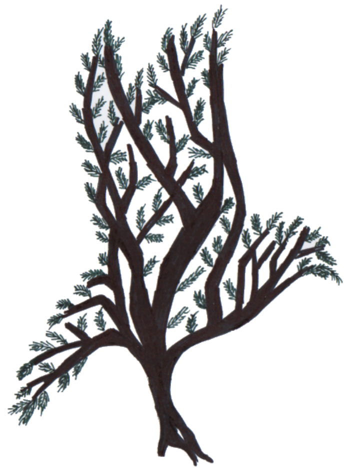
STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahojky,



vy si už možno nepamätáte na vaše skvelé riešenia, ktoré ste pred pár týždňami počas poslednej hodinky pred deadlinom spísali, no vaši opravovatelia s nimi mali tú česť pomerne nedávno, a teda si ich aktuálne pamätajú veľmi dobre. Práve preto vám ich vracajú späť, a dokonca, úplne grátis, obohatené o pár snáď múdrych viet. Verím, že každý získal aspoň toľko bodov, koľko skvostných úvah a času zo svojho života do riešenia investoval. Ak náhodou nie, tak asi na nejakej strane bude chyba. A keďže my sa už asi veľmi nezmeníme, tak to asi zasa raz ostáva na vás. Prajeme vám veľa šťastia do ďalšej série!

Navždy vaši **STROM**isti

Košický Matboj 2017

V piatok 27.10.2017 sa konal už 17. ročník Košického Matboja.

Tejto tradičnej tímovej súťaže, sa tentokrát zúčastnilo 54 tímov z celého Slovenska. V priestoroch Kultúrno-spoločenského centra na Jedlíkovej ulici si svoje vedomosti z matematiky zmeralo 214 žiakov stredných škôl a gymnázií. Najlepšie tímy si vďaka Národnému projekt IT Akadémia a Vacuumlabs odniesli aj hodnotné vecné ceny.

Medzi najlepšími sa umiestnili študenti z Gymnázia Poštová a Gymnázia Alejová 1 z Košíc a Gymnázia J. A. Raymana z Prešova.

Kompletné výsledky súťaže, príklady aj s riešeniami a takisto fotogalériu nájdete na tejto adrese: `https://seminar.strom.sk/sk/matboj/`.

Všetkým zúčastneným ďakujeme, blahoželáme a dúfame, že sa im tohtoročný Matboj páčil. Už sa tešíme na ďalší rok.

1.

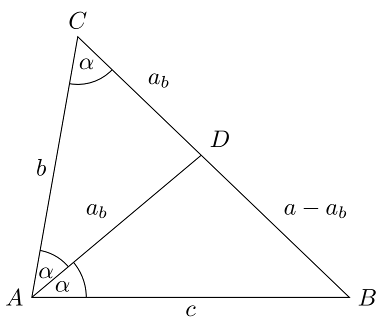
Opravovali: Matúš Hlaváčik, Janka Baranová
Počet riešiteľov: 44

Nech a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka ABC (a oproti A, b oproti B a c oproti C). Navyše tieto dĺžky sú celočíselné a b, c sú nesúdeliteľné čísla. Nech D je priesečník strany BC a osi uhla BAC. Dokážte, že ak sú trojuholníky DBA a ABC podobné, tak c je druhou mocninou celého čísla.

Riešenie:

Na začiatok si nakreslíme obrázok a pokúsime sa do neho vkresliť všetky podstatné informácie zo zadania.

AD je os uhla BAC, preto $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle DAC| = \alpha$.



Z podobnosti trojuholníkov DBA a ABC vieme, že $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ACB| = \alpha$, keďže sú to uhly dvoch podobných trojuholníkov, ktoré si navzájom odpovedajú.
Poznámka: niektorí z Vás nevedia, ale zápis podobnosti – poradie vrcholov trojuholníkov je dôležité, pretože presne udáva dvojice vrcholov a strán, ktoré si navzájom odpovedajú, preto nie je potrebné skúšať, ktoré to sú – to určuje už priamo zadanie.

Trojuholník ADC je rovnoramenný so základňou AC, pretože veľkosti uhlov pri tejto základni sú rovnaké, teda $|CD| = |DA| = a_b$.

Keďže trojuholníky DBA a ABC sú podobné, tak vieme napísať pomery strán, ktoré sa rovnajú:

$$\frac{|DB|}{|AB|} = \frac{|BA|}{|BC|} = \frac{|DA|}{|AC|}.$$

Tieto pomery môžeme prepísať pomocou nášho označenia strán v trojuholníkoch:

$$\frac{a-a_b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a_b}{b}.$$

Z prvých dvoch pomerov máme $c^2 = a^2 - a \cdot a_b$. Z druhých dvoch $a \cdot a_b = c \cdot b$, čo dosadíme do prvej rovnice a dostávame:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - c \cdot b \\ a^2 &= c^2 + c \cdot b \\ a^2 &= c(c+b). \end{aligned}$$

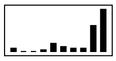
Čísla c a $c+b$ sú nesúdeliteľné. Prečo? Poďme na to sporom – vezmime $d > 1$ také, že $d|c$ a $d|c+b$. Potom číslo c dáva po delení číslom d zvyšok 0. Aby aj číslo $c+b$ dávalo zvyšok 0 (po delení d), tak aj b musí dávať zvyšok 0, teda $d|b$. Potom však čísla b a c majú najväčší spoločný deliteľ $d > 1$, teda nie sú nesúdeliteľné, čo je v spore so zadaním.

Ak je prvočíselnom rozklade čísla a nejaké prvočíslo p, tak v a^2 je p v párnej mocnine. Preto každé prvočíslo musí byť v párnej mocnine aj na pravej strane rovnice. Keďže c a $c+b$ sú nesúdeliteľné, tak v prvočíselnom rozklade týchto dvoch čísel nie je žiadne prvočíslo spoločné, preto prvočísla v oboch rozkladoch musia byť v párnej mocnine. Z toho vyplýva, že aj číslo c obsahuje len prvočísla v párnych mocninách, preto je druhou mocninou prirodzeného čísla, čo sme chceli dokázať.

Komentár: Niektorých z vás možno odradila netypickosť tejto úlohy, no tí, ktorí sa do tejto úlohy pustili vedia, že bola pomerne jednoduchá, čo vidno aj na tom, že väčšina z vás ju vyriešila. Najčastejším problémom bolo zase raz to, že ste neporiadni a nevysvetľujete, čo platí a hlavne prečo, ako príklad uvádzame mnohé úpravy s pomermi, ktoré robíte, lebo sú podľa vás „zrejmé“. Na tom stratili mnohí z vás maličké body.

2.

Opravovali: Žanetka Semanišinová, Kubo Genči
Počet riešiteľov: 57



Nech $P_1(x) = x^2 + a_1x + b_1$ a $P_2(x) = x^2 + a_2x + b_2$ sú dva kvadratické polynómy s celočíselnými koeficientami. Platí, že $a_1 \neq a_2$ a existujú rôzne celé čísla m, n také, že $P_1(m) = P_2(n)$ a $P_1(n) = P_2(m)$. Dokážte, že $a_1 - a_2$ je párne.

Riešenie:

Hneď na začiatku si vyjadríme rovnosti $P_1(m) = P_2(n)$ a $P_1(n) = P_2(m)$. Dostávame:

$$\begin{aligned} m^2 + a_1m + b_1 &= n^2 + a_2n + b_2 \\ n^2 + a_1n + b_1 &= m^2 + a_2m + b_2 \end{aligned}$$

Najprv si prehodíme strany druhej rovnice. Potom obe rovnice sčítame a úpravami dostávame:

$$\begin{aligned} m^2 + a_1m + b_1 + m^2 + a_2m + b_2 &= n^2 + a_2n + b_2 + n^2 + a_1n + b_1 \\ 2m^2 + m(a_1 + a_2) &= 2n^2 + n(a_1 + a_2) \\ 2(m^2 - n^2) &= n(a_1 + a_2) - m(a_1 + a_2) \end{aligned}$$

Použitím vzorca $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$ dostávame:

$$\begin{aligned} 2(m+n)(m-n) &= (n-m)(a_1 + a_2) \\ 2(m+n)(m-n) &= -(m-n)(a_1 + a_2) \end{aligned}$$

Teraz by sme chceli rovnicu vydeliť výrazom $(m-n)$. Keďže zo zadania vieme, že $m \neq n$, tak $m - n \neq 0$. To znamená, že môžeme deliť. Úpravami dostávame:

$$\begin{aligned} -2(m+n) &= a_1 + a_2 \\ -2(m+n) - 2a_2 &= a_1 - a_2 \\ -2(m+n+a_2) &= a_1 - a_2 \end{aligned}$$

Keďže m, n a a_2 sú celé čísla, tak je rozdiel $a_1 - a_2$ rovný dvojnásobku celého čísla. Z toho vidíme, že rozdiel $a_1 - a_2$ je párny.

Komentár: Úloha pre vás nebola náročná, o čom svedčí vysoký počet 9- a 8-bodových riešení. Mnohí z vás však stratili bod za to, že delili bez toho, aby si overili, či náhodou nedelia nulou. Nižšie bodové ohodnotenie bolo spôsobené väčšinou prehlásením, že dvojnásobok akéhokoľvek čísla je párny, no to neplatí napríklad v prípade všeobecného zlomku. Vtedy bolo spravidla nutné zlomok upraviť, či sa v príklade vydať nejakou inou cestou. A na záver odporúčame kontrolovať znamienka pri úpravách rovnice, pretože chyby v nich môžu výrazne meniť úlohu, ktorú riešite.

3. Opravovali: Peťo Kovács, Roman Staňo
Počet riešiteľov: 24

Na stretnutie prišlo $2k+1$ ľudí. Každí dvaja sa buď poznajú, alebo nepoznajú (vzťahy sú vzájomné). Pre každú skupinu práve k ľudí existuje človek mimo tejto skupiny, ktorý v nej pozná každého. Dokážte, že na stretnutí je človek, ktorý pozná všetkých.

Riešenie:

Vezmime nejakú skupinu k ľudí. Podľa zadania existuje mimo tejto skupiny človek, ktorý pozná všetkých ľudí tejto skupiny. Označme ho A_1. Vezmime nejakú ďalšiu skupinu k ľudí, no tentokrát takú, že obsahuje človeka A_1. Pre túto skupinu podľa zadania tiež existuje človek mimo tejto skupiny, ktorý v nej pozná každého a teda aj A_1. Označme tohto človeka ako A_2. Vezmime ďalšiu skupinu k ľudí a to takú, že obsahuje A_1 aj A_2. Opäť, podľa zadania existuje človek mimo tejto skupiny taký, že pozná A_1 aj A_2 (títo dvaja sa navyše poznajú aj navzájom). Označme ho A_3. Všimnime si, že v trojici A_1, A_2, A_3 sa každý s každým pozná.

Ak by sme týmto mechanizmom vyberali ďalšie a ďalšie skupiny k ľudí tak, aby obsahovali všetkých doteraz označených ľudí, k tejto množine „označencov" by sme vždy len pripojili nového človeka A_i, ktorý by sa poznal so všetkými doterajšími „označencami". Takto pokračujme až do bodu, kedy budeme mať presne k „označencov". Pre túto skupinu „označencov" tiež existuje človek (označme ho ako A_{k+1}), ktorý pozná každého z „označencov" $A_1, A_2, \ldots, A_k$. V tejto skupine $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ sa navyše všetci poznajú. Znamená to, že na stretnutí máme určite skupinu $k+1$ ľudí, kde sa každý s každým pozná $(A_1, A_2, \ldots, A_{k+1})$. Vezmime teraz doplnok tejto skupiny do plného počtu ľudí (to je k-členná skupina). Pre tento doplnok existuje niekto medzi $k+1$ „označencami", kto v nej pozná každého. Uvedomme si, že tento človek pozná aj všetkých ostatných k označencov, a teda tento človek pozná všetkých na stretnutí.

Komentár: K tejto úlohe sa dalo pristupovať viacerými spôsobmi – mnohí z vás sporom predpokladali, že každý nepozná aspoň jedného človeka. Rozborom známostí potom zistili, že je možné skonštruovať takú skupinu k ľudí, pre ktorú neexistoval človek, čo by poznal všetkých (a to je spor so zadaním). Nie vždy ste však vedeli danú konštrukciu rozumne a úplne popísať, za čo šli body dolu. Zopár riešiteľov sa neúspešne pokúsilo o indukciu. Vieme, že tá spočíva v dvoch krokoch: 1.) ukázať platnosť tvrdenia pre najmenšie číslo súboru, 2.) ukázať, že ak platí tvrdenia pre n, potom platí aj pre $n+1$. Spomínaní riešitelia ale splnili len 1. krok, čo ešte nestačí.

4. Opravovali: Dano Onduš, Kristín Mišlanová
Počet riešiteľov: 57

Nech c, d sú dva delitele prirodzeného čísla n, pričom $c > d$. Dokážte, že $c > d + d^2/n$.

Riešenie:

Keďže c a d sú delitele čísla n, určite vieme nájsť také prirodzené k a l, že $c = n/k$ a $d = n/l$. Platí, že $c > d$, z čoho triviálne $l > k$. Dosadíme tieto tvary do nerovnosti a dostávame

$$\frac{n}{k} > \frac{n}{l} + \frac{n^2}{l^2 n}$$

Toto vieme úpravou na spoločného menovateľa a vykrátením n previesť na tvar

$$l^2 > kl + k$$

Následne upravíme na $l(l-k) > k$. Vieme, že $l > k$ a zároveň $l - k \geq 1$, keďže ide o prirodzené čísla. Preto je ľavá strana nerovnosti ostro väčšia ako pravá.

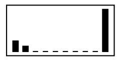
Celý čas sme prevádzali ekvivalentné úpravy a nerovnosť sme násobili len kladnými číslami, preto je nerovnosť $l(l-k) > k$ ekvivalentná prvej, čím sme tvrdenie dokázali.

Komentár: Ako vidno aj z dĺžky vzoráku, úloha bola vskutku jednoduchá a existovalo veľa možností, ako nerovnosť upraviť do tvaru, o ktorom už vieme prehlásiť, že platí. Najdôležitejšie bolo si uvedomiť, že k deliteľovi existuje pár (k a l) a tiež, že rozdiel dvoch prirodzených čísel je aspoň 1.

Určite nezabúdajte, že aj napriek tomu, že c a d sú delitele n, nemusí platiť $n = cd$ a ani mnoho podobných tvrdení. Rovnako aj úvahy o najväčšom spoločnom deliteľovi, až na výnimky, končili neúspešne. A to je asi všetko, lebo komentár už má viac slov ako vzorák.

5. Opravovali: Tomáš Kocák, Zuzana Ontkovičová

Počet riešiteľov: 11



Daný je trojuholník ABC. Nech k je jeho pripísaná kružnica, ktorá sa dotýka strany BC v bode K a polpriamok AB a AC sa dotýka v bodoch L a M. Kružnica s priemerom BC pretína úsečku LM v bodoch P, Q, pričom P leží medzi L a Q. Dokážte, že polpriamky BP a CQ sa pretínajú v strede kružnice k.

Riešenie:

Nech S je stred kružnice k, Q' je priesečník osi vonkajšieho uhla pri vrchole C s priamkou LM a P' je priesečník osi vonkajšieho uhla pri vrchole B s priamkou LM. Ďalej, nech 2α, 2β a 2γ sú vnútorné uhly trojuholníka ABC postupne pri vrcholoch A, B a C. Naším cieľom bude ukázať, že P' a Q' ležia na kružnici s priemerom BC z čoho bude vyplývať, že sú totožné s bodmi P a Q. Z definície P' a Q' potom už budeme vedieť, že priamky CQ a BP sa pretínajú v strede S kružnice k. Preto naším cieľom bude ukázať, ze uhly $CQ'B$ a $CP'B$ sú pravé.

V prvom rade si uvedomme, že úsečky AM a AL sú dotyčnice ku kružnici k a preto majú rovnakú dĺžku. Trojuholník LAM je preto rovnoramenný. Uhly AML a ALM sú zhodné a súčet ich veľkostí je $2\gamma + 2\beta$. Preto platí

$$|\sphericalangle AML| = |\sphericalangle ALM| = \beta + \gamma.$$

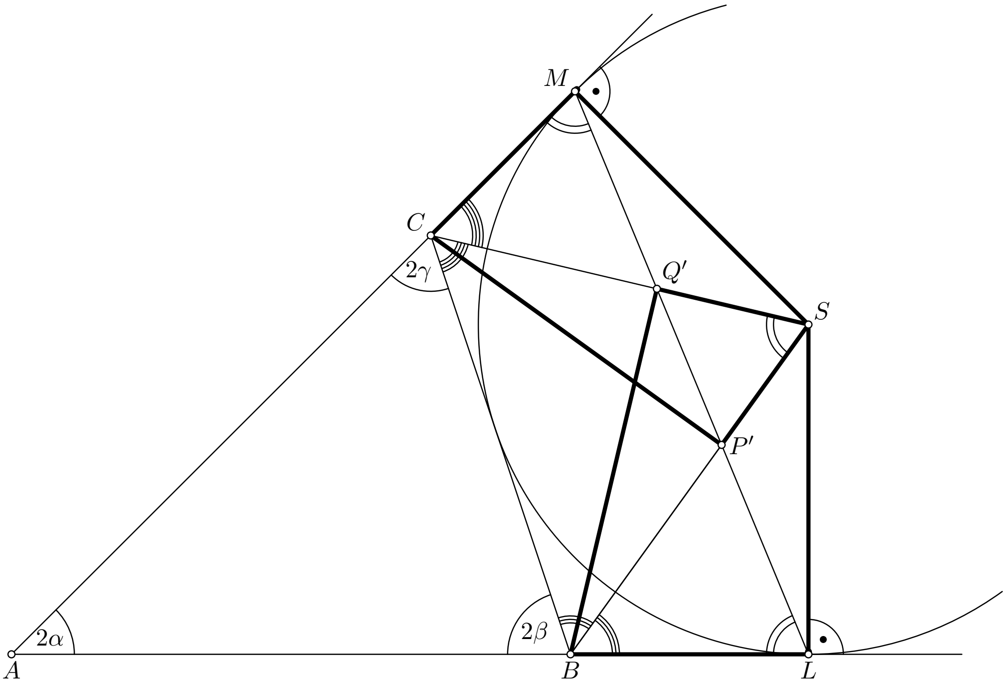
Uhol MCB je susedný s uhlom ACB a preto je jeho veľkosť $180° - 2\gamma$. Ďalej vieme, že CS je os uhla MCB, a preto veľkosť uhla SCB je $90° - \gamma$. Rovnako vieme, že uhly ABC a LBC sú susedné a BS je os uhla LBC. Preto veľkosť uhla SBC je $90° - \beta$. V trojuholníku BSC teda poznáme dva uhly a preto je jednoduché dopočítať veľkosť uhla BSC. Dostávame

$$|\sphericalangle BSC| = \beta + \gamma.$$

Body S a M ležia v tej istej polrovine vzhľadom na priamku CP' a úsečku CP' vidno z S a M pod rovnakým uhlom. Preto štvoruholník $CP'SM$ je tetivový. Rovnakým spôsobom ukážeme, že aj štvoruholník $BLSQ'$ je tetivový. Teraz nám už len stačí použiť fakt, že súčet veľkostí protiľahlých uhlov v tetivovom štvoruholníku je $180°$ spolu s faktom, že AM a AL sú dotyčnice ku kružnici k. Dostávame teda

$$\begin{aligned} |\sphericalangle CP'B| &= 180° - |\sphericalangle CP'S| = 180° - (180° - |\sphericalangle CMS|) = 90°, \\ |\sphericalangle BQ'C| &= 180° - |\sphericalangle BQ'S| = 180° - (180° - |\sphericalangle BLS|) = 90°. \end{aligned}$$

Preto body P' a Q' ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom BC a súčasne na priamke LM a teda sú totožné s bodmi P a Q z čoho dostávame, že CQ a BP sa pretínajú v strede kružnice k.



Komentár: Najužitočnejšia myšlienka pri pri riešení tejto úlohy bola preformulovať si zadanie a pozrieť sa na body P' a Q' miesto bodov P a Q. Bez tohoto pretransformovania bola úloha výrazne zložitejšia. Svedčí o tom aj to, že každý riešiteľ ktorý túto myšlienku využil bol schopný úlohu vyriešiť na 9 bodov.

6. **Opravoval: Maťo Vodička**
Počet riešiteľov: 19

Je možné napísať do každého políčka nekonečnej štvorčekovej tabuľky prirodzené číslo tak, aby pre každú dvojicu prirodzených čísel m, n platilo, že súčet čísel v ľubovoľnom obdĺžniku $m \times n$ je deliteľný $m + n$?

Riešenie:

Dokážeme, že sa tak tabuľka vyplniť nedá. Dokážeme to sporom. Preto predpokladajme, že ju máme vyplnenú prirodzenými číslami tak, aby platila podmienka zo zadania. Vyberme si jeden (ľubovoľný) riadok tejto tabuľky a označme a_i číslo v i-tom políčku tohto riadku. Políčka indexujeme celými číslami. Ďalej nás bude zaujímať hodnota na políčku s indexom 0 a niekoľko nasledujúcich políčok v nami zvolenom riadku. Nech $a_0 = N$.

Vieme, že súčet $a_1+a_2+\cdots+a_N$ je deliteľný $N+1$, keďže sú to čísla v obdĺžniku $N\times 1$. Tak isto aj súčet $a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{2N}$ je deliteľný $N + 1$. Ďalej vieme povedať, že $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2N}$ je deliteľné $2N + 2$, keďže sú to čísla v obdĺžniku $(2N + 1) \times 1$. No potom je tento súčet zrejme deliteľný aj $N + 1$.

Keď si toto všetko dáme dokopy, tak zistíme, že aj

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2N}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_N) - (a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_{2N}) = a_0 = N$$

je deliteľné $N + 1$. To je však spor, pretože $N + 1$ nedelí N, pre žiadne prirodzené číslo N. Preto sa naša tabuľka takto vyplniť nedá.

Komentár: Úloha nebola ťažká, bolo treba len sa popasovať s nekonečnom. Vo vzoráku vidíte jednoduchý a elegantný spôsob, ako riešenie zapísať. Je založený na tom, že si najprv vyberiete jedno číslo, a v závislosti od neho nájdete tri obdĺžniky a máte hneď spor. Odpadajú tak všetky problémy s formuláciami typu, „no a podobne dostaneme to, že by museli byť všetky čísla deliteľné všetkými číslami, čo sa nedá“. Samozrejme, že to nie je nesprávne, ak to napíšete inak, ale niekedy proste pôsobí to lepšie, ak viete riešenie napísať takto. Aspoň tu by som chcel pochváliť *Mimiho Hanusa* a *Miša Masrnu* za riešenie napísané týmto spôsobom.

Autori vzorových riešení: Florián Hatala, Matúš Hlaváčik, Henrieta Micheľová, Roman Staňo, Peter Kovács, Daniel Onduš, Martin Vodička, Jakub Genči

Zadania úloh zimného semestra 42. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na `https://seminar.strom.sk`.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **20. 11. 2017**

1. Celé čísla a, b, c spĺňajú rovnosť $a+b+c=bc$. Dokážte, že číslo $(a+b)(a+c)$ je deliteľné 4.

2. Deti sú rozdelené do 3 tímov – červeného, zeleného a modrého. Na začiatku je v červenom tíme c detí, v zelenom z detí a v modrom m detí. Keď sa stretnú dve deti z rôznych tímov, tak sa obaja pridajú k tímu tej farby, ktorú nemal ani jeden z nich. V závislosti od c, m, z zistite, či je možné, aby po čase skončili všetky deti v jednom tíme.

3. Biliardový stôl má tvar obdĺžnika $ABCD$. Nech $XKLMNX$ je dráha biliardovej gule, ktorá sa z bodu X dostane po odraze od všetkých štyroch strán biliardového stola naspäť na pôvodné miesto, t.j. body K, L, M, N ležia postupne na stranách AB, BC, CD, DA. Dokážte, že $KLMN$ je rovnobežník a dĺžka cesty nezávisí od polohy bodu X. Vyjadrite ju.

4. Na tabuli je napísaných $n>3$ rôznych prirodzených čísel, ktoré sú nanajvýš $(n-1)!$. Pre každú dvojicu čísel $a>b$ na tabuli si do zošita zapíšeme čiastočný podiel (výsledok po celočíselnom delení) čísel a a b. (Teda ak $a=47$ a $b=7$, tak si zapíšeme 6.) Dokážte, že sme si do zošita zapísali aspoň 2 rovnaké čísla.

5. Nech α je dané reálne číslo. Nájdite všetky funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$(f(x+y)f(x-y)) = x^2 + \alpha y f(y).$$

6. $ABCD$ je rovnobežník s ostrým uhlom DAB. Body A, P, B, D ležia na jednej kružnici v tomto poradí. Priamky AP a CD sa pretínajú v bode Q. Bod O je stred kružnice opísanej trojuholníku CPQ. Dokážte, že ak $D\neq O$, tak priamky AD a DO sú na seba kolmé.

Mohlo by sa hodiť...

Geometria

Tálesova veta: Trojuholník ABC je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C práve vtedy, keď AB je priemerom kružnice opísanej trojuholníku ABC.

Veta o obvodovom a stredovom uhle: Majme oblúk AB na kružnici so stredom S. Uhol ASB sa nazýva stredový uhol k oblúku (nad tetivou) AB. Nech X je ľubovoľný bod na dlhšom oblúku AB, potom uhol AXB sa nazýva obvodový k oblúku (nad tetivou) AB a jeho veľkosť je rovnaká pre každú polohu bodu X, a to polovica veľkosti príslušného stredového uhla.

Tetivový štvoruholník: Tetivový štvoruholník je taký, ktorému sa dá opísať kružnica. Štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď je súčet veľkostí jeho protiľahlých vnútorných uhlov 180°.

Nerovnosti

KA - nerovnosť: Pre kladné reálne čísla x_1, x_2, $\dots$, x_n platí, že ich kvadratický priemer je väčší, nanajvýš rovný (pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$), ich aritmetickému priemeru, t.j.

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

AG - nerovnosť: Pre kladné reálne čísla x_1, x_2, $\dots$, x_n platí, že ich aritmetický priemer je väčší, nanajvýš rovný (pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$), ich geometrickému priemeru, t.j.

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

GH - nerovnosť: Pre kladné reálne čísla x_1, x_2, $\dots$, x_n platí, že ich geometrický priemer je väčší, nanajvýš rovný (pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$), ich harmonickému priemeru, t.j.

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Všeobecná priemerová nerovnosť: Pre kladné reálne čísla x_1, x_2, $\dots$, x_n definujeme ich priemer p-tého rádu ako

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}}.$$

Priemer p-tého rádu čísel x_1, x_2, $\dots$, x_n je väčší, nanajvýš rovný (rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$), ich priemeru q-tého rádu práve vtedy, keď $p \geq q$, t.j.

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}} \geq \sqrt[q]{\frac{x_1^q + \ldots + x_n^q}{n}}.$$

Poznámka. KA, AG a GH nerovnosti sú špeciálnymi prípadmi všeobecnej priemerovej nerovnosti.

Funkcionálne rovnice

Táto tématika sa na stredných školách veľmi nevyučuje, ale nie je to nič komplikované. Úlohou je len nájsť všetky funkcie, ktoré budú spĺňať zadanie. Najsilnejšia zbraň, ktorú máme v rukách, je to, že hľadaná funkcia spĺňa danú rovnosť pre všetky hodnoty premenných z jej definičného oboru. Preto môžeme funkcionálnu rovnicu riešiť tak, že skúsime za x a y dosádzať konkrétne hodnoty alebo výrazy. Takto odvodíme nutné podmienky, ktoré musí hľadaná funkcia spĺňať. Nejde však o podmienky postačujúce, a preto je potrebné výslednú funkciu do rovnice dosadiť a urobiť skúšku. Viac o tom, ako riešiť takéto úlohy nájdete napríklad tu: `https://old.kms.sk/~mazo/matematika/funkcionalne_rov.pdf`.

Matematická indukcia

Ak sa snažíme niečo dokázať pre všetky prirodzené čísla počnúc niektorým, stačí nám ukázať platnosť nášho tvrdenia pre toto počiatočné číslo a potom ukázať platnosť tvrdenia: „ak naše tvrdenie platí pre číslo n, potom platí aj pre číslo $n+1$.“ Základná myšlienka takéhoto dôkazu sa často ukazuje na domine. Niekedy sa tieto kvádre stavajú do dlhého radu tak, aby každý pri svojom páde so sebou stiahol na zem aj svojho bezprostredného suseda. Potom na to, aby spadli všetky kocky, postačí zhodenie prvej z nich. Inak povedané, ak vieme, že n. kocka zapríčiní pád $(n+1)$., stačí nám zapríčiniť pád 1. kocky radu.

Dirichletov princíp

Majme n predmetov a m priehradok. Chceme poukladať predmety do priehradok tak, aby každý predmet bol v práve jednej priehradke. Dirichletov princíp je jednoduché tvrdenie, že ak je $n > m$ (predmetov viac ako priehradok), tak potom v aspoň jednej priehradke budú aspoň dva predmety (v silnejšej verzii vieme tvrdiť, že pri n priehradkach a aspoň $kn+1$ predmetoch (pre prirodzené k) existuje priehradka s $k+1$ predmetmi).

Táto formulácia môže znieť neprakticky, no v rôznych úlohách môže byť tento princíp užitočný. Predstavte si napríklad čísla ako predmety a zvyšky po delení m ako priehradky. Vyriešite tak úlohu: dokážte, že z ľubovoľných 11 prirodzených čísel viete vybrať dve, ktorých rozdiel končí nulou.

Poradie po 1. sérii Zimného semestra 42. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1. - 2.	Samuel Krajči	S3	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	0	54
	Martin Števko	S3	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	0	54
3. - 4.	Norbert Micheľ	S1	GPostKE	9	9	7	3	9	9	0	52
	Timea Szöllősová	S2	GAMČA	8	9	9	9	-	9	0	52
5.	Michal Masrna	S2	GPostKE	8	9	8	9	-	9	0	51
6.	Matej Hanus	S2	GPostKE	9	6	9	9	-	9	0	48
7. - 8.	Martin Masrna	S4	GPostKE	8	8	9	9	-	9	0	43
	Matej Moško	S3	GAMČA	8	9	8	9	9	-	0	43
9. - 14.	Viktória Brezinová	S3	GAlejKE	9	9	9	9	-	-	0	36
	Tomáš Chovančák	S2	GPostKE	9	9	0	9	-	9	0	36
	Radovan Lascsák	S2	GPostKE	9	9	-	9	-	9	0	36
	Frederik Ténai	S1	SGKatPKE	9	9	-	9	-	-	0	36
	Patrik Paľovčík	S2	GPostKE	9	9	-	9	-	9	0	36
	Róberta Juríková	S3	GVBN	9	9	9	9	-	-	0	36
15. - 16.	Lujza Milotová	S1	GPostKE	9	8	-	9	-	-	0	35
	Štefánia Glevitzká	S3	GVBN	8	9	9	9	-	-	0	35
17. - 18.	Róbert Sabovčík	S2	GPostKE	7	9	8	9	-	-	0	33
	Timea Jakubócyová	S1	BGMH	0	6	8	9	1	-	0	33
19. - 21.	Jakub Farbula	S1	GAlejKE	6	7	-	-	9	-	0	31
	Maximilián Pándy	Z9	GMaraKE	8	5	-	9	-	-	0	31
	Dorota Porubská	S2	GLeoBJ	5	8	9	0	-	9	0	31
22.	Matúš Masrna	Z9	ZKro4KE	4	8	-	9	-	-	0	30
23.	Martin Spišák	S4	GAlejKE	9	9	2	9	-	-	0	29
24. - 31.	Martin Nemjo	S1	GAlejKE	6	3	-	-	9	-	0	27
	Branislav Pastula	S2	GPostKE	9	9	-	9	-	-	0	27
	Martin Albert Gbúr	S2	GPostKE	9	9	-	9	-	-	0	27
	Samuel Novák	S2	GPostKE	9	9	-	9	-	-	0	27
	Ján Richnavský	S1	GPostKE	-	8	-	9	-	1	0	27
	Tomáš Hulla	S1	GJGTBB	-	9	-	9	-	-	0	27
	Miroslav Molnár	S1	GAMČA	-	9	9	0	-	-	0	27
	Matej Urban	S1	GAMČA	-	9	9	-	-	-	0	27
32. - 37.	Martin Mihálik	S3	GAlejKE	8	9	-	9	-	-	0	26
	Michaela Dlugošová	S4	GKukuPO	8	9	-	9	-	-	0	26
	Benjamín Mravec	S2	GPostKE	-	8	-	9	-	9	0	26
	Miriam Magočiová	S2	GPostKE	9	8	-	0	-	9	0	26
	Peter Ridilla	S2	GPostKE	8	9	-	9	-	-	0	26
	Martin Polyácsko	S1	GAlejKE	-	7	-	1	9	-	0	26
38. - 40.	Juraj Jursa	S4	LEAF	8	8	-	9	-	-	0	25
	Klára Hricová	S1	GPostKE	6	9	-	1	-	-	0	25
	Jakub Pravda	S2	ŠpMNDaG	8	8	-	9	-	-	0	25
41.	Filip Csonka	S3	GAlejKE	7	8	-	9	-	-	0	24
42.	Michal Vorobel	S1	GJarPO	-	4	-	9	-	-	0	22
43. - 44.	Kristína Bratková	S4	EGJAK	1	8	3	9	-	-	0	21
	Lenka Hake	S1	GAlejKE	8	4	-	1	-	-	0	21
45. - 46.	Dominika Nguyen	S1	GPostKE	3	8	-	1	-	-	0	20
	Dušan Oberta	S2	GSkoSnV	-	8	0	9	0	3	0	20
47.	Bianka Šimková	S1	GPostKE	1	4	0	7	-	0	0	19
48. - 50.	Matej Tarča	S2	GPostKE	-	9	-	9	-	-	0	18
	Marek Koman	S4	GAlejKE	-	-	-	9	9	-	0	18
	Bruno Jakubov	S1	CGŠMSnV	-	-	-	9	-	-	0	18
51.	Katarína Demčáková	S2	GPostKE	-	8	-	9	-	-	0	17
52. - 54.	Michaela Rusnáková	S1	GAlejKE	8	0	-	-	0	-	0	16
	Gabriela Genčiová	S1	GPostKE	-	8	-	0	-	-	0	16
	Jakub Duchaj	S1	GAMČA	-	8	-	0	-	-	0	16
55.	Tomáš Krupa	S2	GPostKE	-	5	1	9	-	-	0	15
56.	Ondrej Tomášik	S1	GJGTBB	-	-	6	-	-	-	0	12
57.	Erik Řehulka	S2	ŠpMNDaG	9	0	-	-	-	-	0	9
58.	Martin Andričík	S1	GPostKE	-	-	-	1	-	3	0	7
59.	Martin Starovič	S2	ŠpMNDaG	0	5	-	1	-	-	0	6

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
60.	Miroslav Macko	S2	LEAF	1	4	-	-	-	-	0	5
61.	Peter Mento	S2	GPostKE	-	4	-	0	-	0	0	4
62.	Simona Gibalová	Z9	GAlejKE	-	-	-	1	-	-	0	2
63.	Tomáš Ganz	S2	ŠpMNDaG	0	-	1	0	-	-	0	1
64. - 65.	Ondrej Piroh	S4	SPŠMT	-	-	-	-	-	0	0	0
	Filip Tumidalský	S1	GAlejKE	-	-	-	0	-	-	0	0

Názov STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • November 2017 • Zimný semester 42. ročníka (2017/2018)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `https://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2016-9485/41562:71-10E0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk