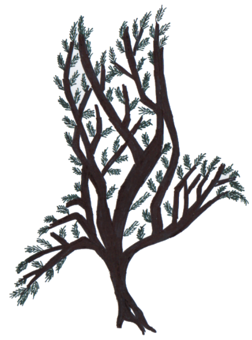
STROM

Korešpondenčný matematický seminár

Čaute



Iste ste si všimli, že s blížiacim sa termínom prvej série začali do ulíc prúdiť tisíce ľudí. My sme sa však nenechali zastrašiť a sme radi, že aj vy ste stihli niečo zrátať. Tak sme to zrátali aj my vám a exkluzívne výsledky nájdete na konci tohoto časopisu.

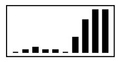
Navždy vaši **STROM**isti

Posledné voľné na miesta TMM

Na našom jedinečnom letnom Tábore mladých matematikov sú už len posledné voľné miesta. Neváhaj preto, a ak chceš stráviť nezabudnuteľný týždeň, prihlás sa už teraz. Tábor sa bude konať 11.–19.8.2018 na Počúvadle. Pozvánku aj prihlasovanie nájdeš na našej webovej stránke.

1. **Opravovala: Janka Baranová**

Počet riešiteľov: 58



Určte počet všetkých neusporiadaných trojíc dvojciferných prirodzených čísel a, b, c, ktorých súčin abc má zápis, v ktorom sú všetky cifry rovnaké.

Riešenie:

Pozrime sa na to, čo hovorí zadanie. Súčin troch 2-ciferných čísel má byť číslo s rovnakými ciframi. Súčin 3 najmenších 2-ciferných čísel je $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ a 3 najväčších je $99 \cdot 99 \cdot 99 = 970299$, preto prichádzajú do úvahy 4, 5 a 6 ciferné čísla s rovnakými ciframi (okrem čísla 999999 – to už je veľké).

Rozoberme si postupne všetky možnosti výsledných čísel.

Začnime 4-cifernými číslami – jedná sa o čísla 1111, 2222, 3333, . . . , 9999. Všetky z nich sú deliteľné číslom 1111, čo je po rozložení na prvočísla $11 \cdot 101$. Žiadne z týchto čísel nie je možné rozložiť na súčin troch 2-ciferných čísel, keďže prvočíselný rozklad obsahuje číslo 101, čo je 3-ciferné prvočíslo, teda na menšie čísla ho už nerozložíme.

Pozrime sa teraz na 5-ciferné čísla – konkrétne 11111, 22222, . . . , 99999. Všetky sú deliteľné 11111, ktorého prvočíselný rozklad je $41 \cdot 271$. Opäť máme v prvočíselnom rozklade 3-ciferné číslo, ktoré ďalej na súčin nerozložíme, teda ani žiadne 5-ciferné číslo s rovnakými ciframi sa nedá rozložiť na súčin troch 2-ciferných čísel.

Na záver nám ostáva rozobrať 6-ciferné čísla – 111111, . . . , 888888. Prvočíselný rozklad čísla 111111 (čo je deliteľ všetkých týchto čísel) je $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ – tu teda nenastáva problém s 3-cifernými prvočíselnými deliteľmi. Môžeme sa pozrieť na číslo 111111 (ostatné sú jeho násobkom) a potom postupne rozobrať zvyšné 6-ciferné čísla, pričom budeme sa pozerať na prvočíselné rozklady a dávať k sebe prvočísla tak, aby sme vytvorili vždy súčin troch 2-ciferných čísel.

$111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. Číslo 37 nemôžeme dať do súčinu so žiadnym prvočíslom väčším ako 2, lebo by sme vytvorili 3-ciferné číslo, preto 37 je prvé z troch čísel v súčine. Potom číslo 13 musíme dať dokopy s niektorým z čísel, lebo súčin zvyšných troch je už číslo 3-ciferné), môžeme ho dať dokopy s číslom 7 (ako tretie ostane $11 \cdot 3$) alebo s číslom 3 (a ako tretie ostane $11 \cdot 7$), s číslom 11 ho už dokopy dať nemôžeme a ani žiadne 3 z týchto prvočísel nemôžeme spojiť do jedného, lebo by sme dostali vždy 3-ciferné číslo. Preto pri čísle 111111 máme tieto 2 možnosti – $37 \cdot 91 \cdot 33$ a $37 \cdot 39 \cdot 77$.

$222222 = 2 \cdot 111111$. Oproti číslu 111111 máme v prvočíselnom rozklade ešte číslo 2, ktorým môžeme v prvej možnosti $(37 \cdot 91 \cdot 33)$ prenásobiť čísla 37 a 33, teda ďalšie 2 možnosti a v druhej možnosti $(37 \cdot 39 \cdot 77)$ čísla 37 a 39, teda opäť 2 možnosti. Dostávame tak 4 možnosti – $37 \cdot 91 \cdot 66$, $37 \cdot 78 \cdot 77$, $74 \cdot 91 \cdot 33$ a $74 \cdot 39 \cdot 77$.

$333333 = 3 \cdot 111111$. Oproti číslu 111111 máme v prvočíselnom rozklade ešte číslo 3, ktorým môžeme v prvej možnosti $(37 \cdot 91 \cdot 33)$ prenásobiť číslo 33, teda 1 možnosť, a v druhej možnosti $(37 \cdot 39 \cdot 77)$ žiadne. Teda máme len 1 možnosť – $37 \cdot 91 \cdot 99$.

$444444 = 2^2 \cdot 111111$. Číslom 4 nemôžeme nič prenásobiť, číslom 2 môžeme v prvej možnosti 37 a 33 a v druhej 37 a 39, teda obe možnosti pre 111111 majú jednu možnosť pre 444444, a to $74 \cdot 91 \cdot 66$ a $74 \cdot 78 \cdot 77$.

$555555 = 5 \cdot 111111$. Oproti číslu 111111 máme v prvočíselnom rozklade ešte číslo 5, ktorým nemôžeme nič prenásobiť, aby sme stále dostali 2-ciferné číslo. Preto číslo 555555 nevedie k riešeniu.

$666666 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. Číslom 6 nemôžeme nič prenásobiť, číslom 3 môžeme v prvej možnosti jedine 33 a číslom 2 jedine 37, teda 1 možnosť a v druhej nemôžeme tromi prenásobiť nič, takže to nám možnosť nedá, dokopy teda 1 nová možnosť $74 \cdot 99 \cdot 91$.

$777777 = 7 \cdot 111111$. Oproti číslu 111111 máme v prvočíselnom rozklade ešte číslo 7, ktorým nemôžeme nič prenásobiť, aby sme stále dostali 2-ciferné číslo. Preto číslo 777777 nevedie k riešeniu.

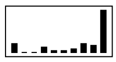
$888888 = 2^3 \cdot 111111$. V žiadnej možnosti nevieme nič prenásobiť číslom 4 (teda ani 8), aby sme dostali 2-ciferné číslo a taktiež nemáme 3 čísla, ktoré môžeme prenásobiť 2, teda číslo 888888 nevedie k riešeniu.

Dokopy sme dostali $2 + 4 + 1 + 2 + 0 + 1 + 0 + 0 = 10$ možností.

Komentár: Takmer každý, kto sa do úlohy pustil, sa dopátral k správnemu riešeniu. Body som strhávala najmä za neodôvodnenie, že uvedené možnosti (alebo len ich počet) sú naozaj všetky. Vzhľadom k tomu, že je to prvá úloha, tak naozaj bolo potrebné vysvetliť, ako skúšate, a že ste na žiadnu možnosť nezabudli (akurát v tejto úlohe to bolo ľahké zabudnúť :)).

2. Opravovali: Dano Onduš, Maťo Spišák

Počet riešiteľov: 45



Koľkými spôsobmi je možné ofarbiť čísla $1, 2, \dots, n$ červenou, zelenou a modrou farbou tak, že párne čísla nie sú zelené a žiadne dve susedné čísla nemajú rovnakú farbu?

Riešenie:

Uvažujme párne n. Pre $n = 2$ existujú 4 možnosti ofarbenia – červená a modrá, zelená a červená, zelená a modrá, modrá a červená. Ak máme rad n čísel (kde n je párne) a pridáme ďalšiu dvojicu, vždy dostanene 3 nové možnosti pre každú z možností pre n čísel – ak bolo n-té číslo modré, tak novú dvojicu ofarbíme buď červeno a modro, zeleno a červeno alebo zeleno a modro a ak bolo n-té číslo červené, tak pridanú dvojicu ofarbíme buď modro a červeno, zeleno a červeno, alebo zeleno a modro. Z toho dostávame vzťah pre počet možností ofarbenia n čísel ako $4 \cdot 3^{(n-2)/2}$ (k prvej dvojici pridáme $(n-2)/2$ dvojíc).

Pre nepárne n platí, že najprv prvých $n - 1$ čísel ofarbíme niektorou z $4 \cdot 3^{((n-1)-2)/2}$ možností a na ofarbenie posledného n-tého čísla tak budeme mať 2 možnosti, ako ho ofarbiť (lebo na nepárnom mieste nie je žiadna podmienka okrem tej, že dve rovnaké farby po sebe nemôžu nasledovať), preto počet možností ofarbenia pre nepárne n bude $2 \cdot 4 \cdot 3^{((n-1)-2)/2} = 8 \cdot 3^{(n-3)/2}$. Nakoniec si ešte je potrebné všimnúť, že tento vzorec platí len pre $n \geq 3$, preto ešte v špecifickom prípade $n = 1$ zistíme, že existujú 3 možnosti ofarbenia.

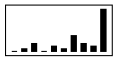
Iné riešenie:

Pozrieme sa na počty možností s posledným číslom v rade ofarbeným na červeno, zeleno a modro, preto nech Č(n), Z(n), M(n) sú postupne počty možností ofarbenia číselného radu také, že posledné číslo radu bude červené, zelené a modré. Kvôli podmienke o rôznosti po sebe idúcich čísel vieme, že ak pre n čísel máme počty možností pre jednotlivé farby Č(n), Z(n) a M(n), tak pre $n+1$ čísel vieme červenou ofarbiť všetky čísla nasledujúce po modrých a zelených číslach, a teda Č$(n+1) =$ Z(n)+M(n). Analogicky platí, že Z$(n+1) =$ Č(n)+M(n) a M$(n+1) =$ Č(n)+Z(n). Výnimkou je prípad, keď n je nepárne, vtedy Z$(n+1) = 0$ (lebo na párnom mieste nemôže byť zelené číslo).

Ďalej je potrebné uvedomiť si, že pre ľubovoľné n platí, že Č$(n) =$ M(n). To platí preto, lebo Č$(1) =$ M$(1) = 1$ a ak platí vzťah Č$(n) =$ M(n), tak z už popísaných vzťahov platí Č$(n+1) =$ Z(n)+M$(n) =$ Č(n)+Z(n) =M$(n+1)$. Odtiaľ dostávame, že všeobecne pre $n = 2k$ platí, že ak počty možností pre posledné číslo ofarbené červenou, zelenou a modrou sú postupne p, 0, p, tak pomocou už odvodených vzťahov dostaneme počty pre $n + 1$ rovné postupne p, $2p$, p a pre $n + 2$ budú postupne $3p$, 0, $3p$. Tu vidíme, že pridaním ďalšieho čísla za rad s párnym počtom čísel sa nám celkový počet možností ofarbenia zdvojnásobí, a pridaním dvojice čísel za rad s dĺžkou aspoň 2 sa nám počet možností strojnásobí. Pretože pre $n = 1$ máme 3 možnosti a pre $n = 2$ existujú 4 (toto zistíme napríklad vypísaním), tak počet možností pre párne n môžeme vyjadriť ako $4 \cdot 3^{(n-2)/2}$ a počet možností pre nepárne $n \geq 3$ vyjadríme ako $2 \cdot 4 \cdot 3^{((n-1)-2)/2} = 8 \cdot 3^{(n-3)/2}$.

Komentár: Teší nás, že väčšina z riešiteľov tejto úlohy zvládla úplne využiť koncept popísaný v prvom alebo druhom vzoráku. Body sme strhávali v prípadoch, keď v častiach riešenia nebol postup úplne vysvetlený alebo za chyby v odvodených vzorcoch. Najčastejšou chybou v riešení, ktorá sa opakovala u viacerých z vás, bola chyba v postupe dokazovania niektorého z krokov, ktorá spočívala vo využití iba poznatkov zistených z niekoľkých konkrétnych prípadov. Vyvodzovať závery z tabuliek alebo nákresov nie je väčšinou správny postup, a tak dôkazy pomocou tabuliek nemôžeme považovať za korektné práve kvôli nedostatočnej všeobecnosti.

3. Opravovali: Žanetka Semanišinová, Kubo Genči
Počet riešiteľov: 35



Keďže Matúšova fenka Bodka je lenivá chodiť od jedného stromu k druhému, tak jej Matúš postavil systém minivláčikov. Medzi každými dvoma stromami v parku jazdí minivláčik práve v jednom smere. Bodka sa rozhodla, že si vyplní čas tým, že si vyberie nejaký prvý strom a potom sa prevezie minivláčikmi tak, že každý strom navštívi práve raz (a medzi stromami sa bude pohybovať len pomocou minivláčikov). Dokážte, že si tak Bodka vie vybrať bez ohľadu na to, ako Matúš minivláčiky postavil.

Riešenie:

Dôkaz urobíme pomocou matematickej indukcie. Je zrejmé, že ak máme iba 1 alebo 2 stromy, tak úloha má riešenie. No čo ak máme vyšší počet stromov? V takom prípade predpokladajme, že úloha má riešenie pre n stromov a my dokážeme, že ho má aj pre $n+1$ stromov.

Keďže vieme, že pre n stromov má úloha riešenie, tak si ich pomyselne usporiadajme do radu v takom poradí, v akom ich navštívime (zároveň ich takto aj očíslujeme číslami od 1 do n). Posledný strom si dajme niekde bokom, označme ho číslom $n+1$. Pozrime sa na vláčik, ktorý jazdí medzi stromom 1 a $n+1$. Ak začína v strome $n+1$, tak tento strom navštívime ako prvý a potom prejdeme stromy 1 až n. Ak však začína v strome 1, tak sa nám situácia trochu komplikuje. My sa však môžeme rozhodnúť podľa vláčika medzi stromami 2 a $n+1$. Ak ten začína v strome $n+1$, tak máme po probléme (prejdeme vláčikom od stromu 1 do stromu $n+1$ a odtiaľ do stromu 2). Ak však ide vláčik opačným smerom, tak nevieme zatiaľ povedať, či má úloha riešenie.

Vidíme, že problém nastáva, ak idú všetky cesty do stromu $n+1$. Zoberme si preto najmenšie k také, že vláčik ide od stromu $n+1$ do k. Ak také k existuje, tak sme hotoví, keďže máme vláčik z $k-1$ do $n+1$ a následne z $n+1$ do k. Ak neexistuje, znamená to, že vláčik ide z n do $n+1$, čiže strom $n+1$ navštívime ako posledný. Dospeli sme k tomu, že hľadaná cesta na $n+1$ stromoch vždy existuje, čím je dôkaz matematickou indukciou hotový.

Iné riešenie:
Úlohu budeme opäť dokazovať matematickou indukciou. Označme počet stromov v parku n. Najprv si rozmyslíme, že pre $n=1$, poprípade $n=2$, si Bodka vie vybrať počiatočný strom, tak, aby sa vedela previezť medzi všetkými stromami podľa zadania. Ďalej budeme postupovať tak, že predpokladáme, že dokazované tvrdenie zo zadania platí pre všetky počty stromov, ktoré sú nanajvýš n (pre nejaké n prirodzené). Ukážeme, že z tohto predpokladu plynie tvrdenie aj pre $n+1$ stromov, čím bude dôkaz matematickou indukciou hotový.

Majme $n+1$ stromov v parku, vyberme si jeden z nich a označme ho S. Ostatné stromy tak môžeme rozdeliť do dvoch skupín. Prvá skupina bude obsahovať stromy, z ktorých vedie minivláčik do S, a druhá tie, do ktorých vedie minivláčik z S. Tieto dve skupiny podľa zadania nemajú prienik a obsahujú všetky stromy (okrem S). Zároveň podľa indukčného predpokladu (každá skupina obsahuje najviac n stromov) vieme v oboch skupinách nájsť cestu, ktorou sa dá previezť medzi všetkými stromami v skupine a každým prejsť práve raz. Keďže z koncového vrcholu cesty v prvej skupine sa dá minivláčikom previezť do stromu S a zo stromu S sa dá previezť do počiatočného vrcholu cesty v druhej skupine, spojením oboch ciest cez strom S dostaneme hľadanú cestu medzi týmito $n+1$ stromami.

Komentár: Väčšina z vás bez problémov uchopila myšlienku prvého vzorového riešenia. Bodové rozdiely potom zapríčinili predovšetkým schopnosť správne skonštruovať matematickú indukciu a odôvodnenie existencie dvoch po sebe idúcich stromu vláčikmi do vybraného vrcholu. Za obe veci sme mierne strhávali body, keďže sa jednalo o zásadné časti postupu. Princíp použitý v druhom vzorovom riešení sa vo vašich riešeniach nevyskytol veľa krát, no určite sa vám môže ešte hodiť. Nakoniec, nezabúdajte na to, že pokiaľ riešite nejakú úlohu pomocou algoritmu či konštrukcie, je nutné si rozmyslieť, či tá konštrukcia určite nezlyhá (vždy sa dá urobiť ďalší krok) a ako dopadne.

4. Opravovali: Kristín Mišlanová, Roman Staňo
Počet riešiteľov: 34

Nech $a, b, c \geq -1$ sú také reálne čísla, že $a^3+b^3+c^3=1$. Dokážte, že $a+b+c+a^2+b^2+c^2 \leq 4$.

Riešenie:

Najprv dokážeme pomocné tvrdenie, ktoré ešte budeme využívať.

Tvrdenie: $\forall x \geq -1: \; x^2+x \leq x^3+1$.

Dôkaz: Štvorec reálneho čísla je vždy nezáporný. Pre $x \geq -1$ je navyše aj výraz $(x+1)$ nezáporný. Súčin dvoch nezáporných čísel je opäť nezáporné číslo. Pre $x \geq -1$ preto platí: $0 \leq (x-1)^2 \cdot (x+1)$. Pravú stranu nerovnosti roznásobíme a dostávame $0 \leq x^3-x^2-x+1$. Ak ku obom stranám pripočítame výraz x^2+x, dostávame $x^2+x \leq x^3+1$, čo sme v tomto tvrdení chceli dokázať.

Zapíšme teraz pomocné tvrdenie zvlášť pre každú z neznámych $a, b, c \geq -1$. Dostávame tri nezávislé nerovnosti:

$$a^2 + a \leq a^3 + 1,$$
$$b^2 + b \leq b^3 + 1,$$
$$c^2 + c \leq c^3 + 1.$$

Súčtom týchto nerovností dostávame

$$a^2 + a + b^2 + b + c^2 + c \leq a^3 + 1 + b^3 + 1 + c^3 + 1. \qquad (\bigstar)$$

Ostáva uplatniť väzbu zo zadania a využiť, že a, b, c spĺňajú: $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Dosadením do pravej strany ($\bigstar$) dostávame nerovnosť zo zadania, čím je dôkaz hotový.

Komentár: Mnohí z vás rovnicu zo zadania úpravami previedli na tvar ($\bigstar$), kde si už všimli, že stačí dokázať naše pomocné tvrdenie – vaše riešenia vlastne vyzerali ako naše, ale začínali na opačnom konci. To však nie je dôkaz. Takýmto postupom totiž predpokladáte platnosť dokazovaného tvrdenia a aj keď sa dostanete k niečomu, čo platí, prvotné tvrdenie ešte nie je dokázané. Táto formálna chyba sa dá ľahko odstrániť napríklad tým, že budete používať (a aj to spomeniete!) len ekvivalentné úpravy nerovností. V takom prípade je „opačný smer riešenia“ rovnako správny.

5. **Opravovali: Martin Masrna, Peťo Kovács**
Počet riešiteľov: 40

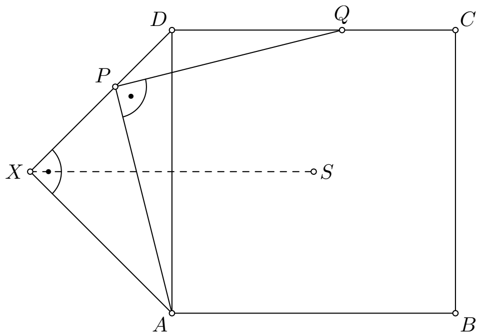
Daný je štvorec $ABCD$. Nájdite množinu všetkých bodov P takých, že existuje rovnoramenný pravouhlý trojuholník APQ s pravým uhlom pri vrchole P a bod Q leží na strane CD.

Riešenie: *využívajúce analytickú geometriu*

Umiestnime bod A do počiatku karteziánskej súradnicovej sústavy: $A[0, 0]$ a označme dĺžku strany štvorca a. Zvyšné vrcholy štvorca potom majú súradnice $B[a, 0]$, $C[0, a]$ a $D[a, a]$. Označme súradnice bodu Q ako $Q[q, a]$, pričom $q \in \langle 0, a\rangle$. Stred úsečky AQ označme ako X, pričom jeho súradnice sú $X[q/2, a/2]$. Smerový vektor priamky AQ nech je $X[q/2, a/2]$.

Kolmica na úsečku AQ v bode X bude zároveň ťažnicou a výškou trojuholníka AQP, pretože ide o rovnoramenný trojuholník. Podľa Tálesovej vety vieme, že $|AX| = |XP|$. Bod P teda nájdeme tak, že posunieme bod X o vektor, ktorý ma rovnakú dĺžku ako AX a je kolmý na AQ. Také vektory sú dva: $[-a/2, q/2]$ a $[a/2, -q/2]$. Po pričítaní vektoru k súradniciam bodu X teda dostaneme možné súradnice bodu P: $[(q-a)/2, (q+a)/2]$ a $[(q+a)/2, (a-q)/2]$. Hľadaná množina bodov je teda $[(q-a)/2, (q+a)/2] \cup [(q+a)/2, (a-q)/2]$, kde $q \in \langle 0, a\rangle$ a a je dĺžka strany štvorca.

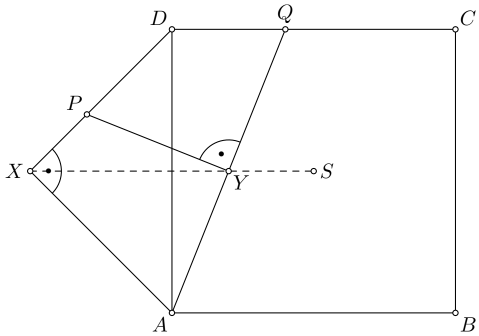
Iné riešenie: *využívajúce klasickú geometriu*



Pre zvolený bod Q nájdeme bod P ako priesečník osi úsečky AQ (keďže ide o rovnoramenný trojuholník) a Tálesovej kružnice nad úsečkou AQ (keďže ide o pravouhlý trojuholník). Tieto priesečníky budú pre každé Q práve dva. Každý z nich bude ležať v jednej polrovine vzhľadom na úsečku AQ. Tieto body budú navyše súmerné podľa stredu úsečky AQ.

Vyriešme najprv „krajné prípady“: $Q = C$ a $Q = D$. Pre $Q = C$ označme dva možné body P ako P_1 a P_2. Všimnime si, že $P_1 = D$ a $P_2 = B$. Ak $Q = D$, tak s podobným značením máme $P_2 = S$, kde S je stred štvorca $ABCD$ a $P_1 = X$, kde X je bod súmerný s bodom S podľa AD.

Teraz dokážeme, že riešením úlohy je zjednotenie úsečiek BS a DX. Potrebujeme ukázať, že pre každé zvolené Q ležia príslušné P_1 a P_2 na $BS \cup DX$ a tiež to, že pre každý bod zjednotenia leží príslušné Q na CD. Samotný dôkaz vykonáme len pre úsečku DX. Dôkaz pre BS je analogický.



Vezmime si ľubovoľný bod P ležiaci na úsečke DX. Zostrojme úsečku AP a kolmicu na túto úsečku v bode P. Priesečník kolmice s CD označme Q. Kolmica sa so stranou CD určite pretne, keďže $|\sphericalangle APD| \geq 90°$(teda Q leží na polpriamke DC) a $|\sphericalangle APC| \leq 90°$ (teda Q leží na polpriamke CD). Keďže $|\sphericalangle APQ| = 90° = |\sphericalangle ADQ|$, tak štvoruholník $APDQ$ je tetivový. Potom $|\sphericalangle PDA| = 45° = |\sphericalangle PQA|$ (obvodové uhly nad tetivou PA). Dodáme, že $|\sphericalangle PDA| = 45°$ preto, že DX je osovo súmerné s DS podľa DA a $|\sphericalangle ADS| = 45°$, keďže priamka DS je uhlopriečka štvorca $ABCD$. Z toho, že $|\sphericalangle PQA| = 45°$ vyplýva že, trojuholník PAQ je nielen pravouhlý, ale aj rovnoramenný. Pre každé P na DX teda existuje Q na strane CD.

Ostáva ukázať, že pre každý bod Q leží bod P na DX. Vezmime si ľubovoľný bod Q na strane CD. Stred AQ označme Y. Y určite leží na priamke XS, keďže ide o strednú priečku trojuholníka ADQ. Teraz urobme kolmicu na AQ z bodu Y a jej priesečník s úsečkou DX označme P. Tento priesečník bude vždy existovať, keďže $|\sphericalangle AYD| \geq 90°$ a $|\sphericalangle AYX| \leq 90°$.

Trojuholník AQP je rovnoramenný, keďže jeho výška je zároveň ťažnicou na základňu. Musíme teda ukázať, že je aj pravouhlý. Ak sa pozrieme na uhly AYP a AXD, vidíme, že sú oba pravé. A teda štvoruholník AXPY je tetivový. To znamená, že $|\sphericalangle DXY| = 45°$ aj $|\sphericalangle PAY| = 45°$, lebo ide o obvodové uhly nad tetivou AP. A keďže ide o rovnoramenný trojuholník a veľkosť uhla pri základni je 45°, trojuholník APQ je aj pravouhlý.

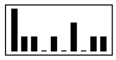
Dôkaz pre prvú polrovinu je hotový, pre druhú polrovinu bude skoro úplne rovnaký. Riešením úlohy je teda zjednotenie úsečiek DX a BS.

Iné riešenie: *využívajúce rovnoľahlosť*
Všimnime si, že úsečka AP zviera s úsečkou AQ vždy uhol 45°. Ďalej sa pozrime na vzťah dĺžok $|AP|$ a $|AQ|$. Keďže sa jedná o rovnoramenný pravouhlý trojuholník s preponou dĺžky $|AQ|$ a odvesnou dĺžky $|AP|$, tak z Pytagorovej vety vieme $|AQ| = \sqrt{2}|AP|$. Vďaka týmto informáciám vieme bod Q zobraziť do bodu P zložením otočenia o 45° okolo A a rovnoľahlosti so stredom A a pomerom podobnosti $1/\sqrt{2}$. Pomenujme toto zobrazenie $X = H(A, 1/\sqrt{2}) \circ R(A, 45°)$. Výslednú množinu bodov P potom dostaneme ako zobrazenie množiny bodov Q, teda úsečky CD, pomocou zobrazenia X. Úsečka CD sa zobrazí práve do dvoch úsečiek (záleží na smere otáčania) rovnako ako v predošlom riešení.

Komentár: Najväčším problémom v úlohe bolo, že niektorým sa síce podarilo ukázať, že bod P musí ležať na spomínaných úsečkách, lenže z toho ešte nevyplýva, že celá úsečka je množina bodov P. Bolo potrebné overiť, že naozaj každý bod na týchto úsečkách by mohol byť bodom P.

6. Opravoval: Maťo Vodička

Počet riešiteľov: 10

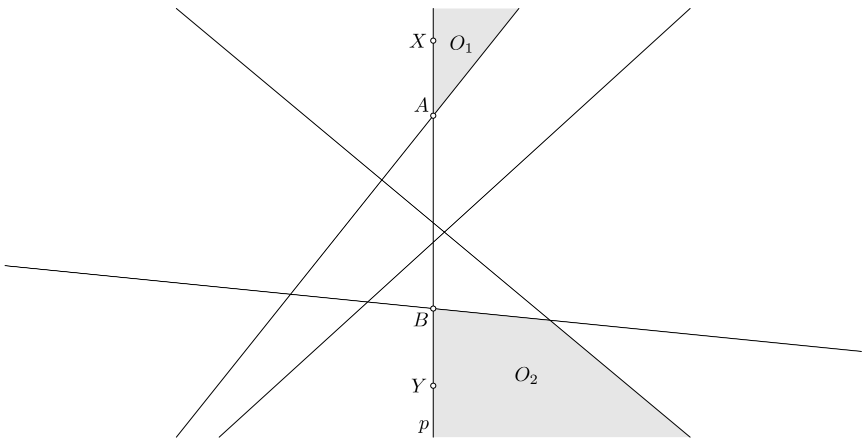


V rovine je niekoľko priamok, pričom žiadne tri neprechádzajú jedným bodom a žiadne dve nie sú rovnobežné. Tieto priamky rozdelia rovinu na niekoľko oblastí. Dokážte, že môžeme dať do každej oblasti kladné číslo tak, aby pre každú priamku platilo, že súčet čísel v oblastiach na jednej strane priamky je rovnaký ako súčet čísel v oblastiach na druhej strane.

Riešenie:

Úlohu budeme riešiť indukciou vzhľadom na počet priamok. Ak je v rovine jedna priamka je to triviálne - dáme na obe časti rovnaké číslo. (Formálne aj nula priamok je niekoľko, takže by sme to mali vyriešiť aj pre tento prípad, ale vtedy je to ešte triviálnejšie.) Tým máme urobený prvý indukčný krok.

Teraz predpokladajme, že to platí pre ľubovoľnú konfiguráciu n priamok a skúsme dokázať, že to platí aj pre $n+1$ priamok. Máme teda v rovine $n+1$ priamok a na chvíľu jednu z nich odignorujme a označme ju p. BUNV[1] p je zvislá priamka (to len, aby sa nám lepšie vyjadrovalo). Bez p máme len n priamok, a preto môžeme podľa indukčného predpokladu umiestniť do každej časti roviny jedno kladné číslo tak, aby bola splnená podmienka o súčtoch čísel na stranách priamok.



Teraz tam vráťme p. Čo sa stalo s oblasťami? No niektoré sa rozdelili na 2 časti (tie, ktorými prechádza p) a s niektorými sa nič nestalo. My potrebujeme všade vpísať nejaké číslo a urobíme to jednoducho. V tých oblastiach, ktoré p nepreťala necháme pôvodné číslo. A v každej oblasti, ktorú p preťala, vydelíme pôvodné číslo 2, a toto dáme do oboch nových oblastí. Teraz máme všade kladné číslo. Navyše, ak si zoberieme priamku rôznu od p, tak súčty čísel v oblastiach na oboch stranách tejto priamky sú rovnaké, pretože boli rovnaké pred pridaním p a našou konštrukciou sme ich nezmenili.

Potrebujeme preto len vyrovnať súčty na stranách p. Označme L súčet čísel v oblastiach na ľavej strane p a R súčet v oblastiach na pravej strane. Ak $L = R$, tak sme vyhrali. Prepokladajme BUNV, že $L > R$.

Pozrime sa na priesečníky p s ostatnými priamkami a označme A ten najvyšší a B ten najnižší (áno, v prípade $n = 1$ máme $A = B$). Pre lepšie značenie označme X bod na p nad bodom A a Y bod na p pod bodom B. Označme oblasť, ktorej ľavá hranica je polpriamka $\overrightarrow{AX}$ ako O_1 a oblasť, ktorej ľavá hranica je polpriamka $\overrightarrow{BY}$ ako O_2. Čo urobíme je to, že k číslu v každej z týchto oblastí pridáme $(L-R)/2$. Potom určite platí, že súčet čísel na oboch stranách p je rovnaký.

[1]bez ujmy na všeobecnosti

Ak si zoberieme ľubovoľnú priamku $q \neq p$, tak oblasti O_1 a O_2 sú na rôznych stranách tejto priamky, pretože q pretína p niekde medzi bodmi A, B (vrátane). A z toho vyplýva, že polpriamky $\overrightarrow{AX}$ a $\overrightarrow{BY}$ sú na rôznych stranách tejto priamky, a teda aj oblasti O_1 a O_2. To znamená, že tým, že sme do oboch pridali rovnaké čísla, sme priamku q nepokazili - súčet čísel na oboch jej stranách je stále rovnaký.

To znamená, že teraz je súčet čísel na oboch stranách ľubovoľnej priamky rovnaký, čo je to čo sme chceli. Tým je dôkaz indukciou ukončený.

Komentár: Do riešenia tejto úlohy sa pustilo málo z vás. To je škoda, pretože podľa mňa nebola až tak ťažká a aj medzi tými málo riešeniami bolo viac postupov, ako sa to dalo vyriešiť. Netreba sa báť úlohy len preto, že má číslo 6. Okrem toho by som dodal, že si dávajte pozor, keď tvrdíte, že je niečo jasné, lebo to, že to tak vyzerá na vašom obrázku alebo to platí, pre 3 priamky neznamená, že to nutne platí aj všeobecne :)

Autori vzorových riešení: Tomáš Babej, Žaneta Semanišinová, Kristína Mišlanová, Roman Staňo, Daniel Onduš, Martin Vodička, Jakub Genči

Zadania úloh letného semestra 42. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na `https://seminar.strom.sk`.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **7. 5. 2018**

1. Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že všetky tri čísla $2n^2+1$, $3n^2+1$ a $6n^2+1$ sú druhými mocninami celých čísel.

2. Nech p, q sú reálne čísla také, že rovnica $x^3+px+q=0$ má tri rôzne reálne riešenia. Dokážte, že potom platí $p \leq 0$.

3. Vodka a Tomáško hrajú hru na plániku 2018×2. Obaja majú 2×1 domino bloky, ktoré postupne po jednom pokladajú na plánik (v ťahoch sa striedajú a hráč musí v ťahu položiť blok na plán). Tomáško začína a môže pokladať bloky len v horizontálnom smere (ten, v ktorom má plánik rozmer 2018). Vodka môže pokladať bloky len vo vertikálnom smere. Hráč, ktorý nevie spraviť ťah, prehráva. Zistite, pre ktorého z hráčov existuje výherná stratégia.

4. Kružnica so stredom v bode I je vpísaná do štvoruholníka $ABCD$. Polpriamky BA a CD sa pretínajú v bode P, polpriamky AD a BC sa pretínajú v bode Q. Za predpokladu, že P leží na kružnici opísanej trojuholníku AIC dokážte, že Q tiež leží na tejto kružnici.

5. Nájdite najmenšie prvočíslo, ktoré sa nedá zapísať v tvare $|2^a - 3^b|$, kde a, b sú nezáporné celé čísla.

6. Nájdite všetky funkcie $f : \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$, ktoré vyhovujú súčasne nasledujúcim trom podmienkam:

1. pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla x, y také, že $x+y>0$, platí rovnosť $f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = f(xy/(x+y))$,
2. $f(1) = 0$,
3. $f(x) > 0$ pre ľubovoľné $x > 1$.

Poradie po 1. sérii Letného semestra 42. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1. - 2.	Samuel Krajči	S3	GAlejKE	9	9	7	9	9	9	0	52
	Norbert Micheľ	S1	GPoštKE	9	9	9	9	7	-	0	52
3. - 4.	Matej Hanus	S2	GPoštKE	9	9	9	9	4	6	0	48
	Patrik Paľovčík	S2	GPoštKE	9	9	9	9	-	6	0	48
5.	Matúš Masrna	Z9	ZKro4KE	7	9	9	9	4	-	0	47
6.	Tomáš Krupa	S2	GPoštKE	7	9	6	9	-	8	0	45
7.	Lukáš Gáborik	S1	GJGTBB	8	9	-	9	9	-	0	44
8. - 9.	Lujza Milotová	S1	GPoštKE	8	9	9	7	1	-	0	43
	Timea Szöllősová	S2	GAMČA	9	8	9	7	5	-	0	43
10.	Filip Csonka	S3	GAlejKE	9	9	9	5	9	-	0	41
11.	Dorota Porubská	S2	GLStöBJ	8	9	-	9	4	4	0	38
12. - 15.	Viktória Brezinová	S3	GAlejKE	9	9	9	-	9	-	0	36
	Martin Števko	S3	GAlejKE	9	0	9	9	9	-	0	36
	Tomáš Chovančák	S2	GPoštKE	7	9	9	7	-	2	0	36
	Ján Richnavský	S1	GPoštKE	9	9	9	-	-	-	0	36
16.	Lenka Hake	S1	GAlejKE	8	9	8	-	-	-	0	34
17. - 20.	Martin Mihálik	S3	GAlejKE	8	9	7	-	9	-	0	33
	Branislav Pastula	S2	GPoštKE	9	5	5	6	4	-	0	33
	Alex Blandón	S1	GPoštKE	8	4	6	-	7	-	0	33
	Róberta Juríková	S3	GVBNPD	9	9	9	3	3	-	0	33
21. - 23.	Radovan Lascsák	S2	GPoštKE	6	9	8	9	0	-	0	32
	Ela Vojtková	Z9	GAMČA	9	8	6	-	0	-	0	32
	Michal Farnbauer	S1	GAMČA	8	9	6	-	-	-	0	32
24. - 29.	Michal Masrna	S2	GPoštKE	9	8	9	-	5	-	0	31
	Benjamín Mravec	S2	GPoštKE	6	7	9	9	0	-	0	31
	Jakub Pravda	S2	ŠpMNDaG	7	9	6	9	0	-	0	31
	Štefánia Glevitzká	S3	GVBNPD	7	9	4	8	3	-	0	31
	Timea Jakubócyová	S1	BGMHSuč	9	9	-	-	4	-	0	31

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
	Zuzka Pracharová	S1	GPoštKE	6	7	-	9	0	-	0	31
30.	Michaela Rusnáková	S1	GAlejKE	8	7	2	-	5	-	0	30
31.	Matej Moško	S3	GAMČA	8	8	-	9	4	-	0	29
32.	Nicol Kršková	S1	GPoštKE	7	-	3	9	-	-	0	28
33. - 34.	Gabriela Genčiová	S1	GPoštKE	8	9	-	-	-	0	0	26
	Martin Starovič	S2	ŠpMNDaG	8	9	-	9	-	-	0	26
35. - 38.	Klára Hricová	S1	GPoštKE	7	6	4	-	1	-	0	25
	David Šlosar	S1	GPoštKE	7	-	-	9	-	-	0	25
	Adam Mackanič	S1	GPoštKE	7	-	-	9	-	-	0	25
	Nadiya Balanchuk	S1	BGMHSuč	7	-	7	-	4	-	0	25
39. - 42.	Frederik Ténai	S1	GKatkKE	7	3	-	-	7	-	0	24
	Martin Albert Gbúr	S2	GPoštKE	6	7	2	9	0	0	0	24
	Matej Tarča	S2	GPoštKE	8	7	9	-	-	-	0	24
	Miroslav Molnár	S1	GAMČA	9	-	6	-	-	-	0	24
43.	Samuel Novák	S2	GPoštKE	9	-	-	9	5	-	0	23
44. - 45.	Michal Vorobel	S1	GJARPO	9	-	-	-	1	-	0	19
	Tomáš Ganz	S2	ŠpMNDaG	8	9	2	-	-	-	0	19
46. - 47.	Adriana Kucková	S1	GPoštKE	6	-	-	6	-	-	0	18
	Matúš Gindl	S1	GPoštKE	7	-	-	4	-	-	0	18
48. - 49.	Martin Mičko	S2		8	-	9	-	-	-	0	17
	Lívia Čerešňová	S1	ŠpMNDaG	8	0	-	-	0	1	0	17
50.	Martin Andričík	S1	GPoštKE	-	6	1	0	3	-	0	16
51.	Bianka Šimková	S1	GPoštKE	7	-	-	-	-	-	0	14
52.	Miriam Magočiová	S2	GPoštKE	6	-	-	6	-	-	0	12
53. - 54.	Erik Berta	S3	GAlejKE	8	3	-	-	-	-	0	11
	Jakub Farbula	S1	GAlejKE	4	3	-	-	-	-	0	11
55.	Dušan Oberta	S2	GŠkolSN	8	-	-	-	0	-	0	8
56.	Michaela Masárová	S3	SOŠ	3	-	-	2	0	-	0	5
57. - 58.	Adam Janeka	S1	SOŠ	2	-	-	-	-	-	0	4
	Natália Pohorelcová	S3	SOŠ	2	0	-	2	0	-	0	4
59.	Dávid Gacko	None		1	-	-	-	-	-	0	1
60. - 64.	Juraj Vlašič	S2	GAEinBA	-	0	-	0	0	0	0	0
	Kristián Paľuch	S1	GPoštKE	-	0	-	0	-	-	0	0
	Alexander Tichý	S1	SOŠ	-	-	-	-	0	-	0	0
	Lucia Podlucká	S3	SOŠ	-	-	-	-	0	-	0	0
	Martin Kebisek	S1	SOŠ	-	-	-	-	0	-	0	0

Názov STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 5 • Apríl 2018 • Letný semester 42. ročníka (2017/2018)
Internet: http://seminar.strom.sk
E-mail: strom@strom.sk

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: https://zdruzenie.strom.sk
E-mail: info@strom.sk

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk