alebo ste zdôvodnenie neuviedli vôbec. Týka sa to najmä časti po c), kde niektorí z vás uviedli, že dané body sú body na Simsonovej priamke a tým bol pre nich dôkaz tejto časti skončený. Neuviedli ste pritom znenie tejto vety (čo ak je po pánovi Simsonovi pomenovaných viacero viet) a ani ste neoverili predpoklady, ktoré táto veta vyžaduje. Kvôli tomu ste preto nemohli získať maximálny počet bodov za túto časť. Za každú z troch častí ste pritom mohli získať maximálne tri body.
Zrejme úloha nemá zmysel, ak je trojuholník ABC rovnoramenný so základňou BC ($\beta = \gamma$). Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $\beta < \gamma$ (druhý prípad sa vyrieši rovnako, akurát vzájomné polohy niektorých bodov budú vymenené). Dá sa ľahko ukázať, že bod P leží vždy zvonku trojuholníka ABC, bod K leží vnútri strany AB a body A, C, M ležia na priamke v tomto poradí. Načrtnime teraz samotné riešenie úlohy.



Časť a) Veľmi ľahko vieme dokázať, že trojuholníky PKB a PMC sú nielen podobné, ale dokonca zhodné. Všimnime si najskôr trojuholník AKP a trojuholník AMP. Stranu AP majú tieto trojuholníky spoločnú a $|\sphericalangle AKP| = |\sphericalangle AMP| = 90°$ (z definície bodov K a M). Taktiež platí, že $|\sphericalangle PAK| = |\sphericalangle PAM|$, pretože priamka PA je osou uhla BAC a tento uhol je totožný s uhlom MAK. Preto aj $|\sphericalangle APK| = |\sphericalangle APM|$ a teda na základe vety *usu* sú trojuholníky AKP a AMP zhodné. Ak sú tieto trojuholníky zhodné, majú odpovedajúce si strany rovnako dlhé. Tým pádom dostávame, že platí $|PK| = |PM|$.
Zamerajme teraz svoju pozornosť na trojuholníky CLP a BLP. Majú spoločnú stranu (PL) a rovnako veľký uhol ($|\sphericalangle CLP| = |\sphericalangle BLP| = 90°$). Keďže priamka PL je osou strany CB, rozdeľuje túto usečku priamka PL na dve rovnako dlhé časti. Preto je $|CL| = |LB|$. Vieme teda, že trojuholníky CLP a BLP majú rovnaké dve strany a uhol, ktorý tieto dve strany zvierajú ($\sphericalangle CLP$, resp.$\sphericalangle BLP$). Na základe toho vieme, že tieto trojuholníky sú (znova podľa vety *usu*) zhodné. A ak sú zhodné, musia mať rovnako dlhé strany. Preto $|CP| = |BP|$.
Zistili sme, že trojuholníky PKB a PMC majú dve strany rovnako dlhé ($|PK| = |PM|$ a $|CP| = |BP|$) a taktiež vieme, že $|\sphericalangle PMC| = |\sphericalangle PKB| = 90°$ (plynie zo spôsobu ako sme body K a M získali). Už si stačí len uvedomiť, že sa tieto trojuholníky zhodujú v dĺžke dvoch strán a uhle oproti väčšej z nich. Podľa vety *Ssu* sú potom trojuholníky PKB a PMC zhodné a teda sú aj podobné (s koeficientom podobnosti $\kappa = 1$).
Časť b) Ako je známe, nutnou a postačujúcou podmienkou aby daný konvexný štvoruholník bol tetivový je, že súčet jeho protiľahlých uhlov sa musí rovnať 180°. V našom prípade teda potrebujeme ukázať, že platí

$$|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle BPC| = |ACP| + |ABP| = 180°.$$

Aby sme to dokázali, všimnime si najskôr štvoruholník $AMPK$. Pre jeho uhly platí $|\sphericalangle AMP| + |\sphericalangle AKP| = 180°$, pretože uhly AMP a AKP sú pravé. Štvoruholník $AMPK$ je preto tetivový a teda tiež vieme, že $|\sphericalangle MAK| + |\sphericalangle KPM| = 180°$. Keďže $|\sphericalangle MAK| = |\sphericalangle CAB|$, aby sme dokázali rovnosť $|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle BPC| = 180°$, stačí nám ukázať, že je splnená rovnosť $|\sphericalangle KPM| = |\sphericalangle BPC|$. Keďže platia vzťahy $|\sphericalangle KPM| = |\sphericalangle KPC| + |\sphericalangle CPM|$ a $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle BPK| + |\sphericalangle KPC|$ stačí dokázať, že $|\sphericalangle CPM| = |\sphericalangle BPK|$. A to platí kvôli tomu, že trojuholníky PKB a PMC sú zhodné ako sme dokázali v časti po a). Dokázali sme rovnosť $|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle MAK| + |\sphericalangle KPM| = 180°$, čo je nutná a postačujúca podmienka, aby bol štvoruholník $ABPC$ tetivový.
Časť c) Vieme zo zadania, že body C,L a B ležia na jednej priamke (určenej bodmi C a B). Body K, L a M sú kolineárne práve vtedy, keď uhly $CLM|$ a BLK sú vrcholové a preto aj rovnako veľké. Jednou z možností ako ukázať, že body K, L a M sú kolineárne, je ukázať platnosť $|\sphericalangle CLM| = |\sphericalangle BLK|$.
Dokážme najprv, že štvoruholníky $CLPM$ a $BPLK$ sú tetivové. Keďže $|\sphericalangle PMC| + |\sphericalangle CLP| = 180°$ (oba uhly sú pravé) je štvoruholník $CLPM$ tetivový. Ďalej vidíme, že $|\sphericalangle PLB| + |\sphericalangle PKB| = 90°$ a teda bod L aj bod K ležia na Tálesovej kružnici zostrojenej nad úsečkou PB. Keďže k danej úsečke viem zostrojiť práve (!) jednu Tálesovu kružnicu, nutne platí, že body B, P, L a K ležia na tej istej kružnici a preto aj štvoruholník $BPLK$ je tetivový. Na základe vety o obvodovom a stredovom uhle dostávame $|\sphericalangle CLM| = |\sphericalangle CPM|$ (zo štvoruholníka $CLPB$) a $|\sphericalangle KLB| = |\sphericalangle KPB|$ (zo štvoruholníka $BPLK$). A na základe časti po a) vieme, že uhly CPM a BPK sú rovnaké.
Tým sme dokázali, že $|\sphericalangle CLM| = |\sphericalangle BLK|$ a teda, že body K, L, M ležia na tej istej priamke.

3. Fibonacciho postupnosť (F_n) je definovaná vzťahom $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pre $n \geq 1$ a počiatočnými hodnotami $F_1 = 1$, $F_2 = 1$.
a) Dokážte, že existuje Fibonacciho číslo deliteľné číslom 2008.
b) Existuje aritmetická postupnosť, ktorá neobsahuje žiadne Fibonacciho číslo?

Opravoval: Dávid Hudák **Počet riešiteľov: 11**

Riešenie:

Časť a) Nech je daná Fibonacciho postupnosť $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ a $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, pre $n \geq 1$. v riešení budeme používať nasledovné označenie:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

znamená, že číslo a dáva po delení číslom m rovnaký zvyšok, ako číslo b. Ďalej $\{F_n \pmod{m}\}_{n=1}^{\infty}$ bude označovať postupnosť zvyškov Fibonacciho čísel po delení číslom m. Pozrime sa na to, čo sa deje s postupnosťou $\{F_n \pmod{m}\}_{n=1}^{\infty}$ pre nejaké m. Ak pre nejaké $k \in \mathbb{N}$ je

$$F_k \equiv z_1 \pmod{m} \qquad \text{a} \qquad F_{k+1} \equiv z_2 \pmod{m},$$

tak

$$F_k + F_{k+1} = F_{k+2} \equiv z_1 + z_2 \pmod{m}.$$

Každá dvojica za sebou idúcich zvyškov teda určuje nasledujúci zvyšok, a tým pádom aj všetky nasledujúce zvyšky v postupnosti $\{F_n \pmod{m}\}_{n=1}^{\infty}$. Pre číslo m existuje $m \cdot m$ (konečný počet) usporiadaných dvojíc zvyškov po delení m. Keďže postupnosť zvyškov je nekonečná, musia sa po konečnom počte členov objaviť dvojica, ktorá je zhodná s nejakou inou dvojicou. No ich nasledovníci sú zas len jednoznačne určený svojimi predchodcami. To znamená, že postupnosť $\{F_n \pmod{m}\}_{n=1}^{\infty}$ je (od istého miesta) periodická pre každé m.
Pre číslo 2008 to samozrejme platí tiež. Nech je perióda $\{F_n \pmod{2008}\}_{n=1}^{\infty}$ rovná p. Potom zrejme platí

$$1 = F_1 \equiv F_{p+1} \pmod{2008} \qquad \text{a} \qquad 1 = F_2 \equiv F_{p+2} \pmod{2008}$$

. Z definície Fibonacciho postupnosti platí, že

$$F_p = F_{p+2} - F_{p+1} \equiv 1 - 1 = 0 \pmod{2008}.$$

Teda existuje Fibonacciho číslo deliteľné číslom 2008.
Len pre zaujímavosť: $2008 = 8 \cdot 251$. $F_n \equiv 0 \pmod{8}$ pre $n = 6k,\ k \in \mathbb{N}$ a $F_n \equiv 0 \pmod{251}$ pre $n = 250k,\ k \in \mathbb{N}$. Potom

$$F_n \equiv 0 \pmod{2008} \quad \text{pre } n = 750k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Z nich najmenšie je 750-te Fibonacciho číslo a jeho hodnota je $F_{750} =$ 2461757021582324272166248155313036893697139996697461509576233211000055607912198979704988704446425834042795269603588522245550271050495783935904220352228801000.

Časť b) Majme aritmetickú postupnosť $\{a + (n-1) \cdot d)\}_{n=1}^{\infty}$, teda postupnosť v tvare $(a, a + d, a + 2d, \ldots)$. Postupnosť $\{a_n (\bmod\ d)\}_{n=1}^{\infty}$ je potom konštantná a teda tvaru $(a, a, a, \ldots)$. Naša aritmetická postupnosť obsahuje všetky celé kladné čísla väčšie alebo rovné ako číslo a, ktoré dávajú po delení číslom d ten istý zvyšok a. Vytvárajú tak prvky zvyškovej triedy. Z časti a) už vieme, že pre každé d je postupnosť $\{F_n \pmod{d}\}_{n=1}^{\infty}$ periodická. Našou úlohou je nájsť také d, aby sa v jednej perióde $\{F_n \pmod{d}\}_{n=1}^{\infty}$ nevyskytovali všetky zvyšky $0, 1, \ldots, d-1$. Najmenším vhodným je $d = 8$. $\{F_n \pmod{8}\}_{n=1}^{\infty}$ vyzerá nasledovne : $|\ 1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, |\ 1, 1, \ldots$. Táto postupnosť zvyškov neobsahuje zvyšky 4 ani 6. To znamená, že žiadne Fibonacciho číslo nie je tvaru $4 + 8 \cdot n$ alebo $6 + 8 \cdot n$. Z toho vyplýva, že napríklad postupnosť $\{4 + 8 \cdot n\}_{n=1}^{\infty}$ alebo $\{6 + 8 \cdot n\}_{n=1}^{\infty}$ sú aritmetické postupnosti neobsahujúce žiadne Fibonacciho číslo.

Komentár: A opäť známa Fibonacciho postupnosť. Riešením úloh sme získali zaujímavú, možno pre mnohých neznámu vlastnosť. Totiž pre každé $m \in N$ je postupnosť zvyškov Fibonacciho čísel po delení číslom m periodická. Z toho sa potom vďaka tomu, že sú hodnoty $F_1 = F_2 = 1$ ľahko ukázalo, že existuje Fibonacciho číslo deliteľné 2008. V časti b) nebolo presne určené o akú aritmetickú postupnosť ide. Teda na prvý pohľad aritmetické postupnosti zložené nie z prirodzených čísel mohli byť riešením (napr. $(\sqrt{2}, \sqrt{2}+2, \sqrt{2}+4, \sqrt{2}+6, \ldots)$). To bolo veľmi jednoduché. No nie za plný bodový zisk. My sme mali na mysli aritmetickú postupnosť zloženú z kladných celých čísel. To sa vám tiež podarilo väčšinou určiť. Áno, existujú také aritmetické postupnosti bez Fibonacciho čísel. Niektorí z vás použili pri riešení nejaký vlastnoručne zostrojený program. To samozrejme nie je na škodu. Len pozor na to, aby algoritmus nebol nekorektný. Poprípade skúste zaslať nabudúce aj zdrojový kód pre úplnosť. Inak dobre, úlohy sú vyriešené, body sú rozdané. Tak ahoj. Dávid

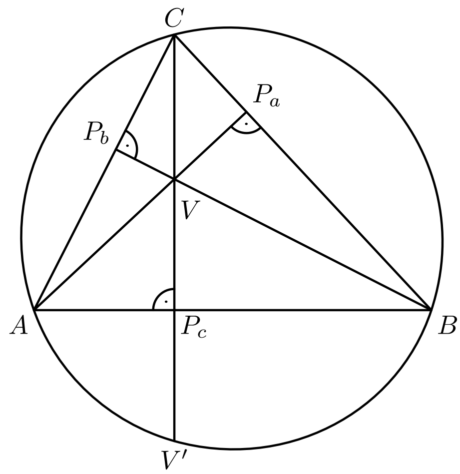
4. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s priesečníkom výšok V.
a) Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ABV, BCV, CAV sú zhodné.
b) V rovine sú dane tri zhodné kružnice prechádzajúce bodom H. Označme priesečníky dvojíc týchto kružníc A, B, C (tieto body su rôzne od bodu H). Dokážte, že bod H je ortocentrom trojuholníka ABC.
c) Daná je kružnica k a jej tetiva AB. Po jednom z oblúkov tejto kružnice sa pohybuje bod C rôzny od bodov A a B. Po akej dráhe sa pohybuje priesečník výšok trojuholníka ABC?

Opravoval: Marek Derňár **Počet riešiteľov: 18**

Riešenie:

Časť a) Máme dokázať, že kružnice opísané trojuholníkom ABV, BCV, CAV sú zhodné. Skúsme k tomu využiť tvrdenie zo 4. úlohy (časti a) 1. série.

Podľa nej vieme, že V sa v osovej súmernosti podľa strán trojuholníka zobrazí na kružnicu trojuholníku opísanú. Čiže ak si označíme obraz bodu V v osovej súmernosti podľa strany AB ako V', tak V' leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC, čiže kružnice opísané trojuholníkom ABV' a ABC sú totožné. Vzhľadom k tomu, že v osovej súmernosti podľa AB sa trojuholník ABV zobrazí na ABV', tak kružnice im opísané musia byť zhodné. Potom však aj kružnice opísané trojuholníkom ABV a ABC musia byť zhodné. Analogicky by sme však vedeli dokázať, že kružnica opísaná trojuholníku ABC je zhodná aj s kružnicami opísanými trojuholníkom BCV aj CAV, čím sme tvrdenie zo zadania dokázali.



Taktiež sme si mohli uvedomiť fakt, že 2 kružnice sú zhodné práve vtedy, keď majú zhodný polomer. Preto túto úlohu sme mohli riešiť aj výpočtom. Mohli sme si napríklad označiť päty výšok z A, B, C, postupne ako P_a, P_b, P_c. Potom ak $|\sphericalangle ACB| = \gamma$, tak $|\sphericalangle P_aVP_b| = 180° - \gamma$ (súčet uhlov v štvoruholníku VP_aCP_b je 360°), čiže $|\sphericalangle AVB| = |\sphericalangle P_aVP_b| = 180° - \gamma$ (vrcholové). Teraz využitím toho, že $\sin\gamma = \sin(180° - \gamma)$ a sínusovej vety dostávame, že polomery kružníc opísaných trojuholníkom ABC a ABV sú zhodné. Analogicky môžeme postupovať aj pre zvyšné dva trojuholníky.

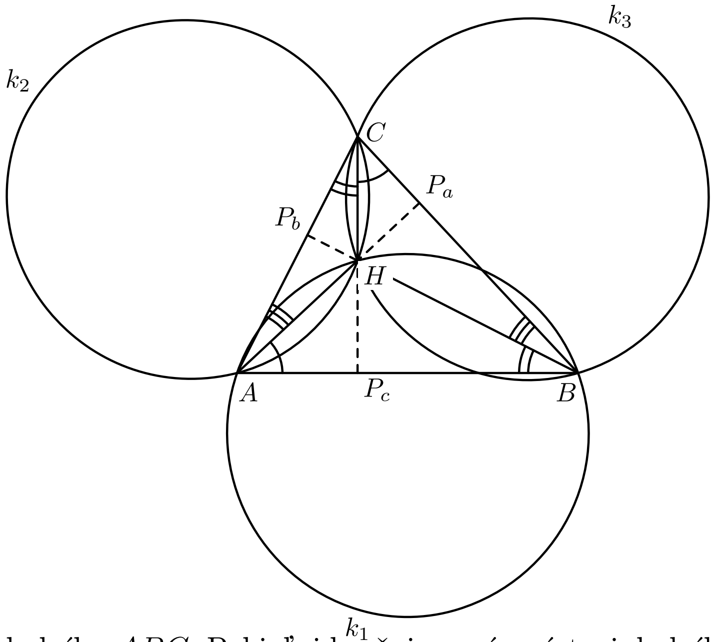
Časť b) Označme jednotlivé kružnice k_1, k_2, k_3 ako na obrázku. Ďalej označme $|\sphericalangle ABH| = \alpha$, $|\sphericalangle BCH| = \beta$, $|\sphericalangle CAH| = \gamma$. Keďže k_1, k_2 a k_3 sú zhodné, tak z bodov B a C musíme vidieť tetivu AH pod rovnakým uhlom, čiže

$$|\sphericalangle ACH| = |\sphericalangle ABH| = \alpha.$$

Rovnakou úvahou dostávame, že aj

$$|\sphericalangle BAH| = |\sphericalangle BCH| = \beta,$$
$$|\sphericalangle CBH| = |\sphericalangle CAH| = \gamma.$$

Potom platí $2\alpha+2\beta+2\gamma = 180°$ (súčet vnútorných uhlov v trojuholníku ABC), čiže $\alpha+\beta+\gamma = 90°$.

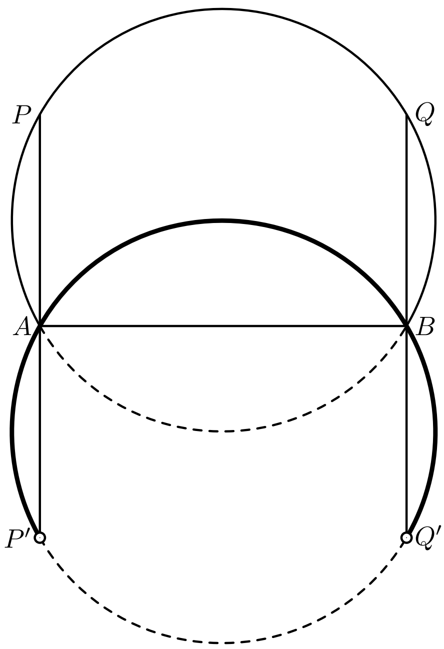


Označme prienik priamok AH a BC ako P_a, prienik BH, AC ako P_b a prienik CH, AB ako P_c. Potom vidíme, že

$|\sphericalangle AP_aB| = 180°-(\alpha+\beta+\gamma) = 180°-90° = 90°.$

Takže AP_a je výška v trojuholníku ABC. Rovnako však dostávame, že aj BP_b a CP_c sú výšky, čiže bod H je naozaj ortocentrom trojuholníka ABC.

Časť c) Pri časti a) sme sa dozvedeli, že v osovej súmernosti podľa strany AB sa trojuholník ABV zobrazí na ABV', ktorého opísaná kružnica je vlastne kružnicou opísanou trojuholníku ABC. Ale potom v osovej súmernosti podľa AB sa kružnica opísaná trojuholníku ABV zobrazí na kružnicu opísanú trojuholníku ABC. Pokiaľ si kružnicu opísanú trojuholníku ABC označíme ako k, tak sme práve dokázali, že bod V musí patriť kružnici k', ktorá je obrazom kružnice k v osovej súmernosti podľa AB. Potrebujeme teraz ešte určiť, kde všade na kružnici k' sa môže ortcentrum vyskytnúť (pri pohybe bodu C po jednom z oblúkov). Označme priesečníky kolmíc na priamku AB v bodoch A a B a kružníc k a k' ako P, Q, P' a Q' tak ako je na obrázku. Pokiaľ si nakreslíme zopár trojuholníkov ABC zistíme, že pri pohybe po väčšom z oblúkov AB (okrem bodov A, B) sa V pohybuje po väčšom z oblúkov $P'Q'$ (okrem bodov P, Q). Na to, aby sme toto tvrdenie dokázali potrebujeme ukázať dve veci - do žiadneho iného bodu kružnice sa V dostať nemôže a do každého bodu z väčšieho z oblúkov $P'Q'$ sa V dostane. Pokiaľ je C na menšom oblúku PQ, tak trojuholník ABC je ostrouhlý, čiže V sa nachádza v jeho vnútri, takže sa V určite nemôže dostať do menšieho oblúka $P'Q'$.



Pokiaľ je C v niektorom inom bode väčšieho oblúka AB, tak z toho, že CV je kolmé na AB okamžite vyplýva, že V sa opäť nemôže dostať do iných bodov. To, že V sa naozaj dostane do každého bodu nami popísanej množiny, vieme dokázať spätnou konštrukciou trojuholníka ABC. Bod C totiž musí ležať na kružnici k a zároveň na kolmici na priamku AB cez bod V. Premyslite si, ako by vyzeralo tvrdenie (a jeho dôkaz), ak by sa C pohyboval po menšom oblúku AB.

Úloha sa tiež dala riešiť pomocou toho, že $|\sphericalangle AVB| = 180° - |\sphericalangle ACB|$ (pokiaľ je trojuholník ABC ostrouhlý, pravouhlý, i tupouhlý). Keďže veľkosť uhla ACB je konštantná, tak aj veľkosť uhla AVB je konštantná a z poznatku o množine všetkých bodov z ktorých vidíme danú usečku pod daným uhlom dostávame, že V musí patriť kružnici k'.

Ďalšie elegantné riešenie spočíva v tom, že ukážeme, že veľkosť aj smer vektora VC je pre všetky polohy bodu C konštantná a rovná veľkosti a smeru vektorov AP a BQ (Porozmýšľajte nad tým, nie je to ťažké!). Preto bod V vždy dostaneme posunutím bodu C o vektor PA, a keďže bod C pri svojom pohybe vyplní vnútro oblúka kružnice k, bod V pri svojom pohybe vyplní vnútro príslušného oblúka kružnice k'.

Komentár: Časť a) sa dala riešiť mnohými spôsobmi, čo sa aj prejavilo na rozmanitosti vašich riešení. Väčšina nesprávnych riešení pozostávala z konštatovaní istých tvrdení, ktoré ste však nedokázali. To

sa prejavilo potom napríklad tak, že v celom riešení sa vôbec nevyužil fakt, že V je ortocentrom trojuholníka ABC.
V časti b) ste mnohí usúdili, že je priamym dôsledkom časti a), čo však vôbec nie je pravda. Taktiež sa našlo dosť veľa riešiteľov, ktorí využívali podobnosť trojuholníkov bez toho, aby povedali na základe ktorej vety o podobnosti trojuholníkov sú podobné. To potom viedlo k nesprávnym záverom, čím sa im úloha značne zjednodušila.
Pri časti c) ste mnohí objavili, že hľadanou množinou je nejaká kružnica. Nad tým, či sa V dostane naozaj do každého bodu z k' sa zamyslel len málokto (práve pri tomto mieste vznikala väčšina chýb).
Za každú časť ste mohli získať maximálne 3 body.

Konečné poradie Letného semestra 32. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.	H	CS
1.	Ladislav Bačo	2. A	GPoštKE	7	9	8	9	9	9	9	6	3	84
2.	Eduard Eiben	3. A	GPoštKE	8	3	6	-	8	9	9	8	0	62
3.	Jana Baranová	Sexta	GAlejKE	5	5	3	4	9	9	6	5	1	60
4.	Radomír Bosák	3. B	GGrösBA	7	8	6	-	9	-	8	-	2	44
4.	Tomáš Rizman	Septima B	GVaršŽA	4	5	6	-	9	6	-	5	1	44
6.	Monika Zlaczka	1. A	GPoštKE	7	6	1	0	8	3	-	2	0	42
7.	Miroslav Liščinský	Septima B	GAlejKE	4	4	5	-	9	7	-	4	1	41
7.	Josef Tkadlec	R7. A	GJKPraha	-	-	-	-	7	8	9	9	3	41
7.	Martin Bachratý	2. B	GOkruŽA	-	-	-	-	9	9	8	6	0	41
10.	Alžbeta Bohiniková	Kvinta B	GVaršŽA	4	0	2	4	7	9	-	-	0	39
11.	Tomáš Babej	1. A	GPoštKE	4	1	2	-	8	2	7	1	0	37
12.	Martin Polačko	Septima A	GAlejKE	4	9	7	9	-	-	-	-	0	36
12.	Andrea Görcsösová	Sexta	GAlejKE	4	4	1	-	7	6	-	4	0	36
14.	Jakub Köry	4. B	GMudrPO	6	6	8	9	-	-	-	-	1	35
14.	Natália Karásková	Sexta	GGrösBA	-	-	-	-	9	9	-	8	1	35
16.	Jakub Vaňo	3. D	GMudrPO	5	9	5	9	-	-	-	-	0	33
17.	Filip Sládek	Sexta B	GMierNO	8	6	4	7	-	-	-	-	2	32
18.	Katarína Révészová	1. A	GPoštKE	-	2	-	-	7	9	-	1	0	30
19.	Igor Kossaczký	3. B	GGrösBA	6	3	5	-	8	-	3	-	1	28
19.	Jana Sásková	Septima	G1májTN	4	4	-	5	8	3	-	-	0	28
21.	Peter Milošovič	1. A	GPoštKE	6	-	2	-	6	-	-	-	0	26
22.	Ivana Lauková	Sexta A	GLettMT	-	-	-	-	8	6	3	1	0	24
23.	Pavol Guričan	Kvinta	GGrösBA	-	-	-	-	9	-	-	5	1	23
24.	Lucia Fabišíková	3. E	GPoštKE	3	5	-	3	7	-	-	1	0	22
25.	Daniel Till	9. A	ZAngeKE	2	2	0	-	6	3	-	-	0	21
25.	Monika Vaľková	Sexta	GAlejKE	6	7	2	-	-	-	-	-	0	21
25.	Jakub Jursa	Septima A	GAlejKE	6	3	-	9	-	-	-	-	1	21
28.	Petra Zibrínová	1. D	GMudrPO	-	-	-	-	7	6	-	-	0	20
28.	Tomáš Kuzma	Septima A	GAlejKE	4	-	6	-	9	-	-	1	0	20
28.	Milica Fabišíková	3. E	GPoštKE	2	4	-	-	7	5	-	1	0	20
28.	Juraj Mitro	Sexta A	GMudrPO	-	6	-	-	8	3	-	-	0	20
32.	Matúš Stehlík	Kvinta	GAlejKE	3	4	6	-	-	-	-	-	1	19

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.	H	CS
33.	Miroslava Vašková	1. D	GMudrPO	-	-	-	-	6	6	-	-	0	18
34.	Viktor Popovič	Sexta	GMudrPO	5	5	1	-	-	-	-	-	0	16
34.	Jozef Lami	9. A	ZNov2KE	3	3	5	-	-	-	-	-	0	16
36.	Juraj Kapasný	NULL	GVaršŽA	-	-	-	-	5	6	2	-	0	13
37.	Zuzana Cocuľová	2. A	GPoštKE	3	1	0	5	-	-	-	-	0	12
37.	Michaela Floriánová	Sexta	GGrösBA	-	5	3	1	-	-	-	-	0	12
39.	Michal Petrucha	4. AF	GMetoBA	2	-	2	4	-	-	-	-	0	10
39.	Michal Maixner	Septima B	GVaršŽA	-	-	-	-	4	6	-	-	0	10
41.	Vladimír Hudec	Septima B	GVaršŽA	-	-	-	-	6	-	2	-	0	8
42.	Marián Dobranský	3. E	GPoštKE	-	-	-	-	-	-	-	1	0	1

Pohár konštruktérov Letného semestra 32. ročníka

P.	Skratka	Škola	P.r.	Body
1.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	10	336
2.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	8	254
3.	GMudrPO	Gymnázium J. A. Raymana Mudroňova 20 080 01 Prešov	6	142
3.	GGrösBA	Gymnázium Grösslingova 18 811 09 Bratislava 1	5	142
5.	GVaršŽA	Gymnázium Varšavská cesta 1 010 08 Žilina - Vlčince	5	114
6.	GOkruŽA	Gymnázium Veľká okružná 22 011 09 Žilina	1	41
6.	GJKPraha	Gymnázium Jana Keplera Parléřova 2 169 00 Praha 6	1	41
8.	GMierNO	Gymnázium A. Bernoláka Mieru 307/23 029 01 Námestovo	1	32
9.	G1májTN	Gymnázium 1. mája 2 911 01 Trenčín	1	28
10.	GLettMT	Gymnázium J. Lettricha 036 01 Martin	1	24
11.	ZAngeKE	Základná škola Park Angelinum 8 040 01 Košice	1	21
12.	ZNov2KE	Základná škola Námestie L. Novomeského 2 040 01 Košice	1	16
13.	GMetoBA	Gymnázium Metodova 2 821 08 Bratislava 2	1	10

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Copycentrum Pergamon s. r. o.

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 5 • Jún 2008 • Letný semester 32. ročníka (2007/2008)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`