Ahoj!

Je tu ďalší časopis STROMu, ktorý prináša vzorové riešenia druhej série. Okrem toho, že je posledný v tomto semestri, je výnimočný aj tým, že s ním prichádzajú aj pozvánky pre tých najlepších z vás. Tí sa môžu tešiť na odmenu vo forme týždňového netradičného sústredenia v obklopení skvelými účastníkmi a vedúcimi. Ak sa ti tam tentoraz nepodarilo dostať, nezúfaj. Pevne veríme, že nabudúce sa s tebou uvidíme!

STROMisti

2% z daní

Aj tento rok je možné venovať 2% (v niektorých prípadoch dokonca až 3%) daní verejnoprospešným organizáciám, ako sme my.

Peniaze získané z 2% v STROMe využívame na pokrytie časti nákladov spojených s aktivitami pre vás (kopírovanie časopisov, poštovné, ceny na súťažiach, aktivity na sústredeniach...).

Chceme vás preto poprosiť, aby ste rodičom, členom svojej blízkej aj vzdialenej rodiny, susedom a pokojne aj cudzím ľuďom na ulici porozprávali o našich aktivitách a poprosili ich, aby svojou troškou podporili našu dobrovoľnícku činnosť a pomohli tým skupine mladých cieľavedomých ľudí zabezpečujúcich chod týchto úžasných seminárov, ktoré tak zbožňujete. Porozprávajte im, čo pre vás znamená sústredenie, čo vám dáva riešenie úloh nášho seminára, a vysvetlite im, že takto podporia aj váš rozvoj a prispejú k zmysluplnému tráveniu vášho voľného času.

Potrebné informácie o tom, ako darovať 2%, nájdete na stránke `zdruzenie.strom.sk/sk/zdruzenie/2percenta/`. Radi vám zodpovieme ľubovoľné otázky ohľadom našej podpory aj na e-mailovej adrese `info@strom.sk`. Ďakujeme!

Tábor mladých matematikov

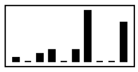
V termíne od 12. do 19. augusta 2022 sa udeje ten najlepší tábor tohoto roka – Tábor mladých matematikov! Bude sa konať na Chate Radzim pri Vyšnej Slanej. Všetky podrobné informácie nájdete v pozvánke na stránke `seminar.strom.sk/media/uploads/pozvankaucastniktmm2022.pdf`.

Pýtate sa, čo je Tábor mladých matematikov? Je to tábor určený pre budúcich siedmakov základných škôl až budúcich druhákov stredných škôl (a, samozrejme, prislúchajúce ročníky viacročných gymnázií). Program tábora pripomína obľúbené sústredenia, je však o dva dni dlhší, a preto o dva dni lepší!

Neváhajte pridlho, kapacita tábora je obmedzená. Tešíme sa na vás!

1.

Opravovali: **Lujza Milotová a Michal Masrna**
Počet riešení: 32 Najkrajšie riešenia: **Richard Vodička a Martin Šmilňák**



Cifry prirodzeného čísla sme preusporiadali a číslo, ktoré vzniklo, sme pripočítali k pôvodnému.

a) Dokážte, že sme nemohli dostať ako výsledok číslo pozostávajúce z 999 deviatok.

b) Dokážte, že ak nám vyšiel výsledok 10^{10}, tak pôvodné číslo bolo deliteľné desiatimi.

Riešenie

a) Pozrime sa na cifru na mieste jednotiek výsledného súčtu. Sčítaním dvoch cifier môžeme dostať najviac 9+9=18. Keďže je to cifra najnižšieho rádu, nemohol tu nastať žiaden prechod z nižšieho rádu. Preto nemôžeme dostať súčet 19. Takže vieme, že súčet cifier na mieste jednotiek je 9. Na mieste desiatok musíme dostať tiež cifru 9, a keďže na mieste jednotiek nedošlo k prechodu cez desiatky, tak ju opäť môžeme dostať iba ako súčet rovný 9, nie 19. Takto to bude platiť pri každom sčítaní až po poslednú cifru výsledného čísla. Keďže pri sčítaní nikdy nedošlo k prechodu do vyššieho rádu, tak súčet cifier na rovnakých pozíciách je vždy 9.

9 je nepárne číslo, teda ho môžeme dostať iba ako súčet jednej párnej a jednej nepárnej cifry. Dokopy teda budeme sčítať 999 párnych a 999 nepárnych cifier. Keďže oba sčítance majú rovnaké cifry, tak majú rovnaký počet párnych aj nepárnych cifier. Teda oba sčítance dovedna musia mať párny počet párnych cifier a párny počet nepárnych cifier. To je spor s tým, že by ich malo byť 999.

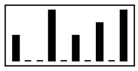
b) Ak by pôvodné číslo nebolo deliteľné desiatimi, tak by posledná cifra nebola 0. Súčet na mieste jednotiek vo výslednom čísle teda nemôžeme dostať ako 0+0=0, ale musíme dostať súčet rovný 10. Ten dostaneme ako súčet dvoch párnych alebo dvoch nepárnych cifier. Keďže došlo k prechodu cez desiatky, tak na mieste desiatok vo výslednom čísle tiež nemôžeme dostať súčet 0, musíme dostať súčet 10. To dostaneme ako súčet dvoch cifier rovný 9 (19 tu zo sčítania dvoch cifier dostať nemôžeme) plus 1 z prechodu z nižšieho rádu. 9 dostaneme ako súčet párneho a nepárneho čísla. Takto to bude platiť pri každom sčítaní až po cifru najvyššieho rádu výsledného čísla. Budeme teda deväťkrát sčítavať párnu a nepárnu cifru a raz dvojicu párnych alebo dvojicu nepárnych cifier. To je dokopy nepárny počet párnych a nepárny počet nepárnych cifier. Opäť sčítavame dve čísla s rovnakými ciframi, čiže dokopy by sme mali sčítavať párne počty párnych aj nepárnych cifier. To je spor, a teda pôvodné číslo muselo mať na mieste jednotiek 0, a teda byť deliteľné 10.

Komentár

Mnohým z vás sme museli strhnúť pár bodov za to, že ste neuvážili, resp. nedostatočne vysvetlili, prečo sa nemôže stať, že niekde by sme výslednú 9 dostali ako súčet dvoch deviatok a prechodu z nižšieho rádu. Okrem toho boli však riešenia pekné a nápadité.

2.

Opravovali: **Mimi Hanus a Martin Masrna**
Počet riešení: 15 Najkrajšie riešenie: **Simon Omaník**



Majme funkciu f definovanú na nezáporných celých číslach s hodnotami v množine celých čísel spĺňajúcu:

$$f(n) = \begin{cases} -f\left(\dfrac{n}{2}\right) & \text{ak } n \text{ je párne,} \\ f(n-1)+1 & \text{ak } n \text{ je nepárne.} \end{cases}$$

Nájdite najmenšie nezáporné celé číslo n, pre ktoré je $f(n) = 2022$.

Riešenie

Každé nezáporné celé číslo dáva po delení štyrmi zvyšok 0, 1, 2 alebo 3.

$$\begin{aligned} f(4m) &= -f(2m) = -(-f(m)) = f(m) \\ f(4m+1) &= f(4m)+1 = f(m)+1 \\ f(4m+2) &= -f(2m+1) = -(f(2m)+1) = -(-f(m)+1) = f(m)-1 \\ f(4m+3) &= f(4m+2)+1 = f(m)-1+1 = f(m) \end{aligned}$$

Majme argument zapísaný vo štvorkovej sústave. Vidíme, že pripísaním na koniec nuly alebo trojky sa funkčná hodnota nezmení, pripísaním jednotky sa zvýši o 1 a pripísaním dvojky sa o 1 zníži. Každé celé nezáporné číslo vieme dostať z nuly pripisovaním cifier na koniec práve jedným spôsobom a $f(0) = -f(0)$, takže $f(0) = 0$. Z toho plynie, že $f(n)$ je rozdiel počtu jednotiek a dvojok v štvorkovom zápise n. Zjavne najnižšie číslo, pre ktoré je tento rozdiel 2022, je číslo pozostávajúce z 2022 jednotiek a žiadnych iných cifier, ktoré má hodnotu

$$\sum_{k=0}^{2021} 1 \cdot 4^k = \frac{4^{2022} - 1}{3}.$$

Iné riešenie

Všimnime si, že $f(0) = -f(0)$, čiže $f(0) = 0$. Ďalej $f(4k+1) = f(4k) + 1 = -f(2k) + 1 = -(-f(k)) + 1 = f(k) + 1$, z čoho vyplýva, že f postupne nadobudne všetky celé nezáporné hodnoty. Preto pre každé celé nezáporné k definujme a_k ako najmenšie celé nezáporné číslo, ktorého obrazom v f je k.

Budeme chcieť dokázať nasledovné tvrdenie: $\forall k \in \mathbb{N}_0 \colon a_k = (4^k - 1)/3 \land \forall x \in \mathbb{N}_0 \colon x < a_k \implies |f(x)| < k$. Toto tvrdenie dokážeme indukciou podľa k.

Pre $k = 0$ má v prvej časti $a_0 = (4^0 - 1)/3 = 0$, čo je pravda, lebo $f(0) = 0$ a menší obraz nuly existovať nemôže. Druhá časť tvrdenia pre všetky x menšie ako $a_0 = 0$ zjavne platí, keďže také x neexistujú.

Predpokladajme platnosť tvrdenia pre nejaké k. Z tohto predpokladu vždy, keď $x < a_k$, $f(x) \in \{-k+1, -k+2, \ldots, k-1\}$.
Keď $x < 2a_k$ a x je párne, tak $f(x) = -f(x/2) \in \{-k+1, \ldots, k-1\}$, lebo $x/2 < a_k$.
Keď $x < 2a_k$ a x je nepárne, $f(x) = f(x-1) + 1 \in \{-k+2, \ldots, k\}$.
Dokopy takto vždy, keď $x < 2a_k$, $f(x) \in \{-k+1, \ldots, k\}$.
Keď $x < 4a_k$ a x je párne, $f(x) = -f(x/2) \in \{-k, \ldots, k-1\}$, pretože $x/2 < 2a_k$.
Keď $x < 4a_k$ a x je nepárne, $f(x) = f(x-1) + 1 \in \{-k+1, \ldots, k\}$.
Napokon $f(4a_k) = -f(2a_k) = -(-f(a_k)) = f(a_k) = k$, takže $-k \leq f(x) \leq k$ pre všetky x nepresahujúce $4a_k$.
Ale $f(4a_k + 1) = f(4a_k) + 1 = k + 1$, teda $a_{k+1} = 4a_k + 1 = 4(4^k - 1)/3 + 1 = (4^{k+1} - 1)/3$. Zároveň v predpredchádzajúcej vete sme vyvodili, že $|f(x)| \leq k < k+1$ pre všetky x nepresahujúce $4a_k = a_{k+1} - 1$, čím sme dokázali tvrdenie pre $k+1$.

Výsledok je $n = a_{2022} = (4^{2022} - 1)/3$.

Komentár

Na správnu odpoveď prišla väčšina z tých, ktorí sa do úlohy pustili. Trochu horšie to už bolo s dokazovaním toho, že táto odpoveď je správna. Niekoľkí z vás totižto iba vypísali niekoľko prvých funkčných hodnôt a následne „odpozorovali“, že $f((4^k - 1)/3) = k$. Bolo potrebné dokázať, že tento vzťah bude platiť pre všetky k (povedať „vidíme, že to platí pre prvé tri hodnoty,“ rozhodne nestačí). Avšak podstatnejšia časť úlohy bola, že toto n je naozaj minimálne. Táto časť robila mnohým z vás problémy, niektorí ju úplne ignorovali, napriek tomu sme radi, že správne riešenia boli všetky pekné a navzájom rôznorodé. Na záver ešte komentár k vzorovým riešeniam – prvé je na ukázanie, že úloha sa dala vyriešiť veľmi pekne pomocou zápisu vo štvorkovej sústave. Druhé je naopak na ukážku toho, že na jej vyriešenie nebol potrebný tento trik, a stačila štandardná indukcia.

3.

Opravovala: **Kristín Mišlanová**
Počet riešení: 13 Najkrajšie riešenie: **Richard Vodička**

Kladné celé číslo n zafarbíme načerveno, ak ho vieme zapísať ako $n = a_1 + a_2 + ... + a_k$, kde k a všetky a_i sú kladné celé čísla a $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1$. Ak viete, že všetky čísla od 33 po 73 sú zafarbené načerveno, dokážte, že aj všetky čísla väčšie ako 73 už musia byť červené.

Riešenie

Najprv ukážeme, že ak n je červené číslo, tak aj čísla $2n + 2$ a $2n + 9$ sú nutne červené. Keď n je červené číslo, tak existujú nejaké a_1 až a_k také, že $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ a zároveň $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1$.

Potom:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1,$$
$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + ... + \frac{1}{2a_k} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + ... + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{2} = 1.$$

Z toho podľa zadania vyplýva, že aj číslo $2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_k + 2 = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + 2 = 2n + 2$ je červené.

Obdobne aj:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1,$$
$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + ... + \frac{1}{2a_k} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + ... + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1,$$

z čoho vidíme, že aj číslo $2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_k + 3 + 6 = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + 9 = 2n + 9$ je červené.

Teraz pomocou toho dokážeme, že pre ľubovoľné $n \geq 74$ platí, že ak čísla od 33 po $n - 1$ sú všetky červené, tak aj n bude červené. Vďaka tomu potom vieme povedať, že postupne všetky čísla väčšie ako 73 budú červené.

- Ak n je párne, vieme ho zapísať v tvare $n = 2k + 2$. Ak ukážeme, že k je červené, tak potom nutne podľa vyššie dokázaného aj n bude červené. Vieme, že k je menšie ako n a zároveň $k = (n - 2)/2 \geq (74 - 2)/2 = 36$. Keďže predpokladáme, že všetky čísla od 33 po $n - 1$ sú červené, tak k je červené.
- Ak n je nepárne (môžeme predpokladať, že $n \geq 75$), tak ho vieme zapísať v tvare $n = 2k + 9$. Ak ukážeme, že k je červené, tak potom nutne podľa vyššie dokázaného aj n bude červené. Vieme, že k je menšie ako n a zároveň $k = (n - 9)/2 \geq (75 - 9)/2 = 33$. Keďže predpokladáme, že všetky čísla od 33 po $n - 1$ sú červené, tak k je červené.

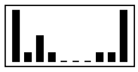
Každé $n \geq 74$ je podľa toho, či je párne, alebo nepárne, v tvare $2k + 2$ alebo $2k + 9$, kde číslo k už je červené (dokázali sme to v nejakom predchádzajúcom kroku, keďže prechádzame čísla postupne), odkiaľ aj n bude červené.

Komentár

Väčšina z vás, ktorí ste sa do úlohy pustili, ste ju aj vyriešili správne a myšlienkovo obdobne ako vo vzorovom riešení. Našli sa však aj takí, ktorí úlohu vyriešili pomocou toho, že ukázali, že ak n je červené, tak potom čísla $2n + 8$ a $2n + 9$ budú červené. To viedlo tiež k veľmi peknému riešeniu, keďže potom s postupným zvyšovaním n vieme vďaka tejto vlastnosti vytvárať zaradom všetky väčšie čísla.

4.

Opravovali: **Maťo Gbúr a Paťo Paľovčík**
Počet riešení: 19 Najkrajšie riešenie: **Simon Omaník**



V rovine máme konvexný $3n - 1$ uholník, kde $n \geq 2$ je kladné celé číslo. Každú úsečku medzi dvoma jeho vrcholmi zafarbíme buď namodro, alebo načerveno. Ukážte, že existuje n disjunktných (nemôžu zdieľať žiaden bod) modrých alebo červených úsečiek.

Riešenie

Túto úlohu budeme riešiť matematickou indukciou.

Najprv ukážeme, že dané tvrdenie platí pre $n = 2$, teda konvexný päťuholník $ABCDE$. Bez ujmy na všeobecnosti si môžeme hranu AB ofarbiť červenou farbou. Ďalej sa snažme ofarbovať hrany tak, aby nevznikli dve disjunktné hrany rovnakej farby, nuž ofarbime všetky hrany disjunktné s AB – CD, DE aj CE – modrou farbou.

Rovnako postupujeme aj pre hranu CD. Tá je modrá, takže AE a BE musia byť červené. Ostane nám však hrana BC, ktorá je disjunktná s červenou hranou AE aj modrou hranou DE. Preto určite existuje dvojica disjunktných hrán rovnakej farby.

Teraz dokážeme, že ak dané tvrdenie platí pre $(3n - 1)$-uholník, tak musí platiť aj pre $(3(n + 1) - 1)$-uholník, čiže $(3n + 2)$-uholník, v ktorom bude musieť podľa indukčného predpokladu byť $n + 1$ disjunktných úsečiek jednej farby.

Ak máme daný $(3n + 2)$-uholník, vezmime z neho ľubovoľné 3 pri sebe ležiace vrcholy. Keďže je daný útvar konvexný, tak zvyšné jeho vrcholy tvoria konvexný $(3n - 1)$-uholník, ktorý sa neprekrýva s trojuholníkom z troch odtrhnutých vrcholov. O tomto $(3n - 1)$-uholníku vieme z indukčného predpokladu, že v ňom je aspoň n disjunktných úsečiek jednej farby.

Bez ujmy na všeobecnosti si môžeme určiť, že je to červená. Ak by bola aspoň jedna z troch úsečiek v novovzniknutom trojuholníku červená, tak sa indukčný predpoklad potvrdí, keďže tieto 3 úsečky sú so zvyškom $(3n+2)$-uholníka disjunktné a budeme v ňom mať aspoň $n+1$ disjunktných úsečiek jednej farby. Musíme preto ošetriť prípad, keď sú všetky tieto 3 úsečky modré.

Označme si body po obvode útvaru A_1, až A_{3n+2} a uvažujme, že úsečky medzi bodmi A_1, A_2 a A_3 sú modré. Argument v predchádzajúcom odseku funguje pre hocijaké priľahlé 3 body na obvode, a tak aj A_2, A_3 a A_4 musia mať medzi sebou úsečky rovnakej farby (teraz si už nemôžeme bez ujmy na všeobecnosti povedať, či je to modrá, alebo červená). Čo ale povedať vieme, je, že úsečku A_2A_3 zdieľajú, a preto musia byť rovnako zafarbené namodro. Týmto spôsobom vieme postupne dokázať, že všetky takéto trojice musia byť ofarbené na modro, čiže všetky úsečky po obvode sú modré.

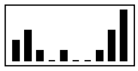
Teraz už len potrebujeme ukázať, že v $(3n+2)$-uholníku, v ktorom je celý obvod rovnakej farby, je $n+1$ disjunktných úsečiek rovnakej farby. Môžeme napríklad brať každú druhú úsečku po obvode. Pri párnom n teda chceme, aby $(3n+2)/2 \geq n+1$. Po ekvivalentnej úprave dostaneme $3n+2 \geq 2n+2$, čo pre každé $n \geq 1$ očividne platí. Pri nepárnom n by sme mohli zobrať len $(3n+1)/2$ úsečiek po obvode, čiže potrebujeme $(3n+1)/2 \geq n+1$. No to je opäť po úprave ekvivalentné s $n \geq 1$, čo platí. Týmto sme dokázali indukčný krok a následne aj tvrdenie zo zadania.

Komentár

Hneď niekoľko riešiteľov nesprávne pochopilo zadanie a ukazovalo, že každý konvexný $3n-1$-uholník sa dá ofarbiť tak, aby existovalo n disjunktných úsečiek rovnakej farby. Úlohou ale bolo dokázať, že to platí pre hocijaké ofarbenie. Druhou najčastejšou chybou bolo, že ste v induktívnom kroku ukazovali pre rôzne podmnožiny vrcholov daného $3n+2$-uholníka, že majú n disjunktných úsečiek rovnakej farby, no už ste neukázali, že pre každú podmnožinu je táto farba rovnaká. Zvyšok riešiteľov ale zvyčajne dospel k plnohodnotnému riešeniu.

5.

Opravovali: **Peťo Kovács a Viki Brezinová**
Počet riešení: 16 Najkrajšie riešenia: **Lucia Chladná, Martin Šmilňák**



Je daný pravý uhol AMB. Zostrojte rovnostranný trojuholník KLM tak, aby vzdialenosť K od priamky MA bola dvakrát väčšia ako vzdialenosť L od priamky BM. Svoju konštrukciu popíšte a zdôvodnite jej korektnosť.

Riešenie

Najprv popíšeme konštrukciu trojuholníka KLM a následne zdôvodníme, prečo nám vznikol rovnostranný trojuholník, ktorý spĺňa podmienku zo zadania.

Pri konštrukcii používame len pravítko s ryskou bez mierky a kružidlo, s ktorým vieme prenášať vzdialenosti.

1. Zostrojíme kolmicu p na priamku AM prechádzajúcu bodom A. Tým nám vznikne rovnobežka s priamkou BM vo vzdialenosti $|AM|$.

2. Na priamke BM vytvoríme bod C tak, že $|CM| = 2\cdot|AM|$ (dvakrát prenesieme vzdialenosť $|AM|$ kružidlom po priamke BM).

3. Zostrojíme kolmicu q na priamku CM prechádzajúcu bodom C. Tým nám vznikne rovnobežka s priamkou AM vo vzdialenosti $|CM| = 2 \cdot |AM|$.

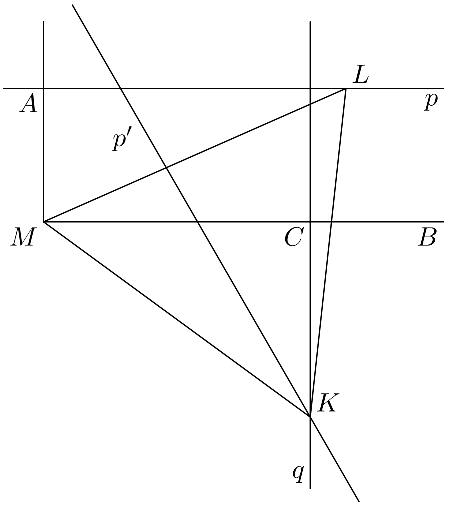
4. Zostrojíme priamku p', ktorá vznikne rotáciou priamky p okolo bodu M o $60°$ v zápornom smere. Konkrétne to zostrojíme takto: Na priamke p si zvolíme dva body X a Y. Následne zostrojíme kružnice s polomerom $|XM|$ so stredmi X a M a ich priesečník v zápornom smere označíme X'. X' vznikol rotáciou X okolo bodu M o $60°$, lebo $XX'M$ je rovnostranný trojuholník. Rovnako zostrojíme Y' rotáciou Y okolo bodu M o $60°$ v zápornom smere. Priamka $X'Y'$ je naša hľadaná priamka p'.

5. Priesečník p' s priamkou q označíme K.

6. Bod L vznikne rotáciou bodu K okolo bodu M o $60°$ v kladnom smere (zostrojíme kružnice s polomerom $|KM|$ so stredmi K a M, bod L je priesečník kružníc).

7. Vznikol nám trojuholník KLM.

Premyslime si, prečo sme bod K skonštruovali práve takto. Nech bod L leží na p. Potom bod K musí ležať na q (aby bol v dvojnásobnej vzdialenosti) a taktiež musí ležať na p', aby zvieral s bodom L uhol 60°. K teda musí ležať v prieniku q a p'.



Vieme, že bod K z našej konštrukcie naozaj leží v prieniku q a p'. Stačí nám ukázať, že L leží na p.

Keďže K leží na p', je obrazom nejakého bodu na priamke p v rotácii okolo bodu M o 60° v zápornom smere. L vznikol rotáciou K okolo bodu M o 60° v kladnom smere, takže L musí ležať na priamke p.

Tým sme dokázali, že KLM spĺňa všetky podmienky zo zadania.

Na záver spravme diskusiu k možným polohám bodov K a L. Môžeme si uvedomiť, že týmto postupom sme zostrojili KLM v jednej možnej polohe pre fixnú vzdialenosť bodu K od priamky AM. Ak by sme vytvorili rovnobežky p a q aj v opačných polrovinách v rovnakých vzdialenostiach od AM, resp. BM a následne tieto dve možné priamky p rotovali v zápornom aj v kladnom smere (a tým dostali 4 možné priamky p'), tak by nám nakoniec vzniklo 8 možných bodov K (priesečníky všetkých priamok p' so všetkými možnými q). Ku každému z týchto 8 bodov K by sme zostrojili príslušný bod L, a teda by nám vznikol KLM vo 8 možných polohách.

Iné riešenie

Stručne naznačme iné riešenie. Predpokladajme, že body K a L sú vnútri uhla AMB.

Označme si pätu kolmice z bodu K na priamku AM P_1 a pätu kolmice z bodu L na priamku BM P_2.

Dostali sme pravouhlé trojuholníky KP_1M a LP_2M a zo zadania vieme, že $|KP_1| = 2 \cdot |LP_2|$. Keďže $|\sphericalangle KML| = 60°$, tak $|\sphericalangle KMP_1| + |\sphericalangle LMP_2| = 30°$. Označme uhol LMP_2 α a KMP_1 $30° - \alpha$. Keď si vyjadríme sínus uhla α z trojuholníka LMP_2 a sínus uhla $30° - \alpha$ z trojuholníka KMP_1 a porovnáme ich, dostaneme, že $2 \cdot \sin\alpha = \sin(30° - \alpha)$.

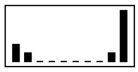
Z toho si goniometrickými úpravami vieme vyjadriť, že $\tan\alpha = \frac{1}{4+\sqrt{3}}$. Skonštruovať uhol α vieme tak, že skonštruujeme pravouhlý trojuholník s odvesnami 1 a $4 + \sqrt{3}$. Skonštruovať $\sqrt{3}$ vieme pomocou pravouhlých trojuholníkov (pravouhlý trojuholník s odvesnami 1 a 1 má preponu dĺžky $\sqrt{2}$ a pravouhlý trojuholník s odvesnami 1 a $\sqrt{2}$ má preponu dĺžky $\sqrt{3}$).

Keďže vieme skonštruovať uhol α, dokončiť celú konštrukciu je už jednoduché.

Komentár

Na začiatok spomeňme, že v konštrukčných úlohách sa nemôžu rysovať úsečky konkrétnej vzdialenosti alebo uhly konkrétnej veľkosti pomocou uhlomera. Viacerí z vás nesprávne predpokladali, že ak je K dvakrát ďalej od AM ako L od BM, tak aj uhly pri K a L budú v tomto pomere, čo neplatí. V našom druhom riešení môžete vidieť, ako sa dala vyjadriť veľkosť uhla pri L. Body sme strhli aj, keď niekto nepopísal konštrukciu rotácie o 60 stupňov alebo zostrojenie 30 stupňového uhla, keďže tieto konštrukcie nie sú úplne triviálne. Úloha sa dala vyriešiť aj otočením bodu L o 90 stupňov okolo M, čo bolo nami pôvodne zamýšľané riešenie. Vzorové riešenie však uvádza dve iné riešenia, ktoré vychádzajú z riešení riešiteľov, nakoľko nám pripadali intuitívnejšie.

6. Opravovali: **Dano Onduš a Robo Sabovčík**
Počet riešení: 10 Najkrajšie riešenie: **Dominik Rigasz**



Nájdite všetky nepárne kladné celé čísla m, pre ktoré postupnosť a_k, $k = 0, 1, \dots$, definovaná predpisom $a_0 = \frac{1}{2}(2m+1)$ a $a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor$ pre $k \geq 0$, obsahuje aspoň jedno celé číslo.

Riešenie

Ukážeme, že pre všetky m rôzne od 1, kde je postupnosť zjavne konštantná, postupnosť obsahuje aspoň jedno celé číslo.

Po úprave vidíme, že $a_0 = m + \frac{1}{2}$, z čoho $a_1 = (m + \frac{1}{2}) \cdot m$, čo má ako necelú časť opäť polovicu. Následne aj pre a_2 platí, že ak má necelú časť, tak to musí byť $\frac{1}{2}$, keďže je súčinom celého čísla a čísla s necelou časťou $\frac{1}{2}$. Je zjavné, že toto musí platiť pre všetky čísla v tejto postupnosti, takže postupnosť čísel $b_k = 2 \cdot a_k$ je celočíselná. Ak postupnosť obsahuje nejaké párne číslo, jeho polovica je celá.

Pre spor predpokladajme, že všetky b_k sú nepárne. To znamená, že existuje postupnosť celých čísel n_k, kde $k = 0, 1, \dots$, taká, že $b_k = 2n_k + 1$. Potom $a_k = n_k + \frac{1}{2}$, ďalej $a_{k+1} = (n_k + \frac{1}{2}) \cdot n_k$, teda $b_{k+1} = 2n_k^2 + n_k$. Môžeme si všimnúť, že nutne aj n musí byť postupnosť kladných nepárnych čísel, inak by a_{k+1} bolo celé. Preto je $n_k - 1$ párne a, keďže má $b_{k+1} = 2n_{k+1} + 1$ a vyššie sme ukázali, že $b_{k+1} = 2n_k^2 + n_k$, dostávame, že $n_{k+1} = n_k^2 + \frac{n_k - 1}{2}$. Po odčítaní jednotky to ešte vieme upraviť a $n_{k+1} - 1 = (n_k - 1)(n_k + 1) + \frac{n_k - 1}{2}$.

Označme $v_2(n)$ najvyššiu mocninu dvojky, ktorá delí číslo n. Za predpokladu, že $n_k > 1$, $v_2(n_k - 1) > v_2(n_{k+1} - 1)$, keďže $(n_k - 1)(n_k + 1)$ je deliteľné touto mocninou, ale $\frac{n_k - 1}{2}$ je deliteľné iba mocninou o 1 nižšou. Keďže $n_0 - 1$ je deliteľné iba nejakou konečnou mocninou dvojky, tak nutne dostaneme nejaké neceločíselné n_l, čo je spor. Ostal nám prípad, kde $n_k - 1 = 0$. V takom prípade ale $a_k = \frac{3}{2}$, čo je konštantná hodnota pre $m = 1$. Pre všetky ostatné m je postupnosť rastúca, takže túto hodnotu dosiahnuť nemôže.

Komentár

Vo väčšine prípadov ste úlohu vyriešili veľmi dobre a k výsledku ste sa dopracovali rôznymi originálnymi spôsobmi, čo nás teší. Jediné dve pripomienky, ktoré by sme mali, sa týkajú toho, ako píšete riešenia. Mnohí z vás preskakovali pomerne veľa krokov, čo viedlo k pomerne chaotických riešeniam. Taktiež si dávajte pozor na to, že ak používate nejaký netriviálny matematický nástroj (v tomto prípade p-valuáciu), tak vysvetlite, čo to vlastne je, a, ako ten nástroj funguje.

Konečné poradie letného semestra 46. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1. - 4.	Martin Kopčány	S3	GJChaBR	54	9	9	9	9	9	9	0	108
	Veronika Chovancová	S3	PiarGTN	54	9	9	9	9	9	9	0	108
	Lucia Chladná	S1	GAMČABA	54	9	9	9	8	9	9	0	108
	Simon Omaník	S1	GAMČABA	54	9	9	9	9	7	9	0	108
5.	Richard Vodička	S1	GAlejKE	43	9	-	9	9	-	8	0	87
6.	Michal Iľkovič	S1	GSMTŠPO	35	9	-	9	-	8	-	0	70
7.	Dominik Rigasz	S1	GJHN3BA	54	-	3	-	-	-	9	0	69
8.	Matúš Libák	S1	GAlejKE	35	6	7	9	2	-	-	0	66
9.	Adam Džavoronok	S3	GPoštKE	52	-	-	-	-	-	9	0	61
10.	Anna Podmanická	S1	GVaršZA	40	6	7	-	0	0	1	0	60
11.	Michal Almáši	S3	GPMláKE	36	9	5	-	-	9	0	0	59
12.	Veronika Vodičková	S1	GAlejKE	31	6	-	7	7	-	-	0	58
13.	Alica Cimráková	S1	BGMHSuč	36	6	-	9	0	-	-	0	57
14.	Martin Šmilňák	S2	GAlejKE	29	9	-	-	9	8	-	0	55
15.	Maxima Anna Alžbeta Bednarčíková	S1	GAlejKE	27	6	-	-	9	-	-	0	48
16.	Viera Glevitzká	S3	GVBNPD	27	6	5	-	-	9	-	0	47
17. - 18.	Oliver Seman	Z9	GAlejKE	27	6	7	-	-	-	-	0	46
	Oskar Hritz	S3	GPoštKE	28	9	-	9	-	-	-	0	46
19. - 20.	Michal Pecho	S4	SPDubNV	45	-	-	-	-	-	-	0	45
	Ondrej Králik	S1	GAlejKE	41	4	-	-	-	-	-	0	45
21.	Marek Horváth	S1	GKonšPO	31	6	3	-	-	-	-	0	43
22.	Martin Dudjak	S1	SMládPP	27	6	3	-	-	1	-	0	40

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
23.	Tomáš Kubrický	S1	GPoštKE	28	9	-	-	-	-	-	0	37
24.	Karin Eštoková	S3	GMRŠKE	36	-	-	-	-	-	-	0	36
25.	Katarína Farbulová	S1	GPoštKE	27	5	-	-	-	1	-	0	34
26. - 27.	Bianka Gurská	S2	GPoštKE	27	6	-	-	-	-	-	0	33
	Natália Čigašová	S3	GPoštKE	33	-	-	-	-	-	-	0	33
28.	Vladimír Jančár	S3	GPHM1MI	32	-	-	-	-	-	-	0	32
29. - 30.	Natália Tkáčová	Z9	ZLevoSN	14	3	0	-	2	8	-	0	30
	Natália Poliačiková	S1	GPoštKE	27	3	-	-	-	-	-	0	30
31.	Adela Horváthová	S2	GPoštKE	27	-	-	-	-	-	-	0	27
32.	Lukáš Lučanský	S4	GKo32TV	16	6	0	0	0	4	-	0	26
33.	Juraj Kramár	S1	GAlejKE	6	5	-	6	3	-	-	0	25
34.	Branislav Ječim	S2	GŠkolSN	19	5	-	-	-	-	-	0	24
35. - 38.	Lucia Kleščová	S1	GPoštKE	22	-	-	-	-	-	-	0	22
	Terézia Stanová	S2	EGJAKKE	16	6	-	-	-	-	-	0	22
	Oskar Cacara	Z9	ZKro4KE	17	5	-	-	-	-	-	0	22
	Martin Janček	S3	SMládPP	13	6	3	-	-	-	-	0	22
39.	Andrej Znamenáček	S1	GAMČABA	19	-	-	-	-	-	-	0	19
40. - 41.	Ľubomír Vargovčík	S3	GPoštKE	18	-	-	-	-	-	-	0	18
	Katarína Gersová	S1	GJHN3BA	18	-	-	-	-	-	-	0	18
42. - 44.	Štefan Vašak	S3	GPoštKE	15	-	-	-	2	-	-	0	17
	Miriam Horváthová	S2	GŠtúrMI	17	-	-	-	-	-	-	0	17
	Tomáš Jakubec	S1	TAkadSN	17	-	-	-	-	-	-	0	17
45.	Jakub Kulka	S3	GMRŠKE	15	-	-	-	1	-	-	0	16
46. - 47.	Lujza Lea Lavriková	S1	GPHM1MI	12	2	-	-	0	-	-	0	14
	Viliam Geffert	S3	GPoštKE	14	-	-	-	-	-	-	0	14
48.	Erik Jochman	S2	GAlejKE	10	-	-	-	-	2	-	0	12
49. - 50.	František Bublák	Z7	GABerSC	8	2	-	-	-	-	-	0	10
	Matej Válek	Z9	ZKro4KE	9	-	-	-	-	1	-	0	10
51. - 53.	Ladislav Antoži	S2	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	-	0	9
	Ladislav Jakab	S2	SOTBrKN	9	0	-	0	0	0	0	0	9
	Miriam Halasová	S2	GSMTŠPO	9	-	-	-	-	-	-	0	9
54.	Lenka Grmanová	S2	GAEinBA	7	-	-	-	-	-	-	0	7
55.	Jakub Buzalka	S1	GŠkolSN	0	3	-	-	0	-	-	0	3
56.	Miroslava Pokorná	S2	GAMČABA	2	-	-	-	-	-	-	0	2
57.	Linda Mičicová	Z9	BGMHSuč	1	-	-	-	-	-	-	0	1

Názov: Strom – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 6 • Jún 2022 • Letný semester 46. ročníka (2021/2022)
Web: `seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`
Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese `riesenia.strom@strom.sk`.

Vydáva: Združenie Strom, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web: `zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.