



Ahojte!

Aj vy ste už pocítili tie prvé lúče letného slnka? Práve tie Vám pomohli definitívne sa premeniť z malých semienok na veľké a mohutné rastliny plné života, elánu a peľu pre usilovné včeličky, čo budú celé letné obdobie zbierať nektár. Ak ste si aj vy práve povedali, že čo za asociatívny text tu budem čítať, tak ste na veľkom omyle. Pred Vami je posledné číslo STROMu, kde sa definitívne dozviete nie len o správnych riešeniach druhej série, ale aj o Vašom poradí a prípadnom postupe na jesenné sústredenie. Tešia sa na Vás

Vaši **STROM**isti



Sústredenie

Už aj vy sa tešíte? Máte sa na čo. Prípravy sú v plnom prúde, preto nezaháľajte a aktualizujte si svoj profil na našich webových stránkach. Pozvánky na sústredenie vám dorazia na email, ktorý uvediete práve tam. Pri tej príležitosti si aktualizujte aj všetky ostatné infošky o vás. A aby sme neboli takí všeobecní, tak naznačíme aspoň to, že sústredenie sa bude pravdepodobne konať ešte v lete a stretneme sa na ňom s tými najlepšími z vás.

Cena Nadácie Orange

Ako ste si mnohí mohli všimnúť, nedávno sme boli nominovaní na cenu Nadácie Orange. V kategórii Vzdelávanie sa spolu s ďalšími 4 organizáciami uchádzame o 3 ocenené miesta. Taktiež sme sa zapojili do kategórie Cena verejnosti, v ktorej verejnosť vyjadrila svoj názor. Aj vďaka vám sme dosiahli famózný výsledok. Preto Vám všetkým, ktorí ste nás podporili, patrí veľké **ĎAKUJEME**. Finálne výsledky sa dozvieme na slávnostnom galavečeri 30.5.2016. Držte nám palce!



1. Opravovali: Ivka Gašková, Kristín Mišlanová

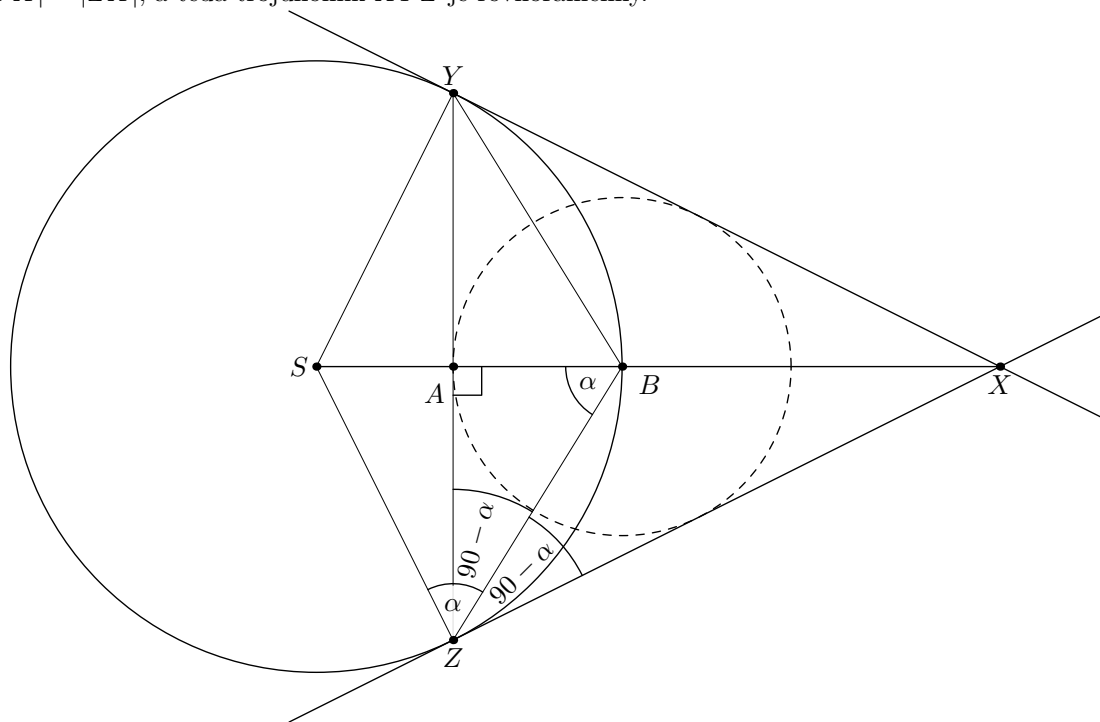
Počet riešiteľov: 22



Máme kružnicu k a bod X mimo nej. Nech XY a XZ sú dotyčnice ku kružnici k , pričom body Y a Z sú body dotyku. Dokážte, že stred kružnice vpísanej do trojuholníka XYZ leží na kružnici k .

Riešenie:

Nech bod S je stred kružnice k . Trojuholníky $XS Y$ a $XS Z$ sú zhodné podľa vety Ssu ($|SY| = |SZ|$ sú polomery kružnice k , $|\sphericalangle SYX| = |\sphericalangle SZX| = 90^\circ$, kde body Y, Z sú body dotyku, spoločná strana SX je oproti najväčšiemu uhlu). Z toho vyplýva, že $|YX| = |ZX|$, a teda trojuholník XYZ je rovnoramenný.



Stred vpísanej kružnice do trojuholníka nájdeme ako prienik osí jeho vnútorných uhlov. Keďže trojuholník XYZ je rovnoramenný, tak os uhla YXZ je zároveň výškou trojuholníka XYZ a osou strany (tetivy) YZ , čiže prechádza aj bodom S . Prienik úsečky YZ a XS označme A a prienik úsečky XS a kružnice k ako B .

Bod B leží na kružnici k a zároveň na osi uhla trojuholníka XYZ pri vrchole X . Ak ukážeme, že bod B leží aj na osi uhlov pri vrchole Z a Y , bude stredom vpísanej kružnice, a teda dostaneme presne to, čo sme chceli.

V trojuholníku ABZ platí $|\sphericalangle BAZ| = 90^\circ$ a uhol ABZ označme α . Potom $|\sphericalangle BZA|$ je $90^\circ - \alpha$.

Trojuholník SBZ je rovnoramenný s ramenami SB a SZ , ktoré predstavujú polomer kružnice k , a teda platí $|\sphericalangle SZB| = |\sphericalangle SBZ| = |\sphericalangle ABZ| = \alpha$. Vieme, že $|\sphericalangle SZX| = 90^\circ$ a $|\sphericalangle SZB| = \alpha$, odtiaľ $|\sphericalangle BZX| = |\sphericalangle SZX| - |\sphericalangle SZB| = 90^\circ - \alpha$.

Vidíme, že $|\sphericalangle BZA| = |\sphericalangle BZX| = 90^\circ - \alpha$, z čoho vyplýva, že BZ je osou uhla YZX . Analogicky ukážeme aj, že YB je osou uhla ZYX , a teda bod B je stredom vpísanej kružnice trojuholníka XYZ a zároveň leží na kružnici k .

Komentár: Takmer všetkým z vás sa podarilo úlohu hravo zvládnuť, čo nás veľmi potešilo :). Pri geometrických úlohách je vždy vhodné zahrnúť do riešenia aj náčrt, pre jeho lepšiu predstaviteľnosť. Myslite na to pri budúcom spisovaní úloh STROMu.

2. Opravovali: Žanetka Semanišínová, Peťo Kovács

Počet riešiteľov: 16



Dokážte, že ak p, q, r sú racionálne čísla a platí $p^2 + q^2 + r^2 + 2 = (p + q + r)^2$, potom $(1 + p^2)(1 + q^2)(1 + r^2)$ je druhou mocninou racionálneho čísla.

Riešenie:

Rovnosť zo zadania vieme upraviť nasledovne:

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 + 2 &= (p + q + r)^2 \\ p^2 + q^2 + r^2 + 2 &= p^2 + q^2 + r^2 + 2pq + 2qr + 2pr \\ 2 &= 2(pq + qr + pr) \\ 1 &= pq + qr + pr \end{aligned}$$

Našou úlohou je dokázať, že výraz $(1 + p^2)(1 + q^2)(1 + r^2)$ je druhou mocninou racionálneho čísla. Číslo 1 v tomto výraze vieme nahradiť výrazom, ktorý sme vyjadrili zo zadanej rovnosti. Odtiaľ máme:

$$(1 + p^2)(1 + q^2)(1 + r^2) = (pq + qr + pr + p^2)(pq + qr + pr + q^2)(pq + qr + pr + r^2)$$

Získaný výraz vieme pomocou vyberania pred zátvorku upraviť nasledovne:

$$(q(p + r) + p(r + p)) \cdot (q(p + q) + r(q + p)) \cdot (p(q + r) + r(q + r)) = (q + p)(r + p)(q + r)(p + q)(p + r)(q + r)$$

Tento výraz vieme vyjadriť aj ako $(p + q)^2(q + r)^2(r + p)^2$, kde vieme o každej zátvorke povedať, že je súčtom dvoch racionálnych čísel, teda taktiež racionálne číslo. Tento výraz preto predstavuje súčin troch druhých mocnín racionálnych čísel, čo je druhou mocninou racionálneho čísla pre všetky racionálne čísla p, q, r . Keďže všetky úpravy, ktoré sme vykonali boli ekvivalentné, dokázali sme tvrdenie zo zadania.

Komentár: Väčšine riešiteľov sa úlohu podarilo vyriešiť správne. V riešeníach najčastejšie chýbalo zdôvodnenie, že výraz je naozaj rovný mocnine racionálneho čísla a nie reálneho. Pár riešiteľov sa úlohu rozhodlo riešiť vyjadrením jednej premennej a dosadením. Ak ste sa vydali touto cestou, bolo treba ošetriť, aby sa vo výraze vyjadrujúcom premennú nedelilo nulou.

3. Opravoval: Roman Staňo

Počet riešiteľov: 25



Určte počet podmnožín množiny $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$, ktorej súčet prvkov je väčší alebo rovný ako 638.

Riešenie:

Zistíme súčet všetkých prvkov v množine zo zadania (nazvime ju M): $1 + 2 + \dots + 49 + 50 = (50 + 1) + (49 + 2) + \dots = 51 \cdot 25 = 1275$. Čím je číslo 638 zaujímavé? Lahko si všimneme, že má blízko k polovici súčtu prvkov M . Táto „vlastnosť“ bude v našom riešení kľúčová, hoci ju explicitne nezdôvodníme. Skúste sa na konci riešenia k tomuto odseku vrátiť a zamyslieť sa, prečo by podobné riešenie nefungovalo pri inej „voľbe čísla“ ako 638.

Rozdelíme všetky podmnožiny množiny M do dvoch skupín: skupiny A , kde budú všetky podmnožiny také, že súčet ich prvkov je najviac 637 a skupiny B , kde budú všetky podmnožiny také, že súčet ich prvkov je aspoň 638.

Uvedomme si, že každá podmnožina z A má svoj doplnok do M (ktorý je jednoznačne daný ako $M - A$) v skupine B . Súčet prvkov každej podmnožiny z A a jej doplnku totižto musí dať 1275 (musí dať celú množinu M). Keďže každá podmnožina z A má súčet prvkov najviac 637, jej doplnok má súčet prvkov aspoň 638 (inak by nedal v súčte 1275) a keďže je tiež podmnožinou M , nutne sa nachádza v skupine B .

Uvedomme si tiež, že každá podmnožina zo skupiny B má svoj (jednoznačne daný) doplnok do M v skupine A . Odôvodnenie nechávame na vás (je podobné, ako v predchádzajúcom prípade).

Všimnime si teda, že podmnožiny z A vieme „bezo zvyšku“ popárovať s podmnožinami z B (takým spôsobom, že popárujeme podmnožinu s jej doplnkom do M). Každéj podmnožine skupiny tak priradíme práve jednu (unikátnu) podmnožinu druhej skupiny. Rovnako aj každéj podmnožine druhej skupiny sa týmto popárovaním priradí podmnožina prvej skupiny. Žiadna podmnožina pri tom nemôže byť priradením dvoch rôznych podmnožín (to by museli byť rovnaké, čo by bol spor). Pre fajšmekrov spomenieme, že toto priradenie predstavuje bijektívne zobrazenie. Mimo iného, z tohto priradenia plynie aj to, že v A je rovnako veľa podmnožín ako v B (práve vďaka tomu, že podmnožiny tvoria disjunktné dvojice medzi skupinami). Podmnožín takých, že súčet ich prvkov je aspoň 638 je teda rovnako veľa ako tých, ktorých súčet prvkov je najviac 637 a je to preto polovica počtu všetkých podmnožín M (všetky podmnožiny A a všetky podmnožiny B dajú spolu všetky podmnožiny M).

Ostáva zistiť, koľko podmnožín vlastne M má. Povedzme, že chceme vytvoriť nejakú podmnožinu. Pre každý z 50 prvkov M sa vieme rozhodnúť, či ho do tvorenej podmnožiny vezmeme alebo nie. Máme tak 2^{50} možností pre rozhodnutie. Každé rozhodnutie pri tom vedie k jedinečnej podmnožine a každá podmnožina je výsledkom nejakého rozhodnutia (rozmyslite si prečo). Počet podmnožín s hľadanou vlastnosťou preto bude: 2^{49} .

Komentár: Takmer všetci odhalili myšlienku párovania podmnožín a ich doplnkov a prišli k správne výsledku. Horšie to však bolo s vysvetľovaním tohto párovania. Niektorí z vás si neuvedomili, že z úplného priradenia množín v B ku množinám A ešte neplynie, že v A ich máme rovnako veľa ako v B .

4. Opravovali: Henka Michelová, Matúš Stehlík

Počet riešiteľov: 19



Nech pre reálne čísla $x, y, z > 0$ platí

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1,$$

dokážte, že $(x-1)(y-1)(z-1) \geq 8$.

Riešenie:

Aby sme vedeli využiť zadanú podmienku, vynásobíme ju výrazom $xyz > 0$, nech tam sú rovnaké členy ako v nerovnosti, ktorú dokazujeme, dostávame

$$xy + yz + zx = xyz. \quad (1)$$

Po roznásobení rovnosti zo zadania máme

$$xyz - xy - xz - yz + x + y + z - 1 \geq 8.$$

S využitím (1) ostanú už len lineárne členy

$$x + y + z \geq 9.$$

Môžeme vydeliť tromi a pravú stranu vydeliť jednotkou v tvare $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, a tak obdržíme

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}.$$

Táto nerovnosť platí, lebo je AH nerovnosťou (nerovnosť medzi aritmetickým a harmonickým priemerom) pre kladné x, y a z . Všetky úpravy boli ekvivalentné, takže sme hotoví.

Komentár: Väčšina z vás túto úlohu dokončila úspešne bez väčších zaváhání. Rada do budúcnosti: poriadne čítajte aké sú čísla v zadaní (v tejto úlohe boli reálne a nie prirodzené) a nešetrite slovami pri vysvetľovaní jednotlivých krokov vášho riešenia.

5. Opravovali: Dano Onduš, Maťo Vodička

Počet riešiteľov: 2



Nájdite najmenšie prirodzené číslo t , pre ktoré existujú celé čísla $x_1, x_2, \dots, x_t$ také, pre ktoré platí

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_t^3 = 2002^{2002}.$$

Riešenie:

Vidíme, že na ľavej strane máme tretie mocniny celých čísel. Pre druhé mocniny celých čísel platí, že po delení štyrmi dávajú iba dva zvyšky, 0 a 1. Môžeme sa preto pozrieť na zvyšky tretích mocnín po delení nejakým číslom. Po chvíli skúšania pridáme na to, že pekne sa správajú zvyšky po delení deviatimi.

Každé celé číslo vieme zapísať ako $x = 9k + z$, kde k je celé číslo a z je zvyšok čísla x po delení deviatimi. Následne, ak ho umocníme na tretiu, tak podľa binomickej vety dostávame $(9k + z)^3 = 729k^3 + 243k^2z + 27z^2k + z^3$. Je zrejmé, že všetky členy okrem z^3 sú deliteľné deviatimi, preto je zvyšok celého čísla rovný zvyšku posledného člena. Číslo z je zvyšok po delení deviatimi, čiže nadobúda hodnoty 0 až 8. Zvyšky z^3 po delení deviatimi pre jednotlivé z sú v poradí: 0, 1, 8, 0, 1, 8, 0, 1, 8. To sú len tri hodnoty.

Následne potrebujeme vypočítať zvyšok čísla 2002^{2002} po delení 9. Ten je rovný štyrom.

Teraz nám už iba stačí zistiť, koľko čísel potrebujeme sčítať tak, aby sme dostali zvyšok 4 a najst vyhovujúce čísla x_1 až x_t . Platí, že ak pre nejaké t vieme daný zvyšok dosiahnuť, tak ak k nemu pripočítame číslo so zvyškom nula, tak budeme mať rovnaký zvyšok aj pre $t + 1$.

Pre $t = 1$ očividne žiaden zvyšok nie je rovný štyrom.

Pre $t = 2$ vieme dostať iba zvyšky 0, 1, 8 podľa $t = 1$ a zvyšky $1 + 1 = 2$, $8 + 8 = 16$, $8 + 1 = 9$ bez použitia zvyšku nula, čo nám pridalo zvyšky 2 a 7. Teda vidíme, že zvyšok 4 nevieme získať.

Pre $t = 3$ vieme dostať zvyšky 0, 1, 8, 2, 7 podľa $t = 2$ a zvyšky $1 + 1 + 1 = 3$, $1 + 1 + 8 = 10$, $1 + 8 + 8 = 17$ a $8 + 8 + 8 = 24$ bez použitia zvyšku nula, čo nám pridalo zvyšky 3 a 6.

Pre $t = 4$ už zvyšok 4 ľahko dostaneme (napríklad $1 + 1 + 1 + 1 = 4$). Možné riešenie je $(10 \cdot 2002^{667})^3 + (10 \cdot 2002^{667})^3 + (2002^{667})^3 + (2002^{667})^3 = 2002 \cdot 2002^{2001} = 2002^{2002}$.

Komentár: Hoci úloha na prvý pohľad vyzerala zložito a dostali sme len 2 riešenia, po zistení, ako sa správajú zvyšky tretích mocnín celých čísel po delení deviatimi, sa zmenila na pomerne jednoduchú. Preto ak s takouto úlohou neviete pohnúť, nevzdávajte sa a pozrite sa na vlastnosti čísel v úlohe.

6. Opravoval: Maťo Vodička, Dano Onduš

Počet riešiteľov: 3



Máme tri obrovské krčahy, v každom z nich je kladný celočíselný počet litrov vody. Dovoľené je doliať do ľubovoľného krčahu rovnaké množstvo vody, aké v ňom práve je, z krčahu, ktorý obsahuje dostatočné množstvo vody. Dokážte, že pomocou takéhoto prelievania je vždy možné úplne vyprázdniť niektorý krčah.

Riešenie:

Najprv si dokážeme, že za vhodných podmienok vieme proces obrátiť, teda vieme z krčahu vyliat polovicu vody do iného krčahu. Konkrétne, ak máme v jednom krčahu x litrov a v druhom krčahu y litrov, kde x je párne a y nepárne, tak vieme vyliat polovicu z x do y .

Prečo je to tak? Hrajme sa len s týmito dvoma krčahmi a vždy prelejme z toho kde je viac vody vodu do menšieho podľa podmienky. Toto očividne môžeme robiť stále. Keďže stavov (možností na počet litrov vody v tých dvoch krčahoch) je konečne veľa, určite sa niekedy zacyklíme. Avšak ak máme stav, vieme, čo bolo pred ním, lebo sme určite dolievali vodu do toho krčahu, v ktorom je momentálne párny počet litrov vody (a taký je len jeden). Preto sa niekedy nutne vrátime do pôvodného stavu, že v prvom krčahu je x a v druhom y . Avšak tomu stavu predchádzal stav, kde v prvom krčahu bolo $x/2$ vody. To znamená, že týmito veľa prelievaniami vieme dosiahnuť to, že sme z prvého krčahu vyliali polovicu vody do druhého.

Môžeme predpokladať, že celkový počet litrov vody je nepárny. Prečo? No ak by bol párny, tak buď je všade párne veľa vody, a môžeme teda množstvo vody všade vydeliť 2 a nič sa nepokazí. Alebo v dvoch krčahoch je nepárny počet litrov vody, no vtedy ak prelejeme vodu z jedného do druhého, tak dostaneme stav, kde je všade párny počet litrov vody, a zase to môžeme predeliť 2. Toto môžeme robiť až dovtedy, kým nebude celkový počet litrov vody nepárny.

To znamená, že BUNV v treťom krčahu je nepárny počet litrov vody (niekde musí byť, ak ich je spolu nepárny počet). Jednoduchým preliatím vody medzi zvyšnými dvoma krčahmi docielime, že v prvých dvoch je párny počet litrov vody. Počet litrov vody v prvom krčahu budeme zapisovať v tvare $2^k x$ a v druhom $2^l y$, kde x, y sú nepárne a $k, l \geq 1$. To preto, lebo je v nich párny počet litrov vody. Ak $k \neq l$, tak BUNV $k > l$. Potom z prvého krčahu odliavame polovicu do tretieho tak dlho, až kým $k = l$. Keďže polovica je stále párna, tak v treťom krčahu ostáva nepárny počet litrov vody, a teda to môžeme robiť.

Teraz prelejeme vodu medzi prvými dvoma krčahmi. Po tomto preliatí sa hodnoty k, l zväčšili aspoň o 1, a preto platí, že $k, l \geq 2$. No postup môžeme opakovať. Zase ich vyrovnáme a prelejeme - $k, l \geq 3$ atď.

No počet litrov vody v prvých dvoch krčahoch sa nezväčšuje, to znamená, že to nemôžeme robiť nekonečne dlho, lebo by veľmi veľká mocnina 2 (väčšia ako celkový počet litrov vody) delila počty litrov v oboch krčahoch. No zastaviť sa môžeme len vtedy, ak jeden krčah je prázdny. Preto takto vyprázdňime jeden krčah.

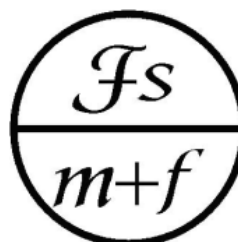
Komentár: Do úlohy sa veľa z vás nepustilo. Fakt je ten, že išla vyriešiť viacerými spôsobmi, stačilo len dosť dlho skúšať, až nás nejaký spôsob ako vyprázdniť krčah napadlo. Toto riešenie sme zvolili schválne, lebo myšlienka, že nejaký proces sa zacyklí, a preto ho môžeme obrátiť, sa vám v budúcnosti môže hodiť :).

Konečné poradie Letného semestra 40. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
1.	Laura Višťanová	S3	GMaraKE	54	9	9	9	9	9	9	108
2.	Martin Šteško	S1	GAlejKE	49	9	9	9	9	-	-	94
3.	Samuel Krajčí	S1	GAlejKE	47	9	9	9	9	-	-	92
4.	Jozef Lipták	S3	GJgtBB	42	9	6	9	8	-	-	74
5.	Matej Hanus	Z9	ZKro4KE	36	9	-	9	9	-	-	72
6.	Viktória Brezinová	S1	GAlejKE	34	-	9	9	9	-	-	70
7.	Erik Berta	S1	GAlejKE	29	-	9	9	9	-	-	65
8.	Martin Masrna	S2	GPostKE	26	9	9	9	9	1	-	64
9. - 11.	Michal Masrna	Z9	ZKro4KE	36	9	-	9	-	-	-	63
	Martin Mihálik	S1	GAlejKE	18	9	9	9	9	-	-	63
	Vratislav Madáč	S1	GAlejKE	27	9	9	-	9	-	-	63
12.	Norbert Michel	Z8	ZKro4KE	23	9	-	5	9	-	-	55
13. - 14.	Jakub Mach	S3	GPostKE	19	9	8	9	9	-	-	54

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	CS
	Filip Csonka	S1	GAlejKE	18	9	9	9	-	-	-	54
15.	Patrik Paľovčík	Z9	ZKro4KE	32	-	-	9	-	-	-	50
16.	Róbert Sabovčík	Z9	ZKro4KE	30	8	-	3	-	-	-	49
17.	Martin Mičko	S1	GAlejKE	18	9	-	9	-	-	-	45
18.	Tomáš Chovančák	Z9	ZKro4KE	25	-	-	9	-	-	-	43
19.	Juraj Mičko	S3	GPostKE	18	9	-	9	-	-	-	36
20. - 21.	Leonard Turčan	S3	GJgtBB	16	9	-	-	9	-	0	34
	Kristína Bratková	S3	EGJAK	8	9	9	3	5	-	-	34
22.	Martin Šalagovič	S1	GAlejKE	12	-	-	9	-	-	-	30
23.	Samuel Chaba	S1	GAlejKE	0	-	8	2	9	-	-	28
24.	Michaela Dlugošová	S2	GKukuPO	9	9	-	5	-	-	-	23
25. - 26.	Lubica Hladká	S3	GJgtBB	21	-	-	-	-	-	-	21
	Marek Koman	S2	GAlejKE	21	-	-	-	-	-	-	21
27.	Adam Dobrovič	S3	GJgtBB	19	-	-	-	-	-	-	19
28. - 29.	Michal Pándy	S3	GPostKE	0	9	9	-	-	-	-	18
	Natália Tóthová	S2	GAlejKE	0	-	9	-	9	-	-	18
30.	Jarmila Šimková	S2	GParoNR	0	9	-	5	-	-	-	14
31.	Jonáš Suvák	S1	GJarPO	10	0	1	0	1	-	0	13
32.	Samuel Gazda	S4	GYMES	0	-	-	9	0	-	-	9
33.	Juraj Jankovich	S3	GJgtBB	8	-	-	-	-	-	-	8
34.	Jakub Genči	S3	GPostKE	7	-	-	-	-	-	-	7
35.	Zoltán Hanesz	S3	GPostKE	0	6	-	-	-	-	-	6
36.	Natália Česánková	S2	GPostKE	0	-	-	-	1	-	-	1
37.	Michaela Borošová	S1	GPostKE	0	-	-	-	-	-	-	0

Za podporu a spoluprácu ďakujeme



Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
 Číslo 6 • Máj 2016 • Letný semester 40. ročníka (2015/2016)
Internet: <http://seminar.strom.sk>
E-mail: strom@strom.sk

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: <https://zdruzenie.strom.sk>
E-mail: info@strom.sk