STROM

Korešpondenčný matematický seminár

Milí riešitelia,

všetci ste už určite zaneprázdnení riešením príkladov z druhej série, niektorí z vás možno až zabudli na tie z prvej. My sme však nezabudli, a prinášame vám ich opravené spolu s bodovým ohodnotením. Veríme, že s bodovým ziskom budete spokojní, a že z prípadných chýb sa do budúcnosti poučíte. Ak to náhodou nedopadlo podľa vašich predstáv, nezúfajte - vždy je tu druhá séria a šanca na reparát a miesto na špičke výsledkovej listiny. Ako vždy ide naozaj o veľa - sústredko v malebnej lokalite so skvelým jedlom, ešte lepšími účastníkmi a najsamlepšími vedúcimi, a to všetko úplne zadarmo. Tak šup-šup, naostrite ceruzky, pripravte si vaše mozgy a pustite sa do písania. Veľa zdaru!

Navždy vaši **STROM**isti

Košický Matboj 2018

V piatok 26.10.2018 sa konal už 18. ročník Košického Matboja.

Tejto tradičnej tímovej súťaže sa tentokrát zúčastnilo 51 tímov z celého Slovenska. V priestoroch Kultúrno-spoločenského centra na Jedlíkovej ulici si svoje vedomosti z matematiky zmeralo 203 žiakov stredných škôl a gymnázií. Najlepšie tímy si vďaka Národnému projektu IT Akadémia odniesli aj hodnotné vecné ceny.

Medzi najlepšími sa umiestnili študenti z Gymnázia Poštová a Gymnázia J. A. Raymana z Prešova. Kompletné výsledky súťaže, príklady aj s riešeniami a takisto fotogalériu nájdete na tejto adrese: `https://seminar.strom.sk/sk/matboj/`.

Všetkým zúčastneným ďakujeme, blahoželáme a dúfame, že sa im tohtoročný Matboj páčil. Už sa tešíme na ďalší rok.

1. **Opravovali: Žanetka Semanišinová, Kubo Genči**

Počet riešiteľov: 60

Dokážte, že ak sú a, b, c, d reálne čísla a $ac = 2(b + d)$, tak má aspoň jedna z rovníc $x^2 + ax + b = 0$ a $x^2 + cx + d = 0$ všetky korene reálne.

Riešenie:

Tvrdenie budeme dokazovať sporom. Predpokladajme, že žiadna z týchto rovníc nemá reálne korene. To odpovedá tomu, že diskriminanty oboch z nich sú záporné, teda platí $a^2 - 4b < 0$ a $c^2 - 4d < 0$. Potom sčítaním týchto nerovností dostávame $a^2 - 4(b + d) + c^2 < 0$, čo nám dá po použití vzťahu $ac = 2(b + d)$ zo zadania $a^2 - 2ac + c^2 < 0$. Ľavá strana nerovnosti sa dá podľa vzorca upraviť na $(a - c)^2$, preto dostávame $(a - c)^2 < 0$. To je však spor, keďže druhá mocnina reálneho čísla je vždy nezáporná. Preto musí platiť, že niektorá rovnica má nejaký koreň reálny. Pri kvadratickej rovnici to znamená, že má všetky korene reálne, čo sme chceli ukázať.

Komentár: Úlohu sa vám darilo vyriešiť (väčšinou podobne ako vo vzoráku), o čom svedčí množstvo 9-bodových riešení. Najväčším problémom bolo použitie riešenia s násobením nerovností, pri ktorom si bolo nutné uvedomiť, prečo sa zachová znamienko nerovnosti. Navyše, ak používate AG-nerovnosť, rozmyslite si, či sú čísla, na ktoré ju aplikujete, nezáporné. Napokon nezabúdajte, že čísla (a teda aj diskriminanty) sú nielen kladné a záporné, ale aj nulové.

2. **Opravovali: Tomáš Kocák, Kristín Mišlanová**

Počet riešiteľov: 60

Majme trojuholník ABC, kde AB je najdlhšia jeho strana. Zvoľme bod D tak, aby sa nachádzal na opačnej polpriamke k BA, teda B je medzi bodmi A a D a zároveň platí $|BC| = |BD|$. Dokážte, že trojuholník ACD je tupouhlý.

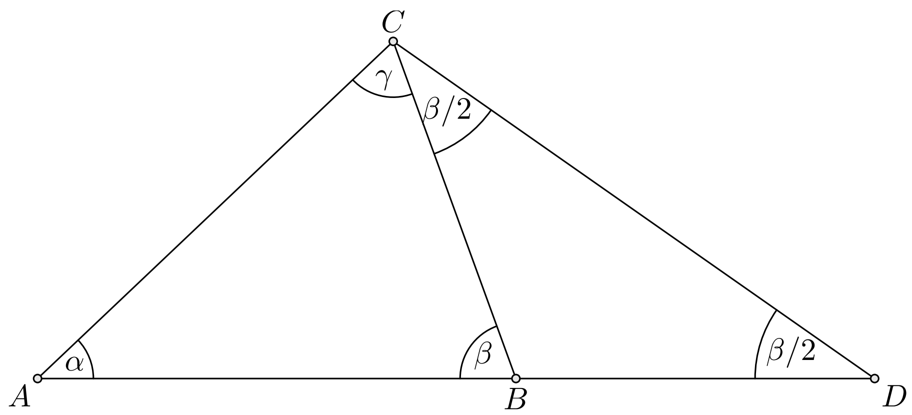
Riešenie:

Označme si vnútorné uhly v trojuholníku ABC pri vrcholoch A, B, C postupne α, β, γ. Ďalej využijeme, že uhol CBD je susedný uhol k uhlu ABC a to, že trojuholník DBC je rovnoramenný a dostaneme $|\sphericalangle BCD| = \beta/2$, z čoho $|\sphericalangle ACD| = \gamma + \beta/2$. Naším cieľom bude ukázať, že $\sphericalangle ACD$ je tupý, a teda, že $\gamma + \beta/2 > 90°$.

Zo zadania vieme, že strana AB je najdlhšou stranou trojuholníka ABC, a preto uhol γ je najväčší z vnútorných uhlov trojuholníka ABC. Preto dostávame

$$\begin{aligned}
\gamma &> \alpha && / + \beta + \gamma \\
2\gamma + \beta &> \alpha + \beta + \gamma && / \alpha + \beta + \gamma = 180° \\
2\gamma + \beta &> 180° && / : 2 \\
\gamma + \beta/2 &> 90°.
\end{aligned}$$

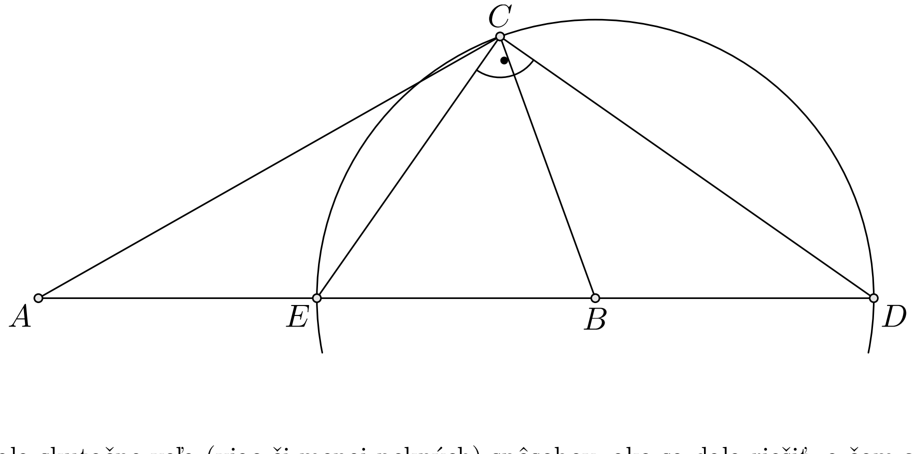
Čím sme dokázali, že uhol ACD je tupý.



Iné riešenie: Zostrojme kružnicu k so stredom v bode B a polomerom $|BD|$. Táto kružnica prechádza bodmi D a C, keďže DBC je rovnoramenný trojuholník. Ďalej si označme E prienik k a priamky AB, rôzny od bodu D. Bod E sa nachádza vo vnútri úsečky AB, keďže AB je najdlhšou stranou trojuholníka ABC, a teda $|AB| > |BC| = |BE|$. Kružnica k je Tálesovou kružnicou trojuholníka EDC, z čoho musí byť uhol ECD pravý. Preto platí

$$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ACE| + |\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle ACE| + 90° > 90°,$$

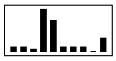
keďže ACE má nenulovú veľkosť.



Komentár: Úloha mala skutočne veľa (viac či menej pekných) spôsobov, ako sa dala riešiť, o čom svedčí aj také kvantum 9-bodových riešení, aké sme už dlho nezažili (: Dávajte si akurát pri spisovaní pozor na to, aby ste dokázali nerovnosť v správnom smere, došli na konci dôkazu k sporu, ktorý ste vyššie sľúbili, a podobne.

3. Opravovali: Dano Onduš, Peťo Kovács

Počet riešiteľov: 50



Máme n bodov v rovine. Môžeme urobiť to, že dva z nich vyberieme a následne obidva presunieme do stredu úsečky, ktorá ich spája. Body iba presúvame, žiaden z nich nezaniká. Zistite, pre ktoré n je možné vždy presúvať dané body tak, aby všetky splynuli (boli v jednom bode).

Riešenie:

Na celú situáciu sa môžeme pozrieť od zadu. Na konci boli všetky body na tom istom mieste. V prípade, že toto nebol počiatočný stav, tak tomu musel predchádzať krok, kde sa dva body premiestnili do ich stredu, čiže na spomínanú kopu bodov. Po prvom kroku odzadu nám v kope ostalo $n - 2$ bodov a vonku nejaké 2 body.

V ďalšom zase musíme vybrať 2 body z kopy a poslať ich na ich predošlé miesta. Tieto body sa môžu rozletieť len na miesta určené prvou dvojicou. Ak by to tak nebolo, znamenalo by to, že v našom rozložení mali 2 úsečky spoločný stred, čo je v spore s tým, že body môžu byť rozložené ľubovoľne. Takto pokračujeme pre všetky dvojice bodov. Dostali sme dve rovnaké kopy, pričom v každej je $n/2$ bodov, čiže riešime analogický problém. Ľahko teraz nahliadneme, že ak chceme na konci dostať na každej kope 1 bod, musí byť bodov 2^a. Iný počet bodov by bol v spore s tým, že body môžu mať na začiatku ľubovoľné rozmiestnenie. Z predošlého postupu tiež vyplýva, ako 2^a bodov dostať na jedno miesto.

Iné riešenie: Druhý spôsob, ako ukázať, že iný počet, ako $n = 2^a$ nevyhovuje, je pomocou súradníc. Umiestnime všetky body okrem jedného do bodu $[0, 0]$ a ten posledný do $[1, 0]$. Vidíme, že pri presúvaní dvoch bodov sa oba presnunú do stredu úsečky, ktorá ich spája, čiže súčet ich x-ových ani y-ových súradníc sa nezmení. Preto sa nezmení ani celkový súčet súradníc všetkých bodov pri ich presúvaní. Z toho vyplýva, že bod, v ktorom sa na konci musia nachádzať všetky body, má súradnice $[1/n, 0]$. Teraz ukážeme, že pri presúvaní z počiatočnej polohy môžu body skončiť len v bode so súradnicami $[k/2^l, 0]$, kde k a l sú nezáporné celé čísla. Na začiatku toto očividne platí. Teraz zoberme dva body. Nech ich súradnice sú $[a/2^b, 0]$ a $[c/2^d, 0]$. Po presune budú mať obidva body súradnice

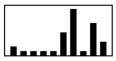
$$\left[\frac{a \cdot 2^d + c \cdot 2^b}{2^{b+d+1}}, 0\right],$$

čo je tvar, aký sme chceli. Nakoniec dochádzame k sporu, lebo vieme, že všetky body majú mať x-ovú súradnicu $1/n$, čo je ale v spore s tým, že má byť v tvare $k/2^l$, keďže sme predpokladali, že n nie je v tvare 2^a.

Komentár: Skoro každý zistil, že 2^a bodov vieme presunúť na jedno miesto. Často ste však zaváhali, keď bolo treba ukázať, prečo žiaden iný počet nevyhovuje. Mnohí ste v riešeniach využívali spor, ktorý vyplynul z konkrétneho spôsobu premiestňovania bodov, čo však nič nedokazuje.

4. Opravovali: Martin Masrna, Roman Staňo

Počet riešiteľov: 42



Nájdite všetky polynómy $P(x)$ s reálnymi koeficientami, ktoré spĺňajú $(x^2 - 6x + 8) \cdot P(x) = (x^2 + 2x) \cdot P(x - 4)$ pre všetky reálne čísla x.

Riešenie:

Rovnicu zo zadania vieme rozkladom na súčin upraviť ako

$$(x - 2) \cdot (x - 4) \cdot P(x) = x \cdot (x + 2) \cdot P(x - 4).$$

Vidíme, že pre $x = 0$ a $x = -2$ je pravá strana rovnice rovná nule, a teda nule musí byť rovná aj ľavá strana. To sa dá pre hodnoty $x = 0$ a $x = -2$ dosiahnuť iba tak, že $P(0) = 0$ a $P(-2) = 0$, čo znamená, že $x = 0$ a $x = -2$ sú korene polynómu $P(x)$. Potom vieme využiť rozklad na koreňové prvočinitele a $P(x)$ rozpísať ako

$$P(x) = Q(x) \cdot x \cdot (x + 2) \quad (\bigstar),$$

kde $Q(x)$ je nejaký polynóm. Keď dosadíme z $(\bigstar)$ do rovnice zo zadania máme

$$(x - 2) \cdot (x - 4) \cdot Q(x) \cdot x \cdot (x + 2) = x \cdot (x + 2) \cdot Q(x - 4) \cdot (x - 4) \cdot (x - 2),$$

čo pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 2, 4\}$ vieme upraviť na:

$$Q(x) = Q(x - 4) \quad (\clubsuit).$$

Podľa rovnice $(\clubsuit)$ musí byť pre $x > 4$ polynóm $Q(x)$ periodická funkcia. Vieme, že polynómy nenulového stupňa sa pre nekonečne veľké x blížia hodnotou do ∞ alebo $-\infty$. Navyše vieme, že polynómy sú spojité, t.j. dajú sa nakresliť jednou súvislou čiarou. Tieto dve informácie sú však v rozpore – z periodicity určenej rovnicou $(\clubsuit)$ by polynóm musel rásť do nekonečna na každej perióde. Ak však funkcia striedavo rastie do nekonečna a následne naberá konečné hodnoty, nevieme ju nakresliť jednou súvislou čiarou, čo znamená, že nie je spojitá. Dostávame spor pre náš predpoklad – to, že polynóm má nenulový stupeň. Rovnici (♣) preto vyhovuje len polynóm nultého stupňa, čo je polynóm s konštantnou hodnotou pre všetky x: $Q(x) = k$, kde $x, k \in \mathbb{R}$. Dosadením do (★) tak dostávame jediného možného kandidáta na riešenie úlohy: $P(x) = k \cdot x \cdot (x + 2)$ pre $x, k \in \mathbb{R}$. Nakoľko nám dosadenia dali len nutné a nie postačujúce podmienky, k úplnosti musíme vykonať aj skúšku dosadením nájdenej funkcie do riešenia:

$$(x - 2) \cdot (x - 4) \cdot k \cdot x \cdot (x + 2) = x \cdot (x + 2) \cdot k \cdot (x - 4) \cdot (x - 2),$$

čo naozaj platí pre všetky x a riešením sú preto všetky polynómy $P(x) = k \cdot (x) \cdot (x + 2);\ x,\ k \in \mathbb{R}$.

Komentár: Aj keď ste výsledok poväčšine objavili, mnohokrát to bolo len náhodou, uhádnutím, prípadne ste neukázali dostatočne presvedčivo, že iné riešenia už neexistujú. Posledné vety vzorového riešenia obsahujú myšlienku, ktorej by sme si mali byť pri podobných úlohách vedomí – skúška správnosti je povinnosť. Čo nás vyslovene prekvapilo, bola bezostyšná ľahkovážnosť pri delení neznámymi výrazmi. Viacerí z vás s čistým svedomím vydelili rovnicu nulou a ešte mali tú odvahu nazvať to ekvivalentnou úpravou. Pri delení vám odporúčame uvádzať podmienky, pri ktorých má operácia zmysel.

5.

Opravovali: Janka Baranová, Matúš Hlaváčik
Počet riešiteľov: 23

Majme n^2 bodov rozmiestnených do mriežky $n \times n$. Z nich náhodne vyberieme $2n$ bodov. Dva vybrané body sú spojené zelenou úsečkou, ak sú v rovnakom riadku, a červenou úsečkou, ak sú v rovnakom stĺpci. Dokážte, že existuje uzavretá lomená čiara s vrcholmi vo vybraných bodoch a so stranami tvorenými týmito úsečkami taká, že sa farby jej strán striedajú.

Riešenie:

Úlohu budeme dokazovať matematickou indukciou. Ak máme mriežku 1×1, tak nevieme vybrať $2n = 2$ body, preto tento prípad riešiť nepotrebujeme. Pre mriežku 2×2 je potrebné vybrať $2n = 4$ body, čo znamená, že vyberieme všetky body a jednoducho ich spojíme do štvorca. Vidíme, že uzavretá lomená čiara existuje a farby jej strán sa striedajú, teda sme úlohu dokázali pre $n = 2$ (to bude báza našej indukcie). Teraz predpokladáme, že tvrdenie zo zadania platí pre mriežku $n \times n$ a chceme dokázať, že potom platí aj pre mriežku $(n + 1) \times (n + 1)$. Pozrime sa na mriežku $(n + 1) \times (n + 1)$ – v nej náhodne zvolíme $2(n + 1)$ bodov. Nastane jeden z dvoch prípadov:

1. v každom riadku aj každom stĺpci sú práve 2 vybrané body
2. existuje riadok alebo stĺpec, v ktorom je vybraný najviac 1 bod

Poďme sa najprv zaoberať prvým prípadom, kedy sú v každom riadku aj v každom stĺpci práve 2 body. Ukážeme, ako vytvoriť požadovanú lomenú čiaru. Začneme ľubovoľným bodom a spojíme ho s tým, ktorý sa nachádza v rovnakom riadku (taký existuje, pretože v každom riadku aj stĺpci sú práve 2 body). Ďalej tento bod spojíme s bodom v rovnakom stĺpci, aby sa nám farby striedali (opäť vieme, že taký bod existuje). Takto pokračujeme ďalej v striedaní farieb (a aj riadkov a stĺpcov), až raz skončíme v bode, v ktorom sme už niekedy boli, keďže bodov je konečne veľa. Do každého bodu môžu viesť iba 2 úsečky, čiže to musí byť počiatočný bod našej čiary, lebo všetky ostatné body na čiare sú už spojené s dvoma inými. Počiatočný bod už bol spojený s bodom v rovnakom riadku, preto sme do neho museli prísť z bodu v rovnakom stĺpci, čím sme ukázali, že striedanie farieb sa ani na konci nepokazí. Naša čiara spĺňa podmienky zadania, čím sme dokázali indukčný krok pre prípad, kedy sú v každom riadku aj každom stĺpci práve 2 body.

Ostáva vyriešiť prípad, kedy existuje riadok alebo stĺpec, v ktorom je vybraný najviac 1 bod – nech je to riadok. Tento riadok odstránime (zabudneme naň – nebudeme s ním rátať) a dostaneme mriežku $n \times (n + 1)$. Ak v odstránenom riadku bol práve jeden bod, tak v našej novej mriežke je $2n + 1$ vybraných bodov. Keď sa teraz pozrieme na stĺpce (ktorých je $n + 1$), tak taktiež musí existovať taký, v ktorom je najviac 1 bod (keby v každom stĺpci boli aspoň 2 body, tak by sme mali dokopy aspoň $2(n + 1) = 2n + 2$ bodov, čo je viac ako máme) – tento stĺpec tiež odstránime. Dostaneme tak mriežku $n \times n$, v ktorej je aspoň $2n$ bodov. Z indukčného predpokladu vieme, že tvrdenie platí pre mriežku $n \times n$ – ak v nej máme $2n$ bodov, a teda sme ukázali, že platí aj pre mriežku $(n + 1) \times (n + 1)$ (ak existuje riadok alebo stĺpec, v ktorom je najviac 1 bod).

Ak sme odstránili riadok, v ktorom nebol žiadny bod, tak v našej novej mriežke je vybraných $2n + 2$ bodov, čo znamená, že musí existovať taký stĺpec, v ktorom sú vybrané najviac 2 body (keby v každom stĺpci boli aspoň 3 body, tak je dokopy vybraných $3(n + 1) = 3n + 3$ bodov, čo je viac ako máme) – tento stĺpec tiež odstránime. Taktiež dostaneme mriežku $n \times n$, v ktorej je aspoň $2n$ bodov, teda opäť z indukčného predpokladu vieme, že to platí aj pre mriežku $(n + 1) \times (n + 1)$.

Komentár: Túto úlohu sa väčšine z vás podarilo celkom pekne uchytiť. Najčastejším problémom bolo, že ste to nedokázali úplne korektne napísať vo všeobecnosti, respektíve ste zabudli vyriešiť krajné prípady, ktoré síce nemohli nastať, no bolo potrebné vysvetliť prečo nenastanú. Preto vám odporúčame po tom, ako úlohu vyriešite, zamyslieť sa nielen nad tým, či je vaša myšlienka správna, ale skúsiť nájsť jej hranice a zistiť, či nemôže nastať nejaký problém. V tomto príklade to bolo napríklad to, či potom, ako uzavriete cyklus nemôže nastať to, že prvá a posledná čiara bude v rovnakom smere – to by znamenalo, že sa vám v cykle strany nestriedajú ako by mali.

6. Opravoval: Maťo Vodička
Počet riešiteľov: 21

Prirodzené číslo n nazveme chutné, ak pre ľubovoľné dve prirodzené čísla a, b také, že $a + b = n$ platí, že aspoň jeden zo zlomkov a/b, b/a má konečný desatinný rozvoj. Existuje nekonečne veľa chutných čísel? Svoje riešenie odôvodnite.

Riešenie:

Na začiatok si pripomeňme, kedy má číslo a/b konečný desatinný rozvoj. Je to práve vtedy, keď $a/b = c/(10^d)$ pre prirodzené číslo c a nezáporné celé číslo d. Ak a, b sú nesúdeliteľné, tak b musí deliť 10^d – musí to byť súčin mocnín 2 a 5.

Predpokladajme, že nejaké prirodzené číslo n nie je chutné. Potom nutne existujú prirodzené čísla a, b také, že $a + b = n$ a oba zlomky a/b aj b/a majú nekonečný desatinný rozvoj. Teraz sa pozrime na číslo kn pre nejaké prirodzené k. Zjavne $kn = ka+kb$, $ka/kb = a/b$ a $kb/ka = b/a$. Z toho vyplýva, že ani kn nie je chutné kvôli dvojici $(ka,\ kb)$. Práve sme dokázali, že ak nejaké prirodzené číslo nie je chutné, tak ani žiaden jeho násobok nie je chutný.

Zoberme si teraz nejaké prvočíslo $p \geq 13$. Dokážeme sporom, že nie je chutné. Všimnime si, že ak $a + b = p$, tak a, b sú nutne nesúdeliteľné – ich spoločný deliteľ by musel deliť aj p.

Predpokladajme, že p je chutné. Zoberme si dvojicu čísel $(6,\ p - 6)$. Zlomok $(p - 6)/6$ má nekonečný desatinný rozvoj, pretože 6 nie je súčin mocnín 2 a 5. Preto zlomok $6/(p-6)$ musí mať konečný desatinný rozvoj. Číslo $p-6$ je však nepárne, preto to musí byť mocnina 5. Keďže $p - 6 > 1$ tak $5 \mid p - 6$.

Pokračujeme ďalej. Zoberme si dvojicu $(3,\ p-3)$. Znova $(p-3)/3$ má nekonečný rozvoj, a preto $3/(p-3)$ musí mať konečný rozvoj. Lenže $p - 3$ nie je deliteľné 5 ($p - 6$ je deliteľné 5), a preto je $p - 3$ mocnina 2.

Úplne analogicky si môžeme zobrať dvojicu $(7,\ p-7)$ a usúdiť, že aj $p-7$ je mocnina 2. Máme teda dve mocniny 2 s rozdielom 4. Také sú však iba 4 a 8, čo spolu s $p \geq 13$ dáva spor. Preto p nemôže byť chutné.

Pozrime sa na mocniny malých prvočísel:

- $121 = 11^2$ nie je chutné – zoberme $(a,\ b) = (3,\ 118)$
- $49 = 7^2$ nie je chutné – zoberme $(a,\ b) = (3,\ 46)$
- $25 = 5^2$ nie je chutné – zoberme $(a,\ b) = (3,\ 22)$
- $27 = 3^3$ nie je chutné – zoberme $(a,\ b) = (13,\ 14)$
- $16 = 2^4$ nie je chutné – zoberme $(a,\ b) = (7,\ 9)$

My ale vieme, že žiaden násobok čísla, ktoré nie je chutné tiež nie je chutné číslo. To znamená, že žiaden násobok prvočísla väčšieho ako 11 nie je chutný. A tiež žiaden násobok čísel 121, 49, 25, 27 a 16 nie je chutný. Preto je každé chutné číslo deliteľom čísla $11 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2^3 = 27720$.

Ale takých čísel je len konečne veľa, a preto je aj chutných čísel len konečne veľa.

Poznámka: Z tohto sa už dá nájsť aj zoznam všetkých chutných čísel. Proste vyskúšame možnosti. Navyše nemusíme skúsať všetky – napr. $5 \cdot 7 = 35$ nie je chutné kvôli (29, 6), takže násobky 35 už neberieme atď.

Pre zaujímavosť chutné čísla sú $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15, 21\}$.

Komentár: Ako vidno aj z bodovania, prišlo len jedno dobre napísané riešenie – od *Viki Brezinovej*, ktorú týmto chválim.

Všetky ostatné riešenia boli niečo v zmysle: „Zoberme si nejaké veľké číslo. Teraz si zoberme nesúdeliteľné a, b so súčtom n. Potom a alebo b je súčin mocnín 2 alebo 5. A to platí pre všetky a, b a keďže n je dosť veľké, tak to nemôže platiť pre všetky a, b."

Toto je argument, ktorý je fajn použiť, ak za vami príde nejaký milionár a povie, že sa chce s niekým staviť o milión, že či je chutných čísel konečne alebo nekonečne veľa a chce, aby ste mu poradili. Vtedy by vám takýto *intuitívny* argument stačil.

Avšak v matematike treba veci robiť poriadne – presne napísať, čo znamená, že je číslo dosť veľké, aby sme si boli na 100 percent istí, že nám žiaden hlúpy špeciálny prípad neunikol, ako sme to ukázali vo vzorovom riešení.

Okrem toho pár riešiteľov nepochopilo formuláciu „pre ľubovoľné čísla a, b platí...". Verím, že väčšine je to jasné, no napíšem to ešte raz aj tu. Znamená to, že to platí, ak si a, b zvolím ľubovoľne – t.j. platí to pre všetky dvojice a, b. Nabudúce už snáď budete vedieť :).

Autori vzorových riešení: Žaneta Semanišinová, Martin Masrna, Kristína Mišlanová, Roman Staňo, Peter Kovács, Daniel Onduš, Jakub Genči

Zadania úloh zimného semestra 43. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na `https://seminar.strom.sk`.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **3. 12. 2018**

1. Nech $ABCD$ je štvoruholník, v ktorom existuje kružnica, ktorá prechádza stredmi všetkých strán tohto štvoruholníka. Dokážte, že AC a BD sú na seba kolmé.

2. Máme riadok, v ktorom je 1000 čísel. Pod tento riadok pridáme ďalší tak, že pod každým číslom a je napísaná hodnota $f(a)$, kde $f(a)$ je počet výskytov čísla a v predchádzajúcom riadku. Takto postupne pridávame ďalšie riadky. Dokážte, že po pridaní dostatočného počtu riadkov budú pod sebou dva rovnaké riadky.

3. Je daná rovnica $x!y!z! = t!$, kde x, y, z, t sú prirodzené čísla väčšie ako jedna. Ukážte, že existuje nekonečne veľa štvoríc (x, y, z, t), ktoré spĺňajú túto rovnicu. *Pozn.:* $n!$ *je číslo* $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

4. Majme n nenulových čísel, ktorých súčet je 0. Ukážte, že je možné ich očíslovať tak, aby platila nerovnosť:

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_na_1 < 0.$$

5. Dokážte, že ľubovoľné celé číslo môže byť napísané ako súčet 5 tretích mocnín celých čísel.

6. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s $|AB| < |AC|$. Nech M, N sú postupne stredy strán AB a AC a nech AD je výška v tomto trojuholníku. Na úsečke MN zvolíme taký bod K, že $|BK| = |CK|$. Polpriamka KD pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode Q. Dokážte, že body C, N, K, Q ležia na jednej kružnici.

Poradie po 1. sérii Zimného semestra 43. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Lenka Hake	S2	GAlejKE	9	9	9	8	9	0	0	52
2.	Dorota Porubská	S3	GLStöBJ	9	9	9	7	9	8	0	51
3.	Norbert Micheľ	S2	GPoštKE	9	9	4	8	9	7	0	49
4.	Matej Hanus	S3	GPoštKE	9	9	9	9	9	-	0	45
5. - 6.	Viktória Brezinová	S4	GAlejKE	9	9	-	7	9	9	0	43
	Samuel Krajči	S3	GAlejKE	8	9	9	9	8	-	0	43
7. - 8.	Martin Števko	S4	GAlejKE	9	9	7	8	9	0	0	42
	Radoslav Jochman	S1	GAlejKE	9	9	3	5	7	1	0	42
9.	Adam Garafa	S1	GPoštKE	9	9	9	5	-	-	0	41
10.	Martin Kliment	S1	GPoštKE	9	9	3	6	4	0	0	40
11.	Filip Baltovič	S1	GAlejKE	9	9	3	8	0	-	0	38
12.	Radovan Lascsák	S3	GPoštKE	9	9	3	-	9	7	0	37
13. - 14.	Patrik Paľovčík	S3	GPoštKE	9	9	4	6	-	8	0	36
	Štefánia Glevitzká	S4	GVBNPD	9	9	3	6	9	0	0	36
15. - 16.	Tomáš Chovančák	S3	GPoštKE	9	9	9	6	1	1	0	35
	Timea Szöllősová	S3	GAMČABA	9	9	7	-	6	4	0	35
17.	Oszkár Urbán	S1	GPoštKE	9	7	4	5	-	0	0	34
18. - 19.	Matúš Masrna	S1	GPoštKE	7	9	4	4	-	-	0	33
	Branislav Pastula	S3	GPoštKE	9	9	-	6	9	-	0	33
20. - 22.	Filip Csonka	S4	GAlejKE	9	9	6	8	-	0	0	32
	Frederik Ténai	S2	GKatkKE	7	9	3	9	-	2	0	32
	Róberta Juríková	S4	GVBNPD	9	9	4	8	2	-	0	32
23. - 24.	Erik Novák	S1	GPoštKE	6	9	3	-	4	-	0	31
	Tomáš Krupa	S3	GPoštKE	9	9	4	4	1	4	0	31
25. - 28.	Martin Mihálik	S4	GAlejKE	9	9	3	9	-	0	0	30
	Jakub Mičko	S1	GPoštKE	8	9	4	-	-	-	0	30
	Karin Eštoková	Z9	GMRŠKE	9	9	3	-	-	-	0	30
	Ondrej Ovčar	S1	GAlejKE	9	9	3	-	-	-	0	30
29. - 31.	Benjamín Mravec	S3	GPoštKE	9	9	4	6	-	-	0	28
	Miriam Horváthová	Z9	ZKomeMI	7	9	3	-	-	-	0	28
	Alex Blandón	S2	GPoštKE	9	9	4	6	-	-	0	28
32. - 36.	Michal Masrna	S3	GPoštKE	9	9	3	6	-	-	0	27
	Martin Nemjo	S2	GAlejKE	9	9	4	5	-	-	0	27
	Martin Albert Gbúr	S3	GPoštKE	9	9	3	6	-	-	0	27
	Gabriela Genčiová	S2	GPoštKE	9	9	3	6	-	0	0	27
	Adam Džavoronok	Z9	ZSlobKE	5	9	4	-	0	-	0	27
37.	Alex Gašparíková	S2	GAMČABA	9	9	-	8	-	-	0	26
38. - 39.	Jakub Farbula	S2	GAlejKE	9	9	6	1	-	-	0	25
	Martin Kopčány	Z9	GJChaBR	3	3	3	-	6	4	0	25
40. - 41.	Dušan Oberta	S3	GŠkolSN	1	9	5	6	3	-	0	24
	Timea Jakubócyová	S2	BGMHSuč	9	9	3	3	-	-	0	24
42.	David Šlosar	S2	GPoštKE	9	9	-	5	-	-	0	23
43. - 46.	Martin Mičko	S4	GAlejKE	9	9	4	-	-	-	0	22
	Miriam Magočiová	S3	GPoštKE	9	9	4	0	-	-	0	22
	Nicol Kršková	S2	GPoštKE	8	9	-	5	-	-	0	22
	Peter Kochelka	S1	GJGTBB	1	9	3	-	-	-	0	22
47.	Ján Richnavský	S2	GPoštKE	1	9	3	8	-	-	0	21
48.	Zdeněk Pezlar	S1	GJaroBR	9	-	0	2	-	-	0	20
49. - 50.	Lujza Milotová	S2	GPoštKE	7	9	3	-	-	-	0	19

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
	Matej Tarča	S3	GPoštKE	9	9	1	-	-	-	0	19
51. - 55.	Martin Šalagovič	S2	GAlejKE	9	9	-	-	-	-	0	18
	Michal Vorobel	S2	GJARMPO	7	6	5	-	-	-	0	18
	Tomáš Feciskanin	S2	GAlejKE	9	9	-	0	-	-	0	18
	Adam Mackanič	S2	GPoštKE	9	9	-	0	-	-	0	18
	Ela Vojtková	S1	GAMČABA	-	9	-	-	-	-	0	18
56.	Matúš Farkaš	S2	GAlejKE	8	9	-	-	-	-	0	17
57. - 58.	Michaela Rusnáková	S2	GAlejKE	5	9	-	-	-	-	0	14
	Martin Andričík	S2	GPoštKE	-	4	2	3	5	-	0	14
59. - 60.	Ondrej Tomášik	S1	GJGTBB	-	3	4	-	-	-	0	11
	Kristián Paľuch	S2	GPoštKE	9	2	-	-	-	-	0	11
61. - 62.	Erik Berta	S4	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	0	9
	Tamara Timočková	S1	GŠtúrMI	2	2	0	2	1	0	0	9
63.	Klára Hricová	S1	GPoštKE	4	-	1	1	-	0	0	6

Názov STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • November 2018 • Zimný semester 43. ročníka (2018/2019)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `https://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2016-9485/41562:71-10E0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk