STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahojte, Stromáci!

Vaši super vedúci sa potrápili a Vaše riešenia rýchlo opravili. Darilo sa Vám veľmi dobre, tak si to nepokazte, aby sme sa vo februári videli na sústredení. Tým, ktorým to teraz veľmi nevyšlo, držíme palce a prajeme veľa trpezlivosti. Tak či tak, myslíme si, že Vám táto séria dosť dala a tešíme sa už na riešenia druhej série. Užívajte si ešte krásne dni jesene :-).

Vaši **STROM**isti

Riešenia 1. série úloh zimného semestra 35. ročníka

1. Nová kolekcia kalkulačiek pod názvom „Nevybuchnem“ má iba gombíky '+1', '−1', '+4' a '−4'. Kedykoľvek je však výsledok operácie deliteľný štyrmi, kalkulačka vybuchne. Na kalkulačke svieti číslo 1. Dá sa pomocou práve 2010 operácií dostať ku číslu 2?

Opravovali: Robo Tóth a Ján „Mazo“ Mazák **Počet riešiteľov: 60**

Riešenie:

Keďže pri číslach deliteľných štyrmi nám kalkulačka vybuchuje, nebude na škodu rozdeliť číselnú os na intervaly po tri čísla tak, aby presne čísla deliteľné štyrmi boli ich hranicami. Teda dostaneme takéto rozdelenie:

$$\ldots,\quad (-7,-6,-5),\quad (-3,-2,-1),\quad (1,2,3),\quad (5,6,7),\quad \ldots$$

Teraz je na čase sa pozrieť, čo robia naše operácie. Operácie ± 4 nás posúvajú z jedného intervalu do druhého. Takýto posun sa navyše nedá nahradiť operáciami ± 1, pretože by sme museli prekročiť hranicu intervalu, čo znamená výbuch. Na druhej strane, operácie ± 1 nás posúvajú iba v rámci intervalu, v ktorom práve sme a žiadnu inú funkciu nemajú (opäť kvôli nemožnosti prekročiť interval). Keďže číslo 1 a číslo 2 sú v rovnakom intervale, operácie ± 4 budeme musieť použiť párny počet krát (koľkokrát $+4$, toľkokrát -4). Operácie ± 1 budeme musieť zase použiť nepárny počet krát: $+1$ použijeme o jednu viac ako -1. Tu treba povedať, že ak dáme ± 1 v nejakom inom intervale, je to to isté, ako keby sme túto operáciu spravili v pôvodnom, pretože po operáciách ± 4 sa ocitneme na prislúchajúcom mieste v pôvodnom intervale (s rovnakým zvyškom po delení 4). Dokopy dostávame nepárny počet operácií a teda na 2010 to nejde.

Iné riešenie:

Každé prirodzené číslo sa dá napísať v tvare $4k+z$, kde k je celé a z je jedno z čísel 0, 1, 2, 3 (zvyšky po delení 4). Operácie ± 4 nám menia iba k a operácie ± 1 nám menia iba z (k zmeniť nemôžu, pretože by nám pri tom vybuchla kalkulačka).

Na začiatku sme v stave $4 \cdot 0 + 1$ a chceme sa dostať do stavu $4 \cdot 0 + 2$. Z toho po troche premýšľania vidno, že ± 4 stlačíme párny počet krát a ± 1 nepárny počet krát (lebo z nepárneho čísla 1 na párne 2 sa pomocou pridávania nepárneho ± 1 dá dostať len na nepárny počet pokusov). Teda celkový počet operácií bude nepárny a na 2010 to nejde.

<u>Iné riešenie:</u> (podľa Mišky Belanovej)
Pozrime sa na deliteľnosť ôsmimi a nahraďme všetky dosiahnuteľné čísla ich zvyškom po delení ôsmimi. Môžeme ich takto šikovne zapísať:

$$\begin{array}{lll} 1, & 2, & 3 \\ 5, & 6, & 7 \end{array} \qquad \text{(0 a 4 dosiahnuť nemôžeme, to je výbuch).}$$

Operácia ± 4 nás posúva v tabuľke v smere zvislom a operácia ± 1 nás posúva v smere vodorovnom. Náš počiatočný stav má po delení 8 zvyšok 1, konečný má zvyšok 2. Z tabuľky už teda jasne vidno, že na 2010 operácií, čo je párny počet, to nepôjde.

Komentár: Najčastejšie chyby vo vašich riešeniach boli:

- Považovanie 0 za číslo nedeliteľné štyrmi. Definícia deliteľnosti (pre celé čísla) hovorí, že celé číslo a je deliteľné celým číslom b, ak existuje celé číslo k také, že $a = b \cdot k$. Keďže platí $0 = b \cdot 0$, tak ľubovoľné celé číslo b delí 0.

- Pripočítanie 1 na začiatku a potom uvažovanie, prečo sa to nedá dokončiť. Vaše riešenie je takto rozporuplné – na jednej strane sa tvárite, že to ide a s vervou prirátate jednotku, ako keby to mal byť nejaký zaručený návod, ale potom začnete vysvetľovať, prečo to nejde. Čo ak to ide a len bolo treba začať operáciou $+4$?

- Ľubovoľné prehadzovanie operácií. Mohlo by sa zdať, že operácia sčítania alebo odčítania tu bude komutatívna, ale s vybuchujúcou kalkulačkou by vám nemalo byť jedno, či najprv prirátate 1, alebo najprv odrátate 4 (ak to jedno je, treba vysvetliť prečo).

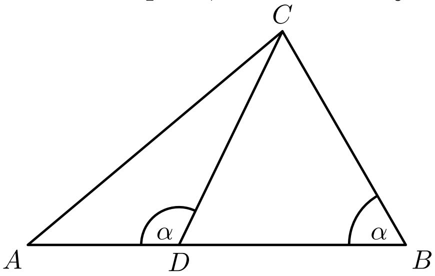
Na záver perlička z vašich riešení: „A keby bol počet prechodov párny, tak na tej akože dvojke bude nepárny počet plus párny počet prechodov späť k párnej dvojke sa rovná nepárny.“

2. Popíšte trojuholníky, ktoré sa dajú jedným priamym rezom rozdeliť na dva navzájom podobné trojuholníky. Svoje tvrdenie zdôvodnite.
(Príklad vhodného popisu: sú to trojuholníky s dĺžkami strán a, b, c, pre ktoré platí $a + 2b = 4c$. Nezabudnite nielen ukázať, že vami popísané trojuholníky vyhovujú, ale treba tiež zdôvodniť, prečo nevyhovuje žiaden trojuholník, ktorý váš popis nespĺňa.)

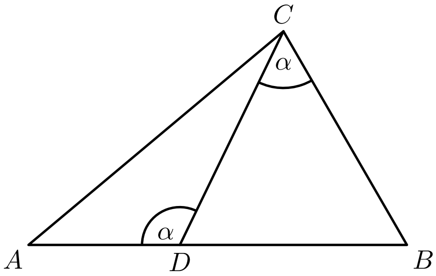
Opravovali: Janka Baranová a Marek Derňár **Počet riešiteľov: 51**
<u>Riešenie:</u>
Označme hľadaný trojuholník ABC a skúsme odvodiť podmienky, ktoré preňho musia platiť. Priamy rez ho má rozdeliť na dva trojuholníky, to znamená, že rez musí prechádzať práve jedným vrcholom. Keby prechádzal dvoma vrcholmi, tak nám trojuholník nijak nerozdelí, a naopak, keby neprechádzal ani jedným vrcholom (teda by prechádzal cez dve strany), tak by trojuholník ABC rozdelil na trojuholník a štvoruholník. Bez ujmy na všeobecnosti teraz predpokladajme, že rez prechádza vrcholom C a stranu AB pretne v bode D.
Vieme, že dva trojuholníky sú podobné práve vtedy, keď sa zhodujú navzájom si odpovedajúce uhly. Označme $|\sphericalangle CDA| = \alpha$. Chceme, aby trojuholník ADC bol podobný s trojuholníkom BDC (na poradí vrcholov tentokrát nezáleží). Potom vieme, že α musí byť vnútorným uhlom trojuholníka BDC (keďže je aj v trojuholníku ADC). Máme teda tri možnosti, ktorý uhol to môže byť:

1. $|\sphericalangle DBC| = \alpha$, takže priamka DC je rovnobežná s priamkou BC (keďže uhly CDA a DBC sú súhlasné) alebo bod D je totožný s bodom B. Zjavne ani jedno z toho neplatí, keďže bod D leží vnútri strany AB – obr. 1.

2. $|\sphericalangle DCB| = \alpha$, takže priamka AB je rovnobežná s priamkou BC (uhly ADC a DCB sú striedavé). To zjavne tiež neplatí, keďže ABC je trojuholník – obr. 2.



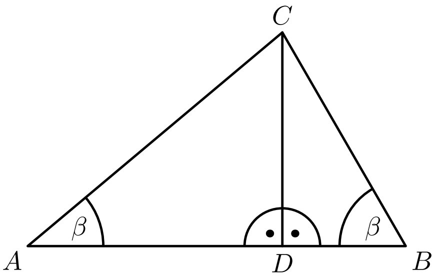
obr. 1



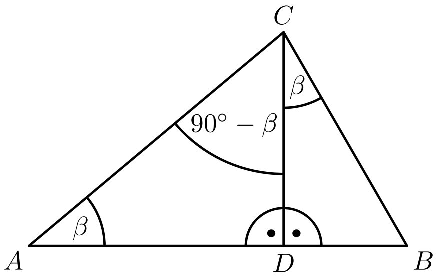
obr. 2

3. $|\sphericalangle BDC| = \alpha$, ale uhol BDC je susedný k uholu ADC, preto ich súčet je $180°$, teda $\alpha = 90°$. Rez je teda kolmý na stranu AB a opäť máme dve možnosti ako zvyšné uhly rozmiestniť. Nech $|\sphericalangle DAC| = \beta$ v trojuholníku ADC, potom je uhol β aj v trojuholníku BDC:

   - $|\sphericalangle DBC| = \beta$, potom $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DBC| = \beta$, takže trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou AB a rez teda vedieme z bodu C kolmo na základňu (protiľahlú stranu) – obr. 3.
   - $|\sphericalangle DCB| = \beta$, potom $|\sphericalangle ACD| = 90° - \beta$ (keďže súčet uhlov v trojuholníku ADC je $180°$) a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle DCB| = 90° - \beta + \beta = 90°$. Trojuholník ABC je teda pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C a rez vedieme z bodu C kolmo na preponu (protiľahlú stranu) – obr. 4.



obr. 3



obr. 4

Tu veľa z Vás svoje riešenie ukončilo, čo však bolo predčasné. Zatiaľ sme len dokázali, že trojuholníky spĺňajúce zadanie môžu byť iba rovnoramenné alebo pravouhlé. Je však potrebné ešte ukázať, že naozaj všetky pravouhlé aj rovnoramenné trojuholníky tomuto zadaniu vyhovujú.

Majme ľubovoľný rovnoramenný trojuholník ABC (so základňou AB). Ak CD je jeho výška, tak trojuholníky ADC a BDC sú zhodné (podľa vety Ssu), čiže aj podobné (s koeficientom podobnosti jedna).
Teraz majme ľubovoľný pravouhlý trojuholník ABC (s preponou AB). Ak CD je jeho výška a $|\sphericalangle DAC| = \beta$, tak $|\sphericalangle ACD| = 90° - \beta$, takže potom $|\sphericalangle DCB| = 90° - (90° - \beta) = \beta$. Podľa vety uu vidíme, že trojuholníky ADC a CDB sú podobné.

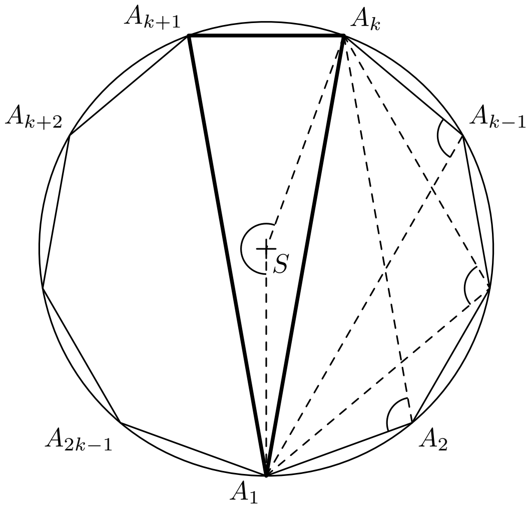
Komentár: S úlohou ste si počínali pomerne dobre, aj keď veľa z Vás plný počet bodov nemá. Zabudli ste totiž na to, že ak zistíme, že to platí iba pre pravouhlé (príp. rovnoramenné) trojuholníky, tak to nemusí platiť pre všetky také trojuholníky. Možno by sa niekomu mohlo zdať, že to vyplýva už z prvej časti dôkazu. To však nie je pravda. V prvej časti sme predpokladali, že tie dva trojuholníky sú podobné a našli, čo tomu môže vyhovovať. V druhej časti práve naopak dokážeme, že všetko nami objavené tomu vyhovuje (čiže každý rovnoramenný, resp. pravouhlý, trojuholník sa dá rozdeliť na dva podobné trojuholníky). Ide teda o dve navzájom opačné implikácie.

3. Máme dané dĺžky a a b, pričom vieme, že sa dá zostrojiť pravidelný mnohouholník so stranou veľkosti a a najdlhšou uhlopriečkou veľkosti b. Pomocou pravítka a kružidla ho zostrojte, ak nepoznáte počet jeho strán, dokonca ani neviete, či je tento počet párny alebo nepárny.

Opravovali: Jana Baranová a Marek Derňár **Počet riešiteľov: 52**

Riešenie:

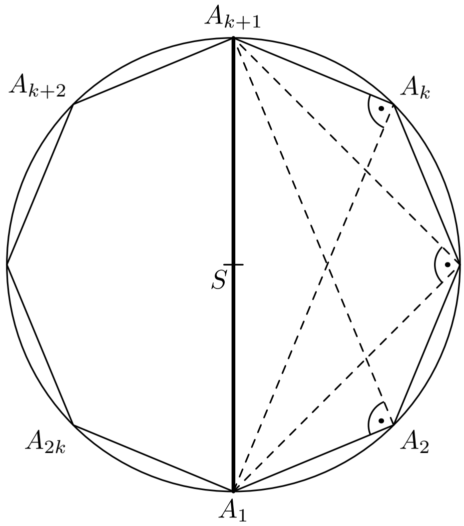
Majme pravidelný n-uholník $A_1A_2\dots A_n$. Ako prvé po prečítaní zadania by nás malo napadnúť zamyslieť sa nad „najdlhšou uhlopriečkou“. Ktorá to je? Prečo? Po nakreslení obrázkov si ľahko všimneme, že to pre n-uholník s párnym ($n = 2k$) a n-uholník s nepárnym ($n = 2k - 1$) počtom strán nebude vyzerať rovnako (dokonca už samotné zadanie úlohy nám to naznačuje).



Vidíme, že pre $n = 2k$ je vrchol A_1 „spojený“ najdlhšou uhlopriečkou s práve jedným ďalším vrcholom a tým je A_{k+1}. Naopak pre $n = 2k - 1$ je vrchol A_1 „spojený“ najdlhšou uhlopriečkou s dvoma vrcholmi, a to A_k a A_{k+1}. Tieto tvrdenia však treba aj dokázať.

Začneme rozobratím n-uholníka s nepárnym počtom strán. Vieme, že pravidelnému n-uholníku sa dá opísať kružnica (označme jej stred S). Taktiež vieme, že je osovo súmerný podľa priamky A_1S, a preto $|A_1A_2| = |A_1A_{2k-1}|$, $|A_1A_3| = |A_1A_{2k-2}|, \dots, |A_1A_k| = |A_1A_{k+1}|$. Chceme teda dokázať, že všetky uhlopriečky A_1A_i (pre všetky $i \in \{2, 3, \dots, k-1\}$) sú menšie ako A_1A_k. Body A_1, A_i a A_k ležia na kružnici so stredom v bode S a teda nekonvexný uhol A_1SA_k je stredový ku každému uhlu $A_1A_iA_k$. Keďže veľkosť obvodového uhla je polovica veľkosti stredového a veľkosť nekonvexného uhla A_1SA_k je väčšia ako $180°$, tak $|\sphericalangle A_1A_iA_k| > 90°$. V trojuholníku $A_1A_iA_k$ je teda najväčší uhol $A_1A_iA_k$ (keďže je tupý) a vzhľadom k tomu, že oproti najväčšiemu uhlu je najväčšia strana, tak $|A_1A_k| > |A_1A_i|$, čo sme chceli dokázať.

Pre $n = 2k$ je dôkaz podobný, až na to, že opísaná kružnica je Talesovou kružnicou nad priemerom A_1A_{k+1} (keďže $|\sphericalangle A_1SA_{k+1}| = 180°$ – skúste to dokázať). Preto $|\sphericalangle A_1A_iA_{k+1}| = 90°$, čiže A_1A_{k+1} je prepona v pravouhlom trojuholníku, takže je najdlhšia.



Teraz už vieme, ktoré sú tie najdlhšie uhlopriečky a prečo. Stačí už len prísť na správny postup. Z dôkazu predtým je zrejmé, že jednoduchšia konštrukcia bude pre n párne.

Vyriešme teda úlohu najprv pre $n = 2k$. Ukázali sme, že v tomto prípade je najdlhšia uhlopriečka A_1A_{k+1} a je to zároveň aj priemer kružnice opísanej n-uholníku. Preto narysujeme túto kružnicu so stredom v bode S a polomerom $\frac{b}{2}$. Zvolíme ľubovoľný bod na kružnici a označíme ho A_1. Potom postupne „nanášame“ kružidlom vzdialenosť a po kružnici, čím vznikajú body A_2, A_3, atď. Ak nám posledný vrchol „padne“ priamo do vrcholu A_1 (je totožný s A_1), tak sme skonštruovali požadovaný pravidelný n-uholník (n je párne). Ak pri tomto „nanášaní“ prejdeme celú kružnicu a posledný bod nie je totožný s A_1, tak hľadaný n-uholník nemá párny počet vrcholov (čiže $n = 2k - 1$). Pozrime sa teraz na konštrukciu pre $n = 2k - 1$. Všimnime si trojuholník $A_1A_kA_{k+1}$, ktorý, ako sme už dokázali, má strany známych veľkostí b, b a a, takže ho vieme jednoducho narysovať. Kružnica opísaná tomuto trojuholníku je totožná s kružnicou opísanou n-uholníku, teda mu opíšeme kružnicu (stredom S je priesečník osí strán). Keď už máme kružnicu, tak pokračujeme rovnako ako predtým. Nanášame teda postupne vzdialenosť a na kružnicu, až kým posledný bod nepadne do A_1 (ak tam

nepadne, tak n-uholník nemôže mať nepárny počet vrcholov).
Objavili sme postup konštrukcie pre n párne aj pre n nepárne. Zadanie nám však hovorí, že nevieme, či je počet vrcholov párny alebo nepárny. Ako teda toto vyriešiť? Stačí nám najprv skúsiť postup pre n párne a ak bude „neúspešný“ (neskonštruujeme ním hľadaný n-uholník), tak ho určite skonštruujeme postupom pre n nepárne.

Komentár: Najčastejšie išli body dole za to, že ste nezdôvodnili, prečo sú v n-uholníku s nepárnym počtom strán dve najdlhšie uhlopriečky a taktiež ste neukázali, že naozaj tie dve sú najdlhšie. Našlo sa taktiež množstvo riešiteľov, ktorí napísali iba postup konštrukcie. Okrem postupu konštrukcie je dôležitý aj dôkaz jej správnosti, na ktorý nesmiete zabúdať (v našom prípade vyplýval z dôkazu vlastností najdlhších uhlopriečok). Dôležitou súčasťou riešenia konštrukčnej úlohy je aj diskusia o počte riešení. V našom prípade bolo v zadaní priamo povedané, že sa taký pravidelný n-uholník dá zostrojiť, čiže riešením je jediný pravidelný n-uholník (skúste korektne dokázať, že ich nemôže byť viacero rôznych). V tejto úlohe teda nebola diskusia o počte riešení potrebná, ale pri iných úlohách by ste kvôli jej neprevedeniu mohli prísť o body.
Inak si myslíme, že ste úlohy zvládli vyriešiť. Možno ste len mali problém korektne spísať riešenie, keďže šlo o netypickú úlohu.

4. Maťko a Kubko si vymysleli novú hru na svojej šachovnici 11×11. Každý hráč môže na šachovnicu v svojom kole položiť na ľubovoľné políčko jeden oriešok (O) alebo jeden xylofón (X). Je to na ňom, čo a kde položí (t.j. vždy si môžu vybrať, či položia O alebo X). Vyhráva ten, kto prvý vytvorí 3 rovnaké symboly v riadku, stĺpci alebo pozdĺž diagonály. Ak Maťko začína, pre koho existuje víťazná stratégia? Mohlo by sa stať, že by ich hra skončila remízou? (Víťazná stratégia je postup, ktorý umožní hráčovi zvíťaziť pri akýchkoľvek ťahoch protihráča.)

Opravovali: Jakub Sedlák a Gaba Vozáriková **Počet riešiteľov: 39**
Riešenie:

X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X
X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X
O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O
O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O
X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X
X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X
O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O
O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O
X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X
X	O	X	O	X	O	X	O	X	O	X
O	X	O	X	O	X	O	X	O	X	O

Začneme riešenie druhou otázkou – je možné, aby chlapci skončili remízou? Inými slovami povedané, existuje také zaplnenie hracej plochy symbolmi X a O, aby v ňom neboli tri rovnaké symboly v riadku, stĺpci, ani pozdĺž diagonály? Ak sa trošku pohrajeme, tak dostaneme napríklad vyplnenie, ktoré je na obrázku.
Teraz sa zamyslime nad víťaznou stratégiou. Pre ktorého chlapca? Je jasné, že nie pre oboch (to by totiž znamenalo, že by museli vyhrať obaja). Ako aj intuícia hovorí, Maťko je v akejsi výhode. Nájdeme postup, akým sa bude riadiť počas hry. Musí vedieť reagovať na akýkoľvek ťah Kubka, preto sa na popis Maťkovho postupu zdá výhodná nejaká súmernosť. Osová je v našej hre nevýhodná, ľahko by pri nej Maťko mohol prehrať.
Uvažujme preto o stredovej so stredom v strede hracej plochy. Teda Maťko bude kopírovať Kubkove ťahy v tejto stredovej súmernosti (samozrejme až na výnimku, kedy sa Maťkovi naskytne príležitosť utvoriť trojicu a teda vyhrať). Jediné, čo by nám mohlo znemožniť tento postup, sú samodružné body (tie, ktoré sa zobrazia samé na seba), pretože Maťko nemôže napísať symbol na už obsadené políčko. Našťastie však stredová súmernosť má taký bod jediný – svoj stred. Preto Maťko stred chytro zaplní symbolom (O alebo X) v prvom ťahu.
Zabezpečíme tak víťazstvo? Predpokladajme, že nie, teda že Maťko svojím ťahom utvorí Kubkovi príležitosť vyhrať (pamätajme, že pred týmto svojím ťahom Maťko vyhrať nemohol, inak by to spravil – označme tento fakt písmenom V). Existuje teda dvojica obsadených políčok (označíme ich A_1 a A_2), ktorú vie Kubko doplniť do výhernej trojice. Jedno políčko z tejto dvojice musí byť Maťkom naposledy pridaným (ak by totiž nebolo ani jedno také, tak by táto dvojica umožňujúca výhru existovala už pred Maťkovým ťahom, a teda by nebolo splnené V). Bez ujmy na všeobecnosti

nech je to políčko A_1. Hracie pole je však stredovo súmerné, a teda existujú obrazy týchto políčok A_1 a A_2, ktoré sú rovnako príležitosťou na výhru. Ak zaručíme, že ani jedno z týchto obrazov nie je políčko A_1, tak by existovala možnosť výhry ešte pred Maťkovým ťahom (doplnením týchto políčok A_1 a A_2) a teda by nebolo splnené V. Predpokladajme teda opak. Máme dve možnosti:

1. A_1 sa zobrazí do A_1, teda ide o samodružný bod. Ten však máme jediný a to stred. Teda A_1 je stred, čím dostávame spor. Stred totižto nemôže byť Maťkom naposledy pridané políčko. Bol by to len prvý krok, po ktorom Kubko isto nemohol hneď vyhrať.

2. A_2 sa zobrazí do A_1. Z vlastností stredovej súmernosti potom vieme, že A_1 sa zobrazí do A_2. Na to, aby dvojica A_1, A_2 umožňovala Kubkovi výhru, musí byť medzi nimi najviac jedno políčko. Keďže A_2 je obraz A_1, musí byť medzi nimi aspoň stred. Teda dostávame, že je medzi nimi práve stred. Táto dvojica teda nemôže byť Kubkom víťazne doplnená do trojice, pretože políčko medzi nimi (stred) je od začiatku obsadené. Čiže dostávame spor aj v tomto prípade.

Dokázali sme teda, že Kubko isto nevyhrá. Ešte treba ukázať, že pri tomto postupe Maťko stále vyhrá.
Uvažujme, že nastala remíza. Hracia plocha musí byť zaplnená vrátane časti okolo stredu (štvorec 3×3). Navyše musí byť vyplnená stredovo súmerne a tak, aby v ňom nebola žiadna víťazná trojica. Bez ujmy na všeobecnosti nech je v strede O. Potom po obvode nemôže byť žiadne O, lebo by muselo byť aj súmerne, a mali by sme trojicu. Musia tam byť teda samé X. Potom ale máme výherné trojice po obvode, čo je opäť spor.
Tým sme dokázali, že stratégia pre Maťka nie je len neprehrávajúca, ale víťazná. Tak Maťko smelo do Kubka!

Komentár: Mnohí z vás uviedli nejakú hernú stratégiu pre Maťka, no neukázali, že je víťazná. V riešení musia byť všetky tvrdenia podložené argumentami. Často ste nepochopili otázku, či v tejto hre môže nastať remíza. Táto otázka je od úlohy nájdenia výhernej stratégie nezávislá. Do remízového stavu sa pokojne môžu hráči dostať tak, že chcú. Mnohým z vás sme do riešení napísali otázku: „Prečo vami nájdená stratégia nefunguje na šachovnici 4×4?“ Dôvodom je chýbajúci komentár o skutočnom dôvode nutnosti „nepárnej šachovnice“. Ďalšou častou chybou bolo nedotiahnutie dôkazu výhernej stratégie do konca. Skončili ste pri ukázaní, že je neprehrávajúca, čo nie je to isté.
Na záver sa skúste zamyslieť nad stratégiou pre šachovnicu 10×10.

5. Kružnica k prechádza vrcholmi A a B rovnoramenného trojuholníka ABC so základňou AB a dotýka sa priamky AC. Dokážte, že kružnica k prechádza stredom vpísanej kružnice, stredom opísanej kružnice alebo priesečníkom výšok trojuholníka ABC.

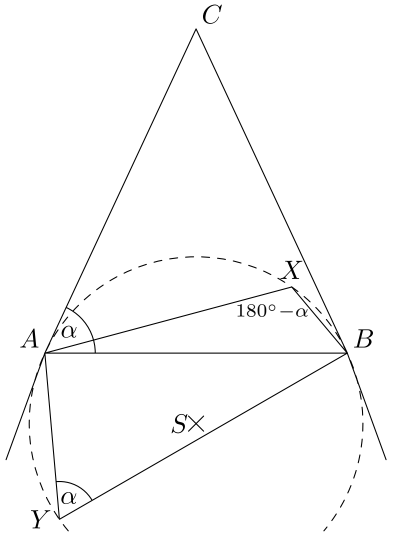
Opravovali: Edo Eiben a Laco Bačo **Počet riešiteľov: 38**

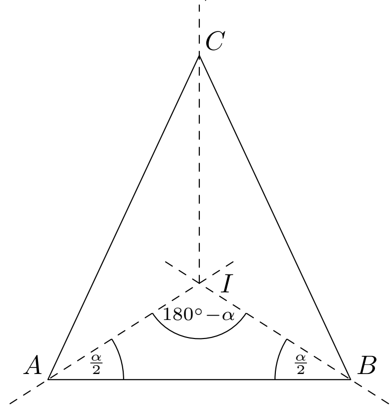
Riešenie:

Zo zadania vieme, že AC je dotyčnica ku kružnici k v bode A. Uhol CAB označíme α. Z vety o úsekovom uhle vieme, že ak si vezmeme ľubovoľný bod Y na kružnici k, ktorý je v opačnej polrovine ako bod C (vzhľadom na priamku AB), tak $|\sphericalangle AYB| = \alpha$ (toto nie je ťažké ukázať a ak nepoznáte vetu o úsekovom uhle, tak sa zamyslite nad tým, prečo to platí, alebo to skúste aspoň vygoogliť ;-)).
Ak teraz vezmeme ľubovoľný bod X z oblúka nad AB kružnice k, na ktorom neleží bod Y, tak $|\sphericalangle AXB| = 180^\circ - \alpha$ (štvoruholník $AYBX$ je tetivový). Zároveň ak pre nejaký bod Z, ktorý leží v rovnakej polrovine vzhľadom na AB ako bod X, platí $|\sphericalangle AZB| = 180^\circ - \alpha$, tak Z leží na kružnici k.
Vieme, že stred vpísanej kružnice, oznažíme ho I, leží v rovnakej polrovine ako X. Stačí nám teda ukázať, že $|\sphericalangle AIB| = 180^\circ - \alpha$. To určite platí, keďže AI je os uhla BAC, BI je os uhla ABC, čiže $|\sphericalangle ABI| = \frac{\alpha}{2}$, $|\sphericalangle BAI| = \frac{\alpha}{2}$. Z trojuholníka AIB teda vyplýva

$$|\sphericalangle AIB| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \alpha.$$

Takže naozaj stred vpísanej kružnice leží na kružnici k a ukázali sme, čo sme chceli.





Nakoniec by som chcel dodať, že neviem, či ste rozmýšľali nad tým, prečo v zadaní boli navyše body ako stred opísanej kružnice alebo priesečník výšok. Ak by sme ignorovali podmienku zo zadania, že AB je základňa (pri ukazovaní, že $|\sphericalangle AXB| = 180° - \alpha$ sme ju ani nijako nevyužili), tak by sme zistili, že podmienku $|\sphericalangle AXB| = 180° - \alpha$ spĺňajú podľa voľby základne rôzne z tých troch bodov. Pre základňu AC, by sme dostali, že na kružnici leží priesečník výšok. Pre základňu BC zas, že na kružnici leží stred opísanej kružnice. Dôkaz, prečo tie body pri zmene základne spĺňajú tú podmienku a ležia na kružnici, prenecháme na usilovného čitateľa. Poradíme však, že ide o obyčajné porátanie uhlov a zistenie, že naozaj tieto body spĺňajú $|\sphericalangle AXB| = 180° - \alpha$.

Komentár: Prišli od vás rôzne riešenia a mnoho z nich bolo správnych. Väčšina z vás si všimla, že všetky tri body (stred vpísanej, opísanej kružnice a priesečník výšok) ležia na osi uhla pri vrchole C, keďže trojuholník zo zadania je rovnoramenný so základňou AB. Takisto ste správne prišli na to, že tým bodom bude práve stred vpísanej kružnice. Potom sa už porátaním nejakých uhlov dalo dopracovať k tomu, že stred vpísanej kružnice je rovnako vzdialený od stredu kružnice k, ako bod A, poprípade, že prienik kružnice k a osi uhla pri vrchole C leží aj na osi uhla pri vrchole A v trojuholníku ABC. Vzorové riešenie je jedno z riešení, ktoré je vcelku krátke a elegantné.

6. Dlhý John získal mapu pokladu. Poklad je zakopaný v bode (x, y) s celočíselnými súradnicami (môžu byť aj záporné). Tento bod však na mape zobrazený nie je, miesto toho sú tam len napísané hodnoty $x^2 + y$ a $x + y^2$ (vieme, ktorá z nich prislúcha ktorému výrazu). Tieto hodnoty sú rôzne. Dokážte, že ak John nie je hlúpy, stačí mu na získanie pokladu kopať na jedinom mieste.

Opravovali: Laco Bačo a Tomáš Kocák **Počet riešiteľov: 22**

Riešenie:

Predpokladajme, že pre dané hodnoty $x^2 + y = T$ a $y^2 + x = U$ vyhovuje aspoň jedna celočíselná dvojica[1] x, y, označme ju $[a, b]$. Jednoznačnosť riešenia teraz dokážeme sporom.

Predpokladajme, že existuje ešte jedna celočíselná dvojica vyhovujúca podmienkam, označme ju $[c, d]$, pričom $c \neq a$ alebo $d \neq b$.

Ak $c = a$, tak platí $a^2 + b = T = c^2 + d$, teda aj $b = d$. Obdobne z rovnosti $d = b$ vyplýva rovnosť $c = a$, teda ak chceme, aby dvojica $[c, d]$ bola rôzna od $[a, b]$, tak $a \neq c$ a zároveň $b \neq d$.

Úpravou rovnosti $a^2 + b = c^2 + d$ dostaneme

$$d - b = (a - c) \cdot (a + c) \qquad (1)$$

[1] predpokladáme, že hodnoty T a U sú naozaj korektné, ako vraví zadanie

a úpravou rovnosti $a + b^2 = c + d^2$ dostaneme

$$a - c = (d - b) \cdot (d + b). \tag{2}$$

Dosadením (1) do (2) dostávame rovnosť

$$a - c = (a - c) \cdot (a + c) \cdot (d + b).$$

Pretože $a \neq c$, tak musí platiť

$$(a + c) \cdot (b + d) = 1. \tag{3}$$

Keďže a, b, c a d sú celé čísla, tak aj $a + c$ a $b + d$ sú celé čísla, preto podľa (3) musí nutne platiť $a + c = b + d = 1$ alebo $a + c = b + d = -1$. Tieto dve možnosti rozoberieme osobitne:

- Ak $a + c = b + d = 1$, tak vieme, že $c = 1 - a$, $d = 1 - b$. Dosadením do podmienok zo zadania dostaneme rovnosti $a = d$, $b = c$, z čoho vyplýva $T = U$, čo je spor.
- Ak $a + c = b + d = -1$, tak vieme, že $c = -1 - a$, $d = -1 - b$. Z toho potom dostávame $a = b$, $c = d$, čo zase vedie k sporu $T = U$.

V oboch prípadoch sme došli k sporu, teda je nepravdivý náš predpoklad, že existuje ďalšie celočíselné riešenie rôzne od $[a, b]$. To znamená, že daným hodnotám T a U vyhovuje (najviac[2]) jedno celočíselné riešenie, preto Johnovi stačí kopať na jednom mieste, čo sme aj chceli dokázať.

Poradie po 1. sérii Zimného semestra 35. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	B	CS
1.	Klára Ficková	3. A	GPoštKE	9	9	9	9	9	9	0	54
2.	Tomáš Babej	4. A	GPoštKE	9	9	8	6	9	9	0	50
3.	Miroslav Stankovič	1. A	GPoštKE	9	8	7	5	9	2	9	47
	Peter Milošovič	4. A	GPoštKE	9	9	9	6	9	5	0	47
5.	Martin Vodička	Sexta	GAlejKE	9	9	-	5	9	9	5	46
	Viktor Szabados	4. B	GGrösBA	9	9	9	8	9	2	0	46
	Dávid Hvizdoš	4. A	GPoštKE	9	8	7	6	9	7	0	46
8.	Matúš Stehlík	Oktáva	GAlejKE	9	9	9	7	9	2	0	45
	Jakub Šafin	2. G	GMasaMI	4	8	5	9	9	9	5	45
10.	Katarína Krajčiová	Kvarta	GAlejKE	4	8	8	7	8	-	8	43
11.	Ľudmila Šimková	Kvinta	GPároNR	9	8	8	-	8	-	9	42
12.	Dáša Krasnayová	Oktáva	GAlejKE	9	8	9	4	9	2	0	41
13.	Ján Jursa	1. A	GPoštKE	9	8	8	6	-	-	9	40
14.	Daniel Till	3. A	GPoštKE	6	7	8	6	9	-	0	36
	Lucia Magurová	2. A	GPoštKE	7	8	8	2	9	-	2	36
16.	Kristína Faguľová	3. A	GPoštKE	3	9	8	6	9	-	0	35
17.	Monika Zlaczka	4. A	GPoštKE	9	6	7	3	9	0	0	34
18.	Jakub Dargaj	1. A	GPoštKE	9	7	7	-	-	-	9	32
	Michal Kopf	3. A	GSlezCZ	7	7	6	-	9	3	0	32
	Miloslav Homer	3. A	GPoštKE	9	6	8	-	9	-	0	32
21.	Martin Rapavý	Kvinta A	GAlejKE	3	8	8	-	3	-	8	30
	Ludmila Jankovichová	1. F	GTajoBB	9	4	8	-	-	-	9	30

[2] skúste nájsť riešenia napr. pre $T = 42$, $U = 47$. Prečo to nejde?

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	B	CS
23.	Alena Bušáková	8. V	GSpitCZ	4	8	6	3	8	-	0	29
	Dorota Jarošová	Kvarta	GAlejKE	1	7	7	4	3	-	7	29
	Ivana Gašková	Septima	GAlejKE	3	9	8	-	9	-	0	29
	Denisa Semanišinová	Sexta	GAlejKE	7	9	8	-	-	5	0	29
	Martina Hlavatá	Oktáva	GGrösBA	5	5	8	2	9	-	0	29
28.	Pavol Koprda	7. OA	GHvieTT	8	2	4	5	9	-	0	28
	Denisa Múthová	4. A	GRužiŽA	9	8	-	3	8	-	0	28
30.	Viktor Lukáček	3. C	GŠevčPO	9	8	4	3	-	3	0	27
31.	Daniel Ondra	1. A	ZKro4KE	5	2	8	3	-	-	8	26
32.	Vladimír Macko	2. A	GHronZV	4	9	6	3	1	-	1	24
	Anton Gromóczki	9. A	ZStanKE	8	8	-	-	-	-	8	24
	Ján Hoffmann	Oktáva	GAlejKE	7	-	8	-	9	-	0	24
35.	Martina Oravcová	1. A	GPoštKE	1	1	1	2	9	0	9	23
	Vladislav Vancák	Kvinta B	GAlejKE	5	-	7	2	1	1	7	23
37.	Irena Bačinská	5. Q	GKomeLY	1	6	3	2	3	1	6	21
	Jaroslav Petrucha	Sexta	GMetoBA	5	8	8	-	-	-	0	21
	Radka Masloviaková	Oktáva	GAlejKE	8	3	6	4	-	-	0	21
40.	Roman Pivovarník	5. OA	GMudrPO	8	-	4	-	-	-	8	20
	Magdaléna Krejčíová	1. E	GTataPP	8	-	-	4	-	-	8	20
	Martina Bekrová	8. Y	GTrutCZ	1	4	6	3	6	-	0	20
43.	Matúš Hlaváčik	Sexta	GAlejKE	5	9	-	5	-	-	0	19
44.	Ján Dudič	2. A	GPoštKE	5	0	6	-	7	0	0	18
	Daniela Harčarufková	3. A	GPoštKE	9	-	-	-	-	9	0	18
46.	Viktória Valachová	1. A	GŠkolSN	-	-	7	2	-	-	7	16
	Ladislav Hovan	4. A	GExnáKE	4	6	6	-	-	-	0	16
48.	Matúš Porázik	Kvinta A	GAlejKE	1	-	7	-	-	-	7	15
49.	Zuzana Baxová	3. E	G1májTN	-	-	8	6	-	-	0	14
50.	Michaela Belanová	Septima	GTeplBA	9	3	-	-	-	-	0	12
51.	Róbert Solárik	2. A	GPoštKE	3	-	8	-	-	-	0	11
52.	Lea Uhliarová	2. L	GTajoBB	0	2	8	0	-	-	0	10
	Tomáš Macko	2. A	GPoštKE	1	-	-	6	3	-	0	10
	Alžbeta Bohiniková	Oktáva	GGrösBA	1	8	-	-	1	-	0	10
55.	Štěpán Šimsa	Sexta	GJJLit	9	-	-	-	-	-	0	9
	Lucia Floriánová	1. A	GPoštKE	1	3	2	-	-	-	3	9
57.	Lucia Čabrová	2. A	GPoštKE	1	0	6	-	-	-	0	7
58.	Alica Ordošová	1. A	GPoštKE	0	0	0	2	1	-	2	5
59.	Veronika Koľveková	3. A	GPoštKE	0	2	2	-	0	-	0	4
60.	Marcel Frančák	2. B	GMierNO	-	2	0	-	-	1	0	3
61.	Ivana Sopatová	2. A	GPoštKE	1	1	-	0	-	-	0	2
	Martin Perešíni	1. A	PM. HBB	0	-	1	0	0	0	1	2
63.	Marcel Česelka	2. C	GŠkulKE	0	0	1	0	0	0	0	1

Pohár konštruktérov Zimného semestra 35. ročníka

P.	Skratka	Škola	P.r.	Body
1.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	22	596
2.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	13	394
3.	GGrösBA	Gymnázium Grösslingova 18 811 09 Bratislava 1	3	85
4.	GMasaMI	Gymnázium Pavla Horova Masarykova 1 071 79 Michalovce	1	45
5.	GPároNR	Gymnázium Párovská 1 950 50 Nitra	1	42
6.	GTajoBB	Gymnázium J. G. Tajovského 25 974 01 Banská Bystrica	2	40
7.	GSlezCZ	Slezské Gymnázium Zámecký okruh 29 746 01 Opava	1	32
8.	GSpitCZ	Gymnázium Špitálská 2 192 00 Praha 9	1	29
9.	GHvieTT	Gymnázium Angely Merici Hviezdoslavova 10 917 01 Trnava	1	28
	GRužiŽA	Gymnázium bilingválne T. Ružičku 3 010 01 Žilina	1	28
11.	GŠevčPO	Gymnázium sv. Moniky Tarasa Ševčenka 1 080 01 Prešov	1	27
12.	ZKro4KE	Základná škola Krosnianska 4 040 22 Košice	1	26
13.	GHronZV	Gymnázium Hronská 1467/3 960 01 Zvolen	1	24
	ZStanKE	Základná škola Staničná 13 040 01 Košice	1	24
15.	GKomeLY	Gymnázium Komenského 13 082 71 Lipany	1	21
	GMetoBA	Gymnázium Metodova 2 821 08 Bratislava 2	1	21
17.	GTrutCZ	Gymnazium Jiráskovo náměsti 325 541 01 Trutnov	1	20
	GMudrPO	Gymnázium J. A. Raymana Mudroňova 20 080 01 Prešov	1	20
	GTataPP	Gymnázium Dominika Tatarku 14 058 19 Poprad	1	20
20.	GExnáKE	Gymnázium Exnárova 10 040 22 Košice	1	16
	GŠkolSN	Gymnázium Školská 7 052 01 Spišská Nová Ves	1	16
22.	G1májTN	Gymnázium 1. mája 2 911 01 Trenčín	1	14
23.	GTeplBA	Gymnázium Teplická 7 831 02 Bratislava 3	1	12
24.	GJJLit	Gymnázium Josefa Jungmanna Svojsíkova 1 412 65 Litoměřice	1	9
25.	GMierNO	Gymnázium A. Bernoláka Mieru 307/23 029 01 Námestovo	1	3
26.	PM. HBB	SPŠ J. Murgaša M. Hurbana 6 975 18 Banská Bystrica	1	2
27.	GŠkulKE	Evanjelické gymnázium Škultétyho 10 040 01 Košice	1	1

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu:
  LPP-0057-09 Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • November 2010 • Zimný semester 35. ročníka (2010/2011)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`