STROM
Korešpondenčný matematický seminár

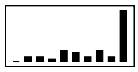
Ahoj!

Tvojmu pohľadu zjavne neuniklo ďalšie vydanie STROMu, v ktorom nájdeš nielen poradie po prvej sérii tohto semestra, ale aj naše vzorové riešenia. Nezabúdaj však, že sme ešte len v polčase, tak určite nepoľavuj a pusti sa do druhej série. S radosťou očakávame Tvoje ďalšie riešenia!

STROMáci

1. Opravovali: **Viki Brezinová a Dorot Jarošová**

Počet riešení: 46



Pre každé celé číslo n od 1 do 100 vrátane si na papier napíšeme najmenšie číslo, ktoré má práve n deliteľov. Koľko z týchto čísel bude deliteľných troma?

Riešenie

Pre všetky prirodzené čísla n od 1 do 100, hľadáme najmenšie x (tiež prirodzené) také, že má práve n deliteľov.
Počet deliteľov čísla x získame, ak navzájom vynásobíme všetky exponenty prvočísel z prvočíselného rozkladu x zväčšené o 1. (Dôvodom je, že každé prvočíslo sa v deliteli môže vyskytovať, maximálne však s exponentom, s akým sa vyskytuje v prvočíselnom rozklade x, ale nemusí sa tam vyskytovať vôbec, teda exponentom môže byť aj 0. Preto na vybratie exponentu pre konkrétne prvočíslo máme $exponent + 1$ možností.)

Na základe tohto faktu si rozdeľme úlohu na tri rôzne prípady:

Prípad 1: ak $n = 1$.
Najmenšie a zároveň jediné číslo, ktoré má iba jedného deliteľa je 1. Preto $x = 1$. V tomto prípade 3 nedelí x.

Prípad 2: ak n je prvočíslo.
O prvočíslach vieme, že majú práve dvoch deliteľov, samého seba a 1. Keďže n je prvočíselný počet deliteľov, tak podľa úvahy vyššie vieme, že v súčine každý člen $exponent + 1$ musí byť rovný 1 alebo n. Keďže ale exponent je vždy aspoň 1, tak to znamená, že v prvočíselnom rozklade čísla x bude figurovať práve jedno prvočíslo s exponentom $n - 1$. Vzhľadom na to, že hľadáme najmenšie možné x, použijeme k tomuto účelu najmenšie možné prvočíslo, teda dvojku. Z toho nám vyplýva, že žiadne prvočíselné n nebude mať prislúchajúce x deliteľné 3.

Prípad 3: ak n je zložené číslo.
Vtedy vieme, že počet deliteľov x vieme vyjadriť ako súčin viacerých rôznych čísel (nie len 1 a n, ako v predchádzajúcom prípade). Povedzme, že pre exponenty m_1, m_2, $\ldots$, m_k platí: $m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_k$. Analogicky k predošlej úvahe teda priradíme najväčší exponent najmenšiemu prvočíslu, druhý najväčší exponent druhému najmenšiemu prvočíslu, $\ldots$ - pretože hľadáme najmenšie možné x. Druhým najväčším prvočíslom je 3-ka, preto ak budú v prvočíselnom rozklade čísla x aspoň dve rôzne prvočísla, tak druhé z nich bude 3-ka. Vtedy vieme, že číslo x bude deliteľné 3, a teda bude vyhovovať zadaniu.

Poďme si ukázať, že pre zložené čísla existuje x deliteľné troma, ktoré bude menšie ako $x = 2^{(n-1)}$. Zoberme si a, b také, že platí $n = a \cdot b$, kde $a \geq b > 1$. Chceme dokázať, že $2^{(n-1)}$ je väčšie ako $2^{(a-1)} \cdot 3^{(b-1)}$. Nerovnosť upravujeme ekvivalentnými úpravami:

$$
\begin{aligned}
2^{(n-1)} &> 2^{(a-1)} \cdot 3^{(b-1)} \\
2^{(ab-1)} &> 2^{(a-1)} \cdot 3^{(b-1)} / \cdot 2 \\
(2^a)^b &> 2^a \cdot 3^{(b-1)} \\
2^a \cdot (2^a)^{(b-1)} &> 2^a \cdot 3^{(b-1)} \\
(2^a)^{(b-1)} &> 3^{(b-1)}
\end{aligned}
$$

V poslednom kroku úprav máme na oboch stranách nerovnosti výraz s exponentom $(b-1)$. Keďže platí, že $a > 1$, teda a je minimálne 2, tak potom 2^a je aspoň 4. Preto táto nerovnosť platí, a teda platí aj pôvodná nerovnosť a aj tvrdenie, že pre každé n, ktoré je zložené číslo, bude najmenšie číslo x, ktoré má práve n deliteľov, deliteľné 3.

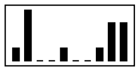
Na záver teda môžeme povedať, že zo všetkých možných n, ktorých je 100, musíme odpočítať tie, ktoré sú prvočíslom (v množine $< 1, 100 >$ je ich práve 25) a jednotku: $100 - 25 - 1 = 74$. Teda počet čísel x, ktoré sú deliteľné 3, je 74.

Komentár

Túto pomerne jednoduchú úlohu zvládli úspešne vyriešiť všetci tí, ktorí identifikovali nutnosť rozdelenia problému na tri prípady a zároveň správne matematicky, nielen pocitovo, dokázať nerovnosť v treťom prípade.

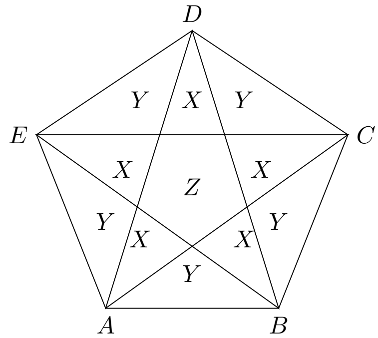
2.

Opravovali: **Dano Onduš a Maťo Gbúr**
Počet riešení: 13



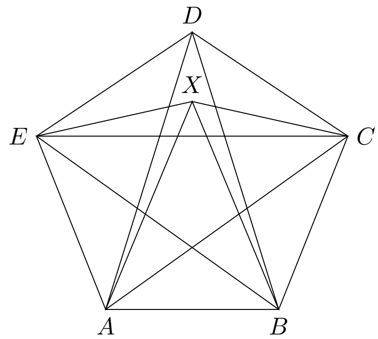
Nech P je konečná množina bodov v rovine, nie nutne vo všeobecnej polohe (t.j. môže sa stať, že na priamke leží tri a viac bodov). Predpokladajme, že množina P spĺňa to, že v konvexnom obale každých piatich bodov (konvexný obal je najmenší konvexný útvar obsahujúci dané body), ale nie na jeho hranici, leží aspoň jeden ďalší bod. Dokážte, že potom každý konvexný päťuholník Q určený bodmi z P obsahuje aspoň jeden bod z P vo vnútornom päťuholníku určenom uhlopriečkami päťuholníka Q.

Riešenie



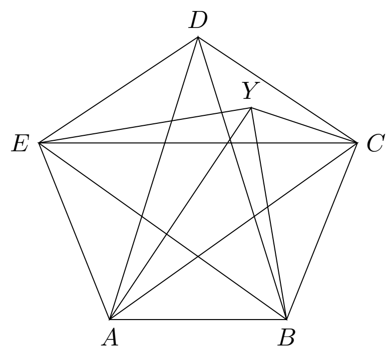
Úlohu budeme dokazovať sporom. Pre spor predpokladajme, že Q je najmenší päťuholník s vrcholmi z P taký, že vo vnútri jeho uhlopriečkami určeného päťuholníka sa už žiaden bod nenachádza.

Uvedomme si, že ak takéto päťuholníky niekde existujú, vieme vždy nájsť najmenší takýto päťuholník, keďže množina P je konečná. V prípade, že body množiny P nevytvárajú žiaden konvexný päťuholník alebo všetky konvexné päťuholníky majú vo svojom vnútornom päťuholníku nejaký bod, nepotrebujeme nič dokazovať.



Tento päťuholník sme si rozdelili na 3 oblasti, X, Y a Z, pričom predpokladáme, že v oblasti Z sa žiaden bod nenachádza. Keďže v každom konvexnom päťuholníku musí ležať aspoň jeden bod, pozrime sa na prípady, v ktorých leží aspoň jeden bod v oblasti X (bez ujmy na všeobecnosti nech je to v trojuholníku ECD).

Potom tento bod určite vytvorí konvexný päťuholník s bodmi C, B, A a E. Jeho vnútorný päťuholník bude vo vnútri Z a nakoľko predpokladáme, že v Z žiaden bod nie je, nebude ani v tomto vnútornom päťuholníku. To je ale spor s naším predpokladom, keďže tento nový päťuholník je menší ako $ABCDE$. Preto v oblastiach X žiaden bod nebude.



Teraz sa pozrime na možnosti, v ktorých sa aspoň jeden bod nachádza v oblasti Y (BUNV nech je to napravo od predchádzajúcej oblasti X). Opäť, vznikol nám nový päťuholník $YCBAE$, ktorého vnútorný päťuholník je súčasťou oblastí X a Z. Avšak obe tieto oblasti neobsahujú žiadne body, ako sme si už ukázali, a preto ani vnútorný päťuholník $YCBAE$ neobsahuje žiaden bod. Opäť sme získali spor s naším predpokladom, keďže tento päťuholník je menší než $ABCDE$.

Ukázali sme, že ak existujú v množine P nejaké konvexné päťuholníky s prázdnym vnútorným päťuholníkom, tak najmenší z nich nemôže obsahovať v sebe žiaden bod. To je ale spor so zadaním, a preto každý každý konvexný päťuholník musí vo svojom vnútornom päťuholníku obsahovať aspoň jeden bod.

Iné riešenie

podľa Vaška Janáčka: Označme p počet bodov v množine P. Budeme dokazovať, že na to, aby P spĺňala požadované vlastnosti, musí byť $p < 5$.

Použijeme dôkaz sporom, preto predpokladajme, že $p \geq 5$. Potom vieme vybrať ľubovoľných 5 bodov a bude platiť, že vo vnútri ich konvexného obalu sa nachádza ďalší bod. Taktiež vieme, že aspoň jeden bod leží na okraji konvexného obalu.

Môžeme preto vybrať ďalšiu päticu bodov tak, že vynecháme jeden bod zo starej pätice, ktorý sa nachádzal na okraji ich konvexného obalu, a pridáme ten ďalší bod, ktorý bol vo vnútri tohoto obalu. Postup môžeme opakovať - stále vynecháme jeden bod z okraja a pridáme jeden bod z vnútra. Nový konvexný obal bude stále rovnaký alebo menší ako predchádzajúci. Taktiež platí, že nevieme jeden bod pridať viac než raz, keďže stále vyberáme zvnútra konvexného obalu. Po $p-5$ opakovaniach máme $p-5$ bodov, ktoré sú na hranici alebo mimo konvexného obalu zvyšnej pätice bodov. Keďže bodov je dokopy p, vnútri tohoto konvexného obalu sa už žiaden ďalší bod okrem týchto piatich nachádzať nemôže. Dostali sme spor.

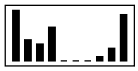
To znamená, že $p < 5$, neexistuje teda žiaden konvexný päťuholník a zadanie platí triviálne.

Komentár

Táto úloha bola pomerne jednoduchá, ak vás napadlo zobrať si najmenší 5-uholník, ktorý nespĺňa zadanie, hoci mnohí ste zabudli ukázať, že taký naozaj existuje, čo platí len kvôli konečnosti P. Následné rozobratie možností, kde sa môže vnútorný bod nachádzať ste väčšinou zvládli. Pri dôkaze sporom je obzvlášť potrebné dávať pozor na to, čo predpokladáte, lebo mnohí ste prehlásili dôkaz za hotový aj napriek tomu, že ste k žiadnemu sporu neprišli.

3.

Opravovali: **Martin Masrna a Mimi Hanus**
Počet riešení: 44



Do školy chodí niekoľko chlapcov a dievčat. Existuje kladné celé číslo $k \geq 2$ také, že každý chlapec sa rozpráva s práve k dievčatami a každé dievča sa rozpráva s práve k chlapcami, pričom rozprávanie sa je vzájomné a chlapci ani dievčatá sa medzi sebou nerozprávajú. Keď sa žiak dozvie klebetu, povie ju všetkým žiakom, s ktorými sa rozpráva, a ak sú v škole všetci, dozvie sa každú klebetu každý. Dano, ktorý je jeden zo žiakov, dnes jediný neprišiel do školy. Ukážte, že aj tak sa klebeta od ľubovoľného žiaka v škole dostane ku každému inému žiakovi v škole.

Riešenie

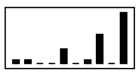
Bez ujmy na všeobecnosti nech Dano je chlapec. Predpokladajme, že od nejakého žiaka A sa v Danovej neprítomnosti nedostane klebeta k žiakovi B. Označme c počet chlapcov, ktorí sa dozvedia klebetu, a d počet takých dievčat (tam niekde je započítaný aj žiak A). Chlapci, čo sa dopočuli klebetu, majú spolu ck kontaktov s dievčatami (nie nutne rôznymi), a to všetko z prvej skupiny. Tie zas sa rozprávajú iba s týmito chlapcami, takže s nimi tvoria tých istých ck rozprávajúcich sa párov. Pôvodne však so všetkými chlapcami mali dk kontaktov. Danovou absenciou prišli iba o kontakt s Danom, teda z týchto dievčat sa $dk-ck$ rozprávalo s Danom, čo je počet deliteľný k. Dano sa pritom rozprával iba s k dievčatami, takže sa musel rozprávať buď s k, alebo s 0 dievčatami tejto skupiny. Ak s 0, tak by sa k Danovi nedostala klebeta, keby bol v škole, keďže akékoľvek iné dievčatá sa ju môžu dozvedieť iba vďaka nemu, čo je spor. Ak sa rozprával s k z nich, nerozprával sa s inými, čiže ani v jeho prítomnosti by sa do druhej skupiny dievčat klebeta nedostala. To znamená, že druhá skupina dievčat musí byť prázdna, ale potom nemôže jestvovať žiak B (dievča byť nemôže a ako chlapec sa nemá s kým rozprávať). V každom prípade sme dospeli k sporu, nuž náš predpoklad bol nepravdivý a aj naďalej sa od kohokoľvek rozšíri klebeta k všetkým.

Komentár

Úlohu ste sa snažili riešiť rôznymi spôsobmi. Tí z vás, ktorí ju riešili cez deliteľnosť k, väčšinou nemali problém. Ďalší ju riešili pomocou grafu a rôznych úvah, často ste ale zabúdali vysvetľovať, prečo vaše tvrdenia platia. No a najhoršie dopadli tí z vás, ktorí si povedali, že najprv žiakov rozdelia na dve skupiny, a potom medzi nimi presúvali „rozprávanie sa". Pri dôkaze sporom je dôležité dať si pozor na to, aby ste sporovali iba tvrdenie, ktoré máte dokázať, a nie samotné podmienky zo zadania.

4.

Opravovali: **Peťo Kovács a Erik Berta**
Počet riešení: 29



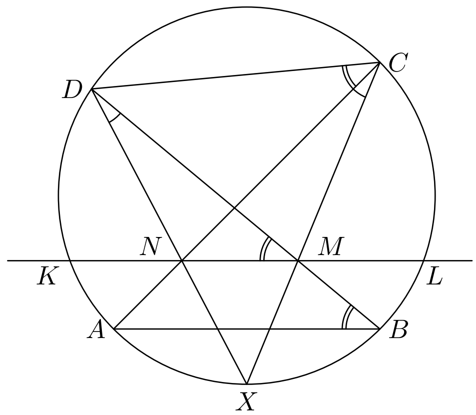
Na kružnici k ležia postupne body A, X, B, C a D, pričom $|AX| = |BX|$. Nech M je priesečník priamok XC a BD a nech N je priesečník XD a AC. Ďalej nech K a L sú body, v ktorých priamka MN pretína kružnicu k. Dokážte, že $|KX| = |LX|$.

Riešenie

Najprv ukážeme, že priamka KL je rovnobežná s priamkou AB. $|\sphericalangle ACX| = |\sphericalangle XDB|$, pretože ide o uhly nad tetivami rovnakej dĺžky. Uvedomme si, že $\sphericalangle NCM$ a $\sphericalangle ACX$ sú totožné, rovnako ako $\sphericalangle NDM$ a $\sphericalangle XDB$. Všimnime si teda, že uhly $\sphericalangle NDM$ a $\sphericalangle NCM$ sú rovnako veľké a ležia nad úsečkou NM, a teda $NMCD$ je tetivový štvoruholník.

Keďže body M, N, C a D ležia na kružnici tak $|\sphericalangle NMD| = |\sphericalangle NCD|$. Ďalej keďže body A, B, C a D ležia na kružnici platí $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ABD|$. Dostávame teda:

$$|\sphericalangle NMD| = |\sphericalangle NCD| = |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ABD|$$



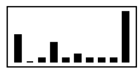
Môžeme si teda všimnúť, že priamky KL a AB zvierajú rovnaký uhol s ich priečkou DB, a preto sú rovnobežné. Ostáva ukázať, že $|KX| = |LX|$.
Majme priamku o kolmú na úsečku AB prechádzajúcu bodom X. Zjavne je o os tetivy AB, a teda prechádza stredom kružnice k. Z rovnobežnosti KL a AB vieme, že o je kolmá aj na KL. Keďže o je kolmica na tetivu KL prechádzajúca stredom kružnice, musí byť zároveň jej osou. A keďže X leží na osi KL, musí $|KX| = |LX|$.

Komentár

Dostali sme viacero rôznych riešení úlohy. Vzorové riešenie popisuje najstručnejšie riešenie, na ktoré netreba žiaden špeciálny aparát. Jeden z ďalších spôsobov využíval prenášanie dĺžok oblúkov na kružnici. Úloha sa dala riešiť aj pomocou Pascalovej vety, alebo pomocout shooting lemma. Častou chybou bolo, že riešenie končilo pri skonštatovaní, že KL a AB sú rovnobežné, čo ale triviálne neimplikuje to, čo bolo potrebné dokázať.

5.

Opravovali: **Žanetka Semanišinová a Kubo Genči**
Počet riešení: 32



Majme kladné reálne čísla x, y, z, pre ktoré platí: $x + y + z \leq 4$ a $xy + yz + zx \geq 4$. Ukážte, že aspoň 2 z nerovností $|x - y| \leq 2$, $|y - z| \leq 2$, $|z - x| \leq 2$ platia.

Riešenie

Najprv si označme nerovnosti zo zadania:

$$x + y + z \leq 4 \tag{1}$$

$$xy + yz + zx \geq 4 \tag{2}$$

Teraz urobíme viacero úprav. Nerovnosť (1) umocníme na druhú (čo môžeme, keďže x, y, z sú kladné) a následne vynásobíme 2. Nerovnosť (2) vynásobíme číslom -6. Dostávame:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 4yz + 4zy \leq 32$$

$$-6xy - 6yz - 6zx \leq -24$$

Tieto dve nerovnosti sčítame a po úpravách dostávame:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \leq 8$$

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \leq 8 \tag{3}$$

Tri nerovnosti s absolútnou hodnotou zo zadania môžeme taktiež umocniť, keďže obe strany sú kladné. Dostaneme tak:

$$(x - y)^2 \leq 4$$

$$(y - z)^2 \leq 4$$

$$(z - x)^2 \leq 4$$

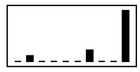
Teraz si už len rozmyslíme, že aspoň dve z týchto nerovností platia. Tento krok urobíme sporom. Predpokladajme teda, že platí nanajvýš jedna z týchto nerovností. Potom by súčet niektorých dvoch členov na pravej strane nerovnosti (3) bol väčší ako 8, čo je spor s nerovnosťou (3). Preto aspoň dve z nerovností $|x - y| \leq 2$, $|y - z| \leq 2$, $|z - x| \leq 2$ platia.

Komentár

Mnohí z vás sa s úlohou popasovali ako vo vzoráku a našlo aj zopár možno trochu menej elegantných, ale za to intuitívnejších riešení. Avšak veľmi časté nesprávne riešenie bolo také, ktoré sa snažilo ukázať, že v akomsi hraničnom prípade pre veľkosti čísel x, y, z je $xy + yz + zx = 4$ a pre prípady nevyhovujúce zadaniu už bude tento výraz menší než 4. Samotný hraničný prípad nie je ľahké popísať, väčšina z vás používala formulácie ako "najmenšie číslo väčšie ako 2", ktoré nefungujú (premyslite si prečo). Toto riešenie však má jeden zásadný problém. Je jedna vec povedať, že výraz $xy + yz + zx$ nadobúda najvyššiu hodnotu (pre fixný súčet $x + y + z$) v prípade, keď je $x = y = z$, a úplne iná vec, že tento výraz klesá spojito so zvyšujúcou sa vzdialenosťou jednotlivých čísel. Na dôkaz niečoho takého pravdepodobne väčšina z vás nemá aparát, aj opravovateľom by to dalo zabrať. Preto takéto riešenie nemôže získať veľa bodov. Och, a ešte jedna vec. STROM je súťaž jednotlivcov, svojho tímového ducha, prosím, prezentujte inde.

6.

Opravovali: **Timka Szöllősová a Kristín Mišlanová**
Počet riešení: 12

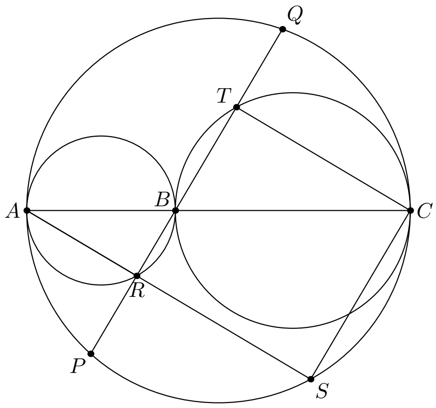


Na úsečke AC zvolíme ľubovoľne jej vnútorný bod B. Zostrojme postupne kružnice k_1, k_2, k nad priemermi AB, BC, AC. Bodom B veďme ľubovoľnú priamku p, ktorá pretína kružnicu k v bodoch P, Q a kružnice k_1, k_2 v bodoch R, T. Dokážte, že platí $|PR| = |QT|$.

Riešenie

Začnime tým, že si pridáme pomocný bod S – priesečník kružnice k a priamky AR.

Podľa Tálesovej vety vieme, že TC aj AS sú kolmé na PQ (keďže ARB je pravouhlý trojuholník nad priemerom AB a rovnako BTC nad BC) a SC je kolmé na AS (rovnako z Tálesovej vety je ASC pravouhlý trojuholník nad priemerom AC). To znamená, že štvoruholník $RSCT$ má tri pravé uhly, čiže musí mať aj štvrtý, a teda to je obdĺžnik.



Vezmime si teraz os úsečky SC. Keďže SC je tetiva, tak je podľa jej osi symetrický nielen obdĺžnik $RSCT$, ale aj celá kružnica k (to dostávame z toho, že os tetivy vždy prechádza stredom kružnice, a teda na nej leží priemer kružnice, pričom každá kružnica je symetrická podľa svojho ľubovoľného priemeru) – teda aj jej priesečníky s priamkou RT. Z toho vyplýva, že PR sa podľa tejto osi zobrazí na QT, a teda tieto úsečky majú rovnakú dĺžku.

Komentár

Ako môžete vidieť zo vzorového riešenia, táto úloha mala pri vhodnom uhle pohľadu pomerne jednoduché riešenie. Z toho si môžete vziať ponaučenie, že to, že úloha je označená ako šestka ešte neznamená, že sa tam nedá nájsť nejaká skratka.

Samozrejme úloha sa dala vyriešiť aj bez pomocných bodov (na ktoré väčšina z vás zrejme nie je zvyknutá), napríklad za pomoci systematického uhlenia – viacerí z vás použili práve tento osvedčený postup – síce bol zdĺhavejší, ale takmer všetci ste sa dostali k správnemu riešeniu.

Na záver by sme ešte chceli pochváliť všetkých, ktorí ste sa tejto úlohy nezľakli a pustili sa do nej tak, ako do každej inej :)

Autori vzorových riešení: Erik Berta, Viktória Brezinová, Martin Albert Gbúr, Matej Hanus, Patrik Paľovčík, Róbert Sabovčík, Timea Szöllősová

Zadania úloh zimného semestra 45. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na `seminar.strom.sk`*.*

2 Druhá séria

Termín odovzdania riešení: **16. novembra 2020**

1. Mihál má váhu, na ktorú dáva kladné celé čísla. Na začiatku má na každej strane nejaké kladné celé číslo. V každom kroku zvolí ďalšie kladné celé číslo, ktoré pripočíta k číslu na ľavej strane a ktorým vynásobí číslo na pravej strane. Mihál je šťastný, ak sú po nejakom počte krokov obe čísla rovnaké. Ukážte, že ak je na začiatku na pravej strane váhy číslo $a \geq 2$, tak vie Mihál dosiahnuť rovnosť čísel vykonaním nanajvýš $a - 1$ krokov.

2. Nájdite najmenšie reálne číslo p, pre ktoré pre ľubovoľnú dvojicu kladných reálnych čísel a, b platí

$$a + b - p\sqrt{ab} \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

3. Na stole je m modrých a z zelených kamienkov (m a z sú kladné celé čísla). Timka a Žanetka hrajú hru a striedajú sa v ťahoch, pričom Timka začína. Hráčka vo svojom ťahu odoberie k kamienkov jednej farby zo stola, pričom k musí byť deliteľ počtu kamienkov danej farby, ktoré sú pred začatím tohto ťahu na stole. Tá, ktorá zoberie posledný kamienok, vyhráva. Zistite, ktorá z nich má víťaznú stratégiu a popíšte ju.

4. Nech n je kladné celé číslo. *Obyčajný štvorec* rádu n je štvorec, v ktorom je v každom z n^2 políčok napísané nejaké číslo od 1 do n. *Stromácky štvorec* rádu n je obyčajný štvorec, v ktorom je v každom stĺpci a každom riadku každé číslo od 1 do n práve raz. Dva štvorce S_1 a S_2 rádu n sa *kamarátia*, ak platí, že pre každú dvojicu kladných celých čísel (a, b), $a, b \in \{1, \ldots, n\}$, nájdeme nejakú pozíciu (i, j), $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, v štvorci rádu n takú, že S_1 má na políčku na pozícii (i, j) číslo a a S_2 má na políčku (i, j) číslo b. Ukážte, že pre dané kladné celé čísla m a n platí: m stromáckych štvorcov rádu n takých, že sa každá dvojica kamaráti, existuje práve vtedy, keď existuje $m+2$ obyčajných štvorcov rádu n takých, že sa každá dvojica kamaráti.

5. Sú dané navzájom rôzne body A, B, C, D také, že uhly ACB a ADB sú pravé. Označme E priesečník priamok AC a BD a F priesečník priamok AD a BC. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ACF a ADE sa pretínajú na priamke AB.

6. Nájdite všetky dvojice reálnych funkcií l, r spĺňajúcich, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$l(x - y) = l(x)r(y) + l(y)r(x).$$

a) Úlohu vyriešte za predpokladu, že $l(0) \neq 0$.

b) Úlohu vyriešte za predpokladu, že $l(0) = 0$.

Poradie po 1. sérii zimného semestra 45. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1. - 2.	Lucia Chladná	Z9	GAMČABA	9	-	9	9	9	9	0	54
	Václav Janáček	S4	GJaroBR	9	9	9	9	9	9	1	54
3.	Lenka Hake	S4	GAlejKE	9	8	9	9	9	9	0	53
4.	Zdeněk Pezlar	S3	GJaroBR	9	9	9	9	5	9	0	50
5.	Veronika Chovancová	S2	PiarGTN	9	1	3	9	9	9	0	42
6. - 7.	Karin Eštoková	S2	GMRŠKE	8	-	2	7	9	9	0	37
	Csaba Daniel Farkaš	S3	SBGČesBA	5	-	9	7	7	9	0	37
8. - 9.	Adam Džavoronok	S2	GPoštKE	9	-	9	9	9	-	0	36
	Martin Kopčány	S2	GJChaBR	9	9	9	-	-	9	0	36
10.	Martin Andričík	S4	GPoštKE	9	4	9	7	6	-	0	35
11.	Erik Novák	S3	GPoštKE	8	8	1	7	9	-	0	33
12. - 14.	Ján Richnavský	S4	GPoštKE	9	-	-	9	9	-	0	27
	Timea Jakubócyová	S4	BGMHSuč	9	-	-	9	9	-	0	27
	Martin Šmilňák	S1	GAlejKE	9	-	9	-	0	-	-1	27
15. - 17.	Michaela Rusnáková	S4	GAlejKE	6	0	3	9	8	-	0	26
	Jakub Farbula	S4	GAlejKE	9	8	0	-	9	-	0	26
	Barbora Baltovičová	S1	GAlejKE	-	1	7	-	-	9	0	26
18.	Martin Kliment	S3	GPoštKE	9	-	9	7	-	-	0	25
19.	Peter Kochelka	S3	GJGTBB	9	-	0	9	5	-	0	23
20. - 22.	Michal Vorobel	S4	GJARMPO	9	-	3	9	-	-	0	21
	Bianka Gurská	S1	GPoštKE	3	-	0	9	0	-	-1	21
	Erik Jochman	S1	GAlejKE	5	-	8	-	-	-	0	21
23. - 24.	Oskar Hritz	S2	GPoštKE	5	-	3	7	3	1	0	20
	Dávid Kepič	S1	GAlejKE	9	-	2	-	-	-	0	20
25.	Anežka Kasalová	S2	MalGym	9	7	3	-	-	-	0	19
26. - 29.	Matúš Masrna	S3	GPoštKE	9	-	0	-	9	-	0	18
	Lujza Milotová	S4	GPoštKE	9	-	0	-	9	-	0	18
	Sara Gašparová	S2	GAMČABA	9	1	8	-	-	-	0	18
	David Belobrad	S4	GAMČABA	6	1	8	0	3	-	0	18
30. - 31.	Jakub Mičko	S4	GPoštKE	4	-	0	9	3	-	0	16
	Natália Čigašová	S2	GPoštKE	7	-	9	-	-	-	0	16
32. - 34.	Viliam Geffert	S2	GPoštKE	7	-	3	-	3	-	0	13
	Vladimír Sklenár	S1	GTVanSL	1	-	0	-	-	6	0	13
	Samuel Vaško	S2	GJHN3BA	7	-	0	4	2	-	0	13
35. - 39.	Adela Horváthová	S1	GPoštKE	4	-	0	4	0	-	-3	12
	Štefan Vašak	S2	GPoštKE	4	-	1	7	0	-	-2	12
	Miriam Horváthová	S2	GŠtúrMI	4	-	1	7	0	-	-2	12
	Viktor Imrišek	S2	GAMČABA	9	-	3	-	-	-	0	12
	Branislav Ječim	S1	GŠkolSN	-	-	-	-	-	6	0	12
40. - 45.	Radoslav Jochman	S3	GAlejKE	2	-	-	-	9	-	0	11
	Terézia Stanová	S1	EGJAKKE	2	-	1	4	0	-	-1	11
	Jakub Kulka	S2	GMRŠKE	7	-	3	1	-	-	0	11
	Ľubomír Vargovčík	S2	GPoštKE	9	-	2	-	0	-	-1	11
	Alex Blandón	S4	GPoštKE	4	-	0	4	3	-	-2	11
	Alex Gašparíková	S4	GAMČABA	5	-	2	-	4	-	0	11
46. - 47.	Adam Garafa	S3	GPoštKE	9	-	-	-	-	-	0	9
	Paulína Dujavová	S3	GJARMPO	-	-	0	9	-	-	0	9
48.	Klára Hricová	S4	GPoštKE	7	-	0	-	-	-	0	7
49.	Adriana Schmotzerová	S4	GPoštKE	-	-	-	6	-	-	0	6
50.	Ján Brajerčík	S1	GJARMPO	1	-	-	-	-	-	0	2
51.	Gabriela Genčiová	S4	GPoštKE	-	-	1	-	-	-	0	1

Názov:	Strom – korešpondenčný matematický seminár
	Číslo 2 • November 2020 • Zimný semester 45. ročníka (2020/2021)
Web:	`seminar.strom.sk`
E-mail:	`strom@strom.sk`
Riešenia:	Prijímame poštou, na webe a v prípade poruchy stránky na `riesenia.strom@strom.sk`
Vydáva:	Združenie Strom, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web:	`zdruzenie.strom.sk`
E-mail:	`info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk