Ahoj!

Je tu ďalší časopis STROMu, ktorý prináša vzorové riešenia druhej série. Okrem toho, že je posledný v tomto semestri, je výnimočný aj tým, že s ním prichádzajú aj pozvánky pre tých najlepších z vás. Tí sa môžu tešiť na odmenu vo forme týždňového netradičného sústredenia v obklopení skvelými účastníkmi a vedúcimi. Ak sa ti tam tentoraz nepodarilo dostať, nezúfaj. Pevne veríme, že nabudúce sa s tebou uvidíme!

STROMisti

1. Opravovali: **Viki Brezinová a Mimi Hanus**
Počet riešení: 52 Najkrajšie riešenia: **Jakub Šošovička a Martin Kopčány**

Majme kladné celé čísla a, b, c, pre ktoré platí, že $a^3 + b^3 + c^3$ je deliteľné 18. Dokážte, že abc je deliteľné 6.

Riešenie

Sporom dokážeme, že abc je deliteľné 2 aj 3, z čoho vyplynie, že je deliteľné 6.

Ak 2 nedelí abc, tak aj jednotlivé a, b a c sú nepárne (2 je prvočíslo). Potom ale aj a^3, b^3 a c^3 sú nepárne, čiže aj ich súčet je nepárny, čo je spor s deliteľnosťou 18.

Ak 3 nedelí abc, opäť aj jednotlivé tri činitele sú všetky nedeliteľné 3 (aj 3 je prvočíslo). To znamená, že každé z týchto troch čísel dáva po delení 9 zvyšok nedeliteľný 3, to jest 1, 2, 4, 5, 7 alebo 8. V dôsledku toho jeho tretia mocnina dáva zvyšok 1, 8, 1, 8, 1 alebo 8. Každopádne zvyšok $a^3 + b^3 + c^3$ po delení 9 musí takto byť $1 + 1 + 1 = 3$, $1 + 1 + 8 = 10$, $1 + 8 + 8 = 17$ alebo $8 + 8 + 8 = 24$. Ani jedna z týchto možností nemá zvyšok 0, takže 9 nedelí $a^3 + b^3 + c^3$ a máme ďalší spor.

Iné riešenie

$(6k + z)^3 = 18 \cdot 12k^3 + 18 \cdot 6k^2z + 18kz^2 + z^3$, teda zvyšok čísla po delení 6 jednoznačne určuje zvyšok jeho tretej mocniny po delení 18. Konkrétne zvyšky 0, 1, 2, 3, 4 a 5 vedú k zvyškom tretích mocnín 0, 1, 8, 9, 10 (-8) a 17 (-1) v tomto poradí, čiže rôzne k rôznym.

Zvyšok 0 po delení 18 ako súčet troch z týchto kubických zvyškov zapíšeme iba ako $0 + 0 + 0$, $0 + 1 + (-1)$, $0 + 8 + (-8)$, $0 + 9 + 9$, $1 + 8 + 9$ alebo $9 + (-8) + (-1)$ (prehľadáme možné súčty, vyhovuje iba týchto šesť). Ak použijeme do súčtu $a^3 + b^3 + c^3$ číslo so zvyškom 0 po delení 18, v súčine abc máme tiež číslo so zvyškom 0 po delení 6. Ak použijeme čísla so zvyškom 8 a 9 po delení 18, medzi číslami a, b, c sú čísla so zvyškami 2 a 3 po delení 6 (párne a násobok 3). Ak použijeme čísla so zvyškami 9 a -8 po delení 18, v súčine máme čísla so zvyškom 3 a 4 po delení 6 (násobok 3 a párne). Niektorý z týchto prípadov nastáva v každom zo šiestich súčtov, takže v každom prípade dostaneme súčin abc deliteľný šiestimi.

Komentár

Väčšina riešení získala plný počet bodov a využívala zvyšky čísel a ich tretích mocnín po delení 2 a 9 alebo 18. Body sme strhávali za chybné alebo chýbajúce argumenty, prípadne za nerozobranie všetkých možností.

2. Opravovali: **Kristín Mišlanová a Jano Richnavský**
Počet riešení: 52 Najkrajšie riešenia: **Ľubomír Vargovčík a Richard Vodička**

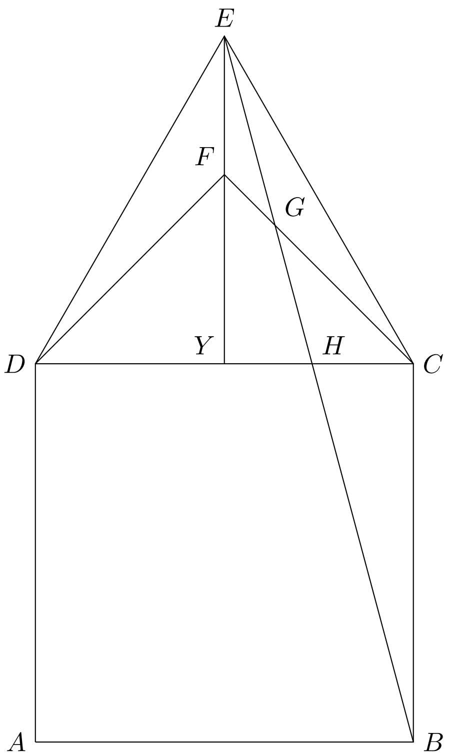
Nech $ABCD$ je štvorec so stranou dlhou 1. Mimo neho majme body E a F také, že trojuholník CED je rovnostranný a trojuholník CFD je rovnoramenný s uhlami veľkosti 45 stupňov pri základni CD. Označme priesečník úsečiek CF a BE ako G a priesečník úsečiek CD a BE ako H.

a) Aká je dĺžka úsečky CH?

b) V akom pomere rozdeľuje bod G úsečku FC?

Riešenie

Priesečník výšky rovnostranného trojuholníka CDE (resp. rovnoramenného CDF) so stranou CD označme ako Y.



Platí, že trojuholníky EYH a BCH sú podobné podľa vety uu, keďže uhly EYH a BCH sú pravé a uhly YHE a CHB sú vrcholové. Odtiaľ dostávame pomer podobnosti:

$$\frac{|YH|}{|CH|} = \frac{|EY|}{|BC|}$$

Zo zadania vieme, že $|BC| = 1$. Keďže EY je výška v rovnostrannom trojuholníku so stranou 1 (a teda aj ťažnica), tak $|YC| = |CH| + |YH| = 1/2$. Vieme teda vyjadriť $|YH| = 1/2 - |CH|$. Zároveň dĺžku EY si vieme vyjadriť z Pytagorovej vety ako $|EY| = \sqrt{|EC|^2 - |YC|^2} = \sqrt{1 - (1/2)^2} = \sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2$. Dosadením do pomeru dostaneme:

$$\begin{aligned}
\frac{1/2 - |CH|}{|CH|} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
1 - 2|CH| &= \sqrt{3}|CH| \\
1 &= (2 + \sqrt{3})|CH| \\
|CH| &= \frac{1}{2 + \sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Po úprave usmernením zlomku dostávame $|CH| = 2 - \sqrt{3}$.

V druhej podúlohe chceme určiť pomer $|FG|/|CG|$. Pozrime sa tentokrát na trojuholníky EFG a BCG, ktoré sú tiež podobné podľa vety uu, keďže uhly FGE a CGB sú vrcholové a uhly EFG a BCG sú striedavé. Z pomeru podobnosti opäť máme:

$$\frac{|FG|}{|CG|} = \frac{|EF|}{|BC|}$$

Keďže $|BC| = 1$, tak hľadaný pomer je vlastne rovný dĺžke EF. Podľa toho, čo sme vyrátali doteraz, $|EF| = |EY| - |FY| = \sqrt{3}/2 - |FY|$. Keď sa pozrieme na trojuholník FCY, tak máme dané $|\sphericalangle FCY| = 45°$ a $|\sphericalangle FYC| = 90°$, takže $|\sphericalangle CFY| = 45°$ a daný trojuholník je rovnoramenný. Odtiaľ dostávame $|FY| = |YC| = 1/2$, čiže $|EF| = \sqrt{3}/2 - 1/2$.

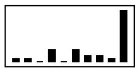
Komentár

Napriek vysokému počtu riešení s plným počtom bodov sa len veľmi málo z nich v plnej miere podobalo tomu vzorovému. Mohla za to svojím spôsobom samotná úloha, ktorá väčšinu z vás priam nabádala na používanie goniometrických funkcií (použime pre príklad výsledok tg 15° podúlohy a) vychádzajúci z trojuholníka BHC). Niektorí riešitelia občas výsledky zaokrúhľovali, čím automaticky strácali presnosť výsledku, o to viac, keď šlo len o medzivýpočet, ktorého výsledok sa používal v ďalších výpočtoch. Veľmi často sme sa tiež stretávali s chybami z nepozornosti, kde riešiteľ poplietol poradie uhlov, vrcholov, alebo jednoducho pri úprave výrazov mu kde-tu vypadol člen alebo sa plus zamenilo za mínus a opačne.

Vo všeobecnosti platí, že do STROMu sú vyberané geometrické úlohy, ktoré sú riešiteľné tradičnou cestou syntetickej geometrie. Okrem toho, že je to často krajšie, to zvykne byť aj jednoduchšie ako analytická geometria alebo goniometria. Uznávame však, že úloha nebola zvolená najšťastnejšie, čo dokazuje práve počet riešení využívajúcich goniometrické funkcie.

3.

Opravovali: **Matúš Masrna a Paťo Paľovčík**
Počet riešení: 32 Najkrajšie riešenie: **Eva Krajčiová a Rišo Vodička**



Miesta pri okrúhlom stole sú očíslované zaradom od 1 po n tak, že 1 susedí na jednej strane s 2 a na druhej s n. K stolu si postupne príde sadnúť n ľudí, pričom každý má priradené iné miesto. Na začiatku si však človek s miestom 1 sadol na ľubovoľné (nie nutne iné) miesto. Každý ďalší človek si už sadne na svoje miesto, prípadne na ľubovoľné najbližšie voľné miesto po obvode stola, ak je jeho miesto už obsadené. Na ktorých miestach môže sedieť človek s miestom n, ak zvyšní ľudia prichádzajú

a) v poradí od najmenšieho čísla miesta po najväčšie, teda od 2 po n?

b) v ľubovoľnom poradí?

Riešenie

a) Pozrime sa na konkrétne prípady, kam si mohol sadnúť človek s miestom 1. Keby si sadol na svoje miesto, tak aj každý ďalší človek by si vedel sadnúť na svoje miesto, a teda človek s miestom n by skončil tiež na svojom mieste.

Keby si človek s miestom 1 sadol na miesto 2, nasledoval by človek s miestom 2 a vedel by si sadnúť buď na miesto 1, alebo na miesto 3. Keby si sadol na miesto 1, všetci ostatní by si už vedeli sadnúť na svoje miesto, a teda aj človek s miestom n by bol na svojom. Keby si však človek s miestom 2 sadol na miesto 3, tak človek s miestom 3 by si musel sadnúť na miesto 4, človek s miestom 4 na miesto 5 a tak až po posledného, teda po n. Tomu by už ostalo iba miesto vedľa neho, čo už nie je o 1 väčšie, ale číslo 1.

Keby si človek s miestom 1 sadol na akékoľvek iné miesto (označme ho i), tak všetci až po človeka s miestom i by si následne vedeli sadnúť na svoje miesto. Človek s číslom i by už však nemal svoje miesto voľné a najbližšie voľné by bolo až miesto $i + 1$ vedľa neho. Následne by si človek s miestom $i + 1$ musel sadnúť na miesto $i + 2$, a tak by to pokračovalo až po človeka s miestom n, ktorému by ostalo opäť už len miesto s číslom 1.

Človek s miestom n vie v tomto prípade skončiť len na miestach 1 a n.

b) Ukážme si, že človek s miestom n si nemohol nikdy sadnúť na miesto vzdialené o viac ako 1 od jeho pôvodného miesta. Znovu, ak si človek s miestom 1 sadne na svoje miesto, tak každý, vrátane n, si bude môcť tiež sadnúť na svoje miesto.

Inak si môže človek s miestom 1 sadnúť na ľubovoľné iné miesto, označme si ho j. Človek s miestom j bude mať teda obsadené miesto a bude si musieť sadnúť na iné najbližšie. Avšak, ktokoľvek idúci pred ním si bude môcť sadnúť na svoje miesto. Následne, keď bude na rade j, sadne si na najbližšie voľné miesto, označme si ho k a teraz človek s miestom k bude jediný, kto si nevie sadnúť na svoje miesto. Stále má teda v každej chvíli len 1 človek obsadené svoje miesto a ostatní ho majú voľné. Nakoniec bude niekto musieť obsadiť aj miesto 1. Človek s miestom 1 už sedí inde, takže ho bude musieť obsadiť ten človek, ktorý práve nemá voľné miesto. Vtedy už neostane žiaden človek s obsadeným miestom, keďže človek s miestom 1 už sedí inde. Každý až do konca si už teda bude môcť sadnúť na svoje miesto.

Čo to však znamená pre človeka s miestom n? Ak príde až po celej tejto fáze, kým sa obsadí aj miesto 1, tak si bude vedieť sadnúť na svoje miesto. Ak príde ešte počas tejto fázy, tak to znamená, že miesto 1 je stále voľné, a keďže jeho miesto je obsadené, tak je to preňho najbližšie miesto a bude si naňho vedieť stále sadnúť. Ďalej ako o 1 miesto od miesta n si teda nebude nikdy musieť sadnúť.

Na miesta n a 1 si teda človek s miestom n bude vedieť sadnúť v mnohých prípadoch, napríklad v prípadoch z podúlohy a. Ešte si ukážme, kedy vie skončiť aj na mieste $n-1$. To je napríklad v prípade, keď si človek s miestom 1 sadne na miesto n a človek s miestom n ide hneď za ním. Má teraz 2 miesta na výber, a to sú $n-1$ a 1, ktoré majú od jeho miesta obe vzdialenosť 1. Človek s miestom n teda vie skončiť na miestach 1, n a $n-1$.

Komentár

Úloha sa nám opravovala veľmi príjemne, keďže veľká časť riešení si vyslúžila 9 bodov a dokonca sa vyskytlo viacero správnych spôsobov riešenia.

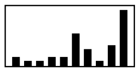
S podúlohou a) sa veľa problémov nevyskytlo, azda iba nezamyslenie sa nad možnosťou, v ktorej si človek s číslom 1 sadne na miesto číslo 2, a následne človek s číslom 2 sadne na miesto číslo 1. Hoci je celkom očividné, že to nevytvorí žiaden nový výsledok, stalo sa, že táto možnosť nebola zahrnutá v rozobratí toho, čo sa môže stať.

V podúlohe b) sa vyskytli mierne závažnejšie chyby, hoci tiež iba v zopár riešeniach. Najviac bodov sme strhávali v riešeniach, v ktorých ste sa snažili nejakým spôsobom zovšeobecniť správanie sadajúcich si ľudí, ale uchádzali vám nejaké možnosti. Videli sme tvrdenia ako napríklad „všetci ľudia, ktorých miesto je obsadené, sa posunú tým istým smerom“, „všetci ľudia si môžu sadnúť najviac o jedno miesto od svojho miesta“, „miesto n môže obsadiť iba človek n-1 alebo 1“, ktoré nie sú vo všeobecnosti pravda. Stávalo sa teda, že napriek správnemu záveru riešenie nemalo obsiahnuté všetky možnosti vývoja.

A na záver niečo, čo si môžete odniesť do budúcnosti. Pokiaľ si začnete iba nejako skúšať, ako by sa mohla nejaká postupnosť krokov v úlohe takéhoto typu vyvíjať a začne sa to vo veľa prípadoch podozrivo správať rovnako, často toto podozrenie navedie na správny výsledok, čo je super. Ale potom treba túto vašu šablónu správania skúsiť spochybniť a sformulovať dôkaz toho, že do nej spadajú všetky prípady. Často sa takto ukážu buď nejaké „extrémne“ prípady, ktoré sa jej mierne vymykajú, alebo úplne iný typ vývoja úlohy.

Napríklad na vzorové riešenie sa dá pozrieť ako na takýto postup. Možno si najprv nejakým prvotným skúšaním všimneme, že ak je miesto n obsadené, miesto 1 je často ešte voľné. To môže viesť k postrehu, že akonáhle si niekto sadne na miesto 1, zvyšok ľudí si už sadne na svoje miesto. Nad týmto sa zamyslíme a zistíme, že to už by vysvetľovalo, prečo sa n nemôže posunúť o viac ako jedno miesto, čo je presne to, čo chceme. Tak sa zamyslíme ešte trochu a dokážeme, prečo je tento postreh vždy pravdivý.

4. Opravovali: **Martin „&y“ Andričík a Martin Kliment**
Počet riešení: 40 Najkrajšie riešenia: **Oliver Seman a Eva Krajčiová**



Máme mriežku 7×7, ktorá má vyrezané všetky štyri rohové políčka.

a) Koľko najmenej políčok musíme zafarbiť načierno, aby neexistoval biely päťpolíčkový krížik?

b) Dokážte, že vieme do každého políčka napísať celé číslo tak, aby súčet čísel v každom päťpolíčkovom krížiku bol záporný, ale celkový súčet všetkých čísel v tabuľke bol kladný.

Riešenie

a) Klasický nápad, ako dokázať, že minimum je n, by mohol byť skúsiť nájsť n nepretínajúcich sa (disjunktných) krížikov, pretože potom v každom z týchto krížikov musíme začierniť aspoň jedno políčko a tým získame dolný odhad na n.

Zistíme, že nám stačí 7 čiernych políčok, ktoré môžme umiestniť napríklad takto:

Ø						Ø
			č			
	č				č	
			č			
	č				č	
			č			
Ø						Ø

alebo takto:

Ø						Ø
	č				č	
			č			
			č			
	č				č	
			č			
Ø						Ø

Tým menej nás zaskočí, že 6 čiernych políčok je primálo.

Do mriežky vieme dať 6 krížikov takto (mimochodom, toto je až na otočenie jediný spôsob):

Ø			6			Ø
	2	6	6	6	3	
2	2	2	6	3	3	3
	2		5		3	
	1	5	5	5	4	
1	1	1	5	4	4	4
Ø	1				4	Ø

Pre spor teda predpokladajme, že stačí začierniť 6 políčok. V každom z týchto krížikov potom musí byť práve jedno čierne políčko. Čierne políčka sa teda nemôžu nachádzať mimo oblasti pokrytej týmito krížikmi.

Teraz si túto krížikovú kompozíciu otočme o 90°. Čierne políčka nesmú byť ani mimo týchto krížikov. To nám zakázalo začierniť nejaké ďalšie políčka. Pre jednoduchosť a symetriu tento krok urobíme ešte dvakrát a zistíme, že čierne políčka môžme dať len do políčok bez X:

Ø	X	X	X	X	X	Ø
X						X
X			X			X
X		X		X		X
X			X			X
X						X
Ø	X	X	X	X	X	Ø

Ako dosiahneme, aby nejaké čierne políčko ležalo aj na úplne prostrednom krížiku? Preň už ostáva iba jedno políčko (prostredné) bez X-u (nezakázané). Fajn, potom nám ostáva 5 ďalších voľných čiernych políčok. Preto teraz chceme podobne nájsť nejakých 5 disjunktných krížikov, ktoré by vedeli zakázať niektoré umiestnenia týchto zvyšných čiernych políčok.

Ponúka sa napríklad takéto rozostavenie:

∅			4			∅
	2	4	4	4	3	
2	2	2	4	3	3	3
	2			5	3	
	1		5	5	5	
1	1	1		5		
∅	1					∅

Ktoré nám znovu zakazuje zafarbiť na čierno políčka, v ktorých nie je žiadne číslo. Tak ho znovu zrotujeme trikrát o $90°$, zjednotíme všetky takto zakázané políčka a dostaneme, že čierne políčka môžme umiestniť iba sem:

∅						∅
		tu		tu		
	tu				tu	
			tu			
	tu				tu	
		tu		tu		
∅						∅

Avšak ostalo nám iba 5 čiernych políčok, takže 3 z povolených ostanú voľné, potom ale nezasiahneme tie krížiky, ktorých stredy budú v týchto troch políčkach. A nezasiahneme ich ničím iným, lebo všetky ostatné políčka sme zakázali začierniť.

Tým sme došli k sporu s tým, že postačuje 6 čiernych políčok.

b) Ako je niečo také možné? Krížiky sa na niektorých políčkach vyskytujú „častejšie“, takže by sme niektorým týmto políčkam (tak aby sme zasiahli každý krížik) chceli dať „dostatočne zápornú hodnotu“ a ostatným tak, aby bol súčet čísel v mriežke kladný. V tom nám vie pomôcť časť a), kde máme, veľmi zhruba povedané, čierne políčka rozmiestnené tak, že každé z nich sa pretína s „čo najviac“ krížikmi (no najmä každý krížik s aspoň jedným z nich).

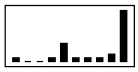
Najjednoduchší nápad, dať do každého čierneho políčka -5 a inde 1, sa ukáže ako funkčný, keďže každý krížik obsahuje aspoň 1 čierne políčko a súčet v celej mriežke je $7^2 - 4 - 7 - (7 \cdot 5) = 3$.

Na koniec by sme ešte dodali, že na úspešné vyriešenie podúlohy b) nie je potrebná znalosť optimálnej konštrukcie pre 7 políčok (ktorú sme nakreslili v a)). Dá sa využiť aj konštrukcia pre 9 (kde čierne políčka budú práve políčka tu z predchádzajúceho obrázka. Nechávame na vlastnú meditáciu, akurát už zrejme nebude taká jednoduchá ako pre 7 čiernych políčok).

Komentár

K riešeniu sa dalo pristupovať mnohými inými spôsobmi než vzorové riešenie. Celkom podareným spôsobom bolo previesť úlohu na pokrývanie 5x5 štvorca krížmi (kde sa človek pozrel na stratu pokrytia pri prekryvoch, v rohoch, . . .). V zásade bolo v ľudských silách riešiť rozborom prípadov. Asi najčastejšou chybou bola argumentácia efektivitou: „niektoré políčka zrušia viac krížov než iné, tak ich chceme vyberať primárne“. Toto by však fungovalo iba vtedy, keby ste mali umiestniť iba jedno čierne políčko, no to, koľko krížov zrušíte ďalším políčkom, iste závisí od toho, kam ste dali predchádzajúce. Nakoniec: nebojte sa kresliť obrázky, pomáha nám to v orientácii a v prípade chyby to vám môže zachrániť kus riešenia.

5. Opravovali: **Erik Novák a Maťo Gbúr**
Počet riešení: 26 Najkrajšie riešenia: **Martin Kopčány a Vierka Glevitzká**



Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 2$ a kladné reálne čísla x_1 až x_n

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n \leq \binom{n+1}{2} + x_1 + x_2^2 + \cdots + x_n^n$$

a) v prípade, že $0 < x_i \leq 1$ pre všetky $i \in \{1, \ldots, n\}$,

b) pre ľubovoľné hodnoty x_i.

Riešenie

Najprv vyriešime úlohu v prípade, kedy sa všetky x_i nachádzajú medzi 0 a 1.

Aby sme ohraničili ľavú stranu nerovnosti zhora, môžeme si za každé z x_i dosadiť ich maximálnu hodnotu, čiže 1. S využitím známeho vzťahu pre súčet prvých n prirodzených čísel dostaneme:

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n \leq 1 + 2 + \cdots + n \leq \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

No na pravej strane nerovnosti sa nám okrem členu $\binom{n+1}{2}$ vyskytujú už len samé kladné členy, takže naša nerovnosť platí.

Pre dokázanie nerovnosti pre ľubovoľné hodnoty x_i stačí, ak dokážeme každú z čiastočných nerovností:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 1 + x_1 \\ 2x_2 &\leq 2 + x_2^2 \\ &\vdots \\ nx_n &\leq n + x_n^n \end{aligned}$$

Výslednú nerovnosť potom získame ich sčítaním.

Ukážme preto $kx_k \leq k + x_k^k$ pre ľubovoľné $1 \leq k \leq n$. Existuje viac spôsobov ako to spraviť, my si ukážeme trik s využitím AG nerovnosti (nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom). Pozrime sa, čo nám táto nerovnosť hovorí o priemere čísel x_k^k a $k-1$ kópiách jednotiek:

$$\frac{x_k^k + k - 1}{k} = \frac{x_k^k + 1 + \cdots + 1}{k} \geq \sqrt[k]{x_k^k \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1} = \sqrt[k]{x_k^k} = x_k$$

Po upravení dostaneme $kx_k \leq x_k^k + k - 1 \leq k + x_k^k$, čo sme chceli dokázať.

Iné riešenie

Tvrdenie dokážeme pre všetky kladné reálne x_i naraz a budeme používať matematickú indukciu. Začneme dôkazom indukčnej bázy pre $n = 2$. Pomocou ekvivalentných úprav si našu nerovnosť vieme prepísať ako:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq \binom{3}{2} + x_1 + x_2^2 \\ 0 &\leq x_2^2 - 2x_2 + 3 \\ 0 &\leq (x_2 - 1)^2 + 2 \end{aligned}$$

Na pravej strane máme druhú mocninu reálneho čísla sčítanú s kladným číslom, teda je táto strana určite kladná. Indukčná báza pre $n = 2$ platí.

Poďme si teraz porovnať indukčný predpoklad s tým, ako vyzerá nerovnica pre $n + 1$.

Indukčný predpoklad:

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n \leq \binom{n+1}{2} + x_1 + x_2^2 + \cdots + x_n^n$$

Nerovnica pre $n+1$:

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n + (n+1)x_{n+1} \leq \binom{n+2}{2} + x_1 + x_2^2 + \cdots + x_n^n + x_{n+1}^{n+1}$$

Odčítajme od nej indukčný predpoklad:

$$(n+1)x_{n+1} \leq \binom{n+2}{2} - \binom{n+1}{2} + x_{n+1}^{n+1}$$

Využitím kombinatorickej identity $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ môžeme zistiť, že $\binom{n+2}{2} = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{1}$, z čoho plynie $\binom{n+2}{2} - \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{1} = n+1$. Dosadením do našej nerovnice dostaneme:

$$(n+1)x_{n+1} \leq n + 1 + x_{n+1}^{n+1}$$

Pre prehľadnosť si označme $n+1$ ako a a x_{n+1} ako x. Chceme teda pre všetky prirodzené a a kladné reálne x ukázať, že

$$ax \leq a + x^a$$

Dokazovať budeme znova indukciou. Pre indukčnú bázu $a = 1$ je dôkaz zjavný, nerovnica má totiž preň tvar $x \leq x + 1$.

Teraz dokážeme platnosť $(a+1)x \leq a + 1 + x^{a+1}$ za indukčného predpokladu $ax \leq a + x^a$. Na začiatok rozdiskutujeme dva prípady:

- ak $x \geq 1$, potom aj $x^a \geq 1$ a prenásobením tejto nerovnosti nezáporným členom $x - 1$ dostaneme $x^a(x-1) \geq x - 1$
- ak $x \leq 1$, potom aj $x^a \leq 1$ a prenásobením tejto nerovnosti nekladným členom $x - 1$ tiež dostaneme $x^a(x-1) \geq x - 1$

V oboch prípadoch teda môžeme výslednú nerovnosť upraviť na $x^{a+1} + 1 \geq x^a + x$, ktorá teraz platí pre všetky $x \geq 0$. Pričítaním a na obe strany dostaneme:

$$x^{a+1} + 1 + a \geq x^a + x + a$$

Z indukčného predpokladu ďalej máme $a + x^a \geq ax$, a teda $x^a + x + a \geq ax + x = (a+1)x$. Z toho plynie, že $x^{a+1} + 1 + a \geq (a+1)x$, čím sme dokázali náš indukčný krok.

Komentár

Pri opravovaní sme boli priam uchvátení, koľkými rôznymi spôsobmi sa dala táto úloha vyriešiť. Preto by sme vás chceli pochváliť a povzbudiť v produkovaní ďalších kvalitných a originálnych riešení aj v nasledujúcich sériách. Jediné, čo by sme mohli niektorým vytknúť je, že málo popisujú svoje myšlienky. My si síce váš postup vydedukovať vieme, no pointou spisovania riešení je sa ho naučiť vysvetliť aj ľuďom, ktorí s úlohou familiárni nie sú.

6. Opravovali: **Dano Onduš a Martin Števko**

Počet riešení: 15 Najkrajšie riešenie: **Richard Vodička**

Neprázdna množina $M \subseteq \mathbb{Z}$ je *Mihálova*, ak spĺňa nasledujúcu podmienku: Ak $x, y \in M$ (aj ak $x = y$), potom aj $x^2 + zxy + y^2 \in M$ pre všetky $z \in \mathbb{Z}$. Nájdite všetky dvojice nenulových celých čísel m, n (vrátane prípadov, kde $m = n$) také, že jediná Mihálova množina obsahujúca aj m aj n je $\mathbb{Z}$.

Riešenie

Skúsme experimentovať. Najprv dosaďme $x = y$. Potom pre všetky celé čísla z patrí do Mihálovej množiny aj číslo

$$x^2 + zxy + y^2 = x^2 + zx^2 + x^2 = (z + 2)x^2$$

Inak povedané, ak do Mihálovej množiny patrí x, patria do nej aj všetky násobky x^2. Toto si označme ako tvrdenie 1.

Zaveďme si *minimálnu Mihálovu množinu pre m a n*, čo bude množina obsahujúca m aj n a minimálny počet ďalších prvkov potrebných na to aby množina bola Mihálova. Zjavne platí, že $\mathbb{Z}$ je jediná Mihálova množina obsahujúca dané m a n práve vtedy, ak je to minimálna Mihálova množina pre m a n. Toto si označme ako tvrdenie 2.

Pozrime sa na prípad, kde $NSD(m, n) = d > 1$. Potom existujú celé k a l také, že $m = kd$ a $n = ld$. Po dosadení do vzorca vidíme, že aj $(kd)^2 + zkld^2 + (ld)^2$ je deliteľné číslom d pre každé z. Z toho vyplýva, že množina všetkých násobkov čísla d je Mihálova, lebo do nej nemusíme pridať žiadne ďalšie čísla, a preto minimálna Mihálova množina pre m a n nie je $\mathbb{Z}$.

Pre nesúdeliteľné čísla existuje tvrdenie známe ako Bézoutova lemma, ktoré vraví, že ak $NSD(a, b) = 1$ potom existujú celé k a l také, že $ka + lb = 1$. Na jeho dôkaz nám stačí ukázať, že existuje k také, že $ka \equiv 1 \ mod\ b$, keďže potom máme l' také, že $ka = l'b + 1$, takže pre $l = -l'$ platí, čo chceme. Zoberme si všetky násobky a od a po $a(b - 1)$. Keďže a a b sú nesúdeliteľné, tak žiadne z týchto $b - 1$ čísel nie je deliteľné b. Predpokladajme, že nejaké dve z nich majú rovnaký zvyšok $mod\ b$. Z toho máme s, t, také že $sa - ta \equiv 0 \ mod\ b$. Vďaka nesúdeliteľnosti môžeme túto rovnosť predeliť a, z čoho $s - t$ je deliteľné b. Keďže však s aj t sú menšie ako b, tak $s - t = 0$, čo je spor. Preto máme $b - 1$ čísel s $b - 1$ rôznymi nenulovými zvyškami, čiže jedno z nich má zvyšok 1, čo sme chceli dokázať.

Poďme sa pozrieť na prípad, že $NSD(m, n) = 1$. Potom rovnako platí aj $NSD(m^2, n^2) = 1$. Podľa Bézoutovej rovnosti existujú celé čísla k a l, také, že $km^2 + ln^2 = NSD(m^2, n^2) = 1$. Majme minimálnu Mihálovu množinu M obsahujúcu m aj n. Podľa tvrdenia 1, M musí obsahovať aj km^2 aj ln^2. Dosaďme za x a y tieto čísla, za z dosaďme 2 a upravme:

$$\left(km^2\right)^2 + 2(km^2)(ln^2) + \left(ln^2\right)^2 = \left(km^2 + ln^2\right)^2 = 1^2 = 1$$

Keďže do M patrí 1, podľa tvrdenia 1 do M patrí aj každý násobok 1 a teda všetky celé čísla. Podľa tvrdenia 2 platí, že ide o jedinú Mihálovu množinu obsahujúcu m aj n, čím je dôkaz hotový.

Ako sme dokázali, pre súdeliteľné m a n nie je jediná Mihálova množina obsahujúca tieto čísla $\mathbb{Z}$. Naopak pre nesúdeliteľné čísla je jediná Mihálova množina obsahujúca m aj n totožná so $\mathbb{Z}$, čo nám dáva všetky riešenia.

Komentár

Aj keď úloha samotná bola dosť ťažká, veľa čiastkových pomocných tvrdení bolo jednoduchých na dokázanie, takže body ste mohli získať aj bez kompletného riešenia a preto nás mrzí, že pokusov o riešenie bolo relatívne málo. Na druhej strane nás potešilo, že veľa riešení bolo správnych a veľmi elegantných, o čom svedčí aj vysoký bodový priemer.

Konečné poradie zimného semestra 47. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Lucia Chladná	S2	GAMČABA	54	9	9	9	9	9	9	0	108
2. - 3.	Adam Džavoronok	S4	GPoštKE	54	9	9	9	9	8	9	0	107
	Tomáš Kubrický	S2	GPoštKE	54	9	9	8	9	9	-	0	107
4. - 6.	Martin Kopčány	S4	GJChaBR	54	9	9	7	9	9	9	0	106
	Veronika Chovancová	S4	PiarGTN	52	9	9	9	9	9	9	0	106
	Richard Vodička	S2	GAlejKE	52	9	9	9	-	9	9	0	106
7.	Eva Krajčiová	S1	GAlejKE	51	9	9	9	9	9	-	0	105
8.	Jakub Šošovička	S4	SG Cenada	51	9	7	9	9	9	9	0	103
9. - 10.	Michal Iľkovič	S2	GSMTŠPO	48	9	9	9	8	9	-	0	101
	Anna Podmanická	S2	GVaršZA	54	9	9	5	9	7	6	0	101
11. - 12.	Oliver Seman	S1	GAlejKE	50	9	9	9	9	4	-	0	99
	Natália Čigašová	S4	GPoštKE	46	9	9	9	8	9	9	0	99
13.	Marek Horváth	S2	GKonšPO	51	9	9	9	8	-	-	0	94
14.	Oskar Hritz	S4	GPoštKE	54	9	9	-	-	8	8	0	88
15.	Michal Vodička	Z9	GAlejKE	41	9	8	9	9	-	-	0	85
16.	Ondrej Králik	S2	GAlejKE	42	9	9	5	4	6	1	0	80
17.	Viera Glevitzká	S4	GVBNPD	45	9	9	-	7	9	-	0	79
18.	Janka Urbánová	Z9	GAlejKE	41	5	7	-	8	9	-	0	78
19.	Matúš Pokorný	S1	GAMČABA	37	9	4	9	9	-	-	0	77
20.	Simon Omaník	S2	GAMČABA	53	-	-	-	-	9	9	0	71
21. - 24.	Vladimír Slanina	S2	GPoštKE	25	9	9	6	5	9	-	0	69
	Martin Belluš	S4	GAMČABA	36	9	9	-	9	3	3	0	69
	Sara Gašparová	S4	GAMČABA	36	9	9	-	9	4	2	0	69
	Andrej Znamenáček	S2	GAMČABA	51	-	-	-	-	9	9	0	69
25.	Alzbeta Klimentova	S3	GPoštKE	33	9	7	9	9	-	-	0	67
26.	Martin Dudjak	S1	SMládPP	32	9	9	-	6	-	-	0	65
27.	Miriam Horváthová	S4	GŠtúrMI	27	9	9	9	8	-	-	0	62
28.	Štefan Vašak	S4	GPoštKE	27	9	9	9	6	-	-	0	60
29.	Veronika Vodičková	S2	GAlejKE	35	9	9	-	6	-	-	0	59
30.	Matúš Libák	S2	GAlejKE	33	9	9	7	-	-	-	0	58
31. - 33.	Veronika Jakabová	S1	GAlejKE	45	9	-	-	-	-	-	0	54
	Martin Šmilňák	S3	GAlejKE	27	9	9	-	5	4	-	0	54
	Soňa Vasiľová	S2	GKukuPP	31	9	9	5	-	-	-	0	54
34.	Lucia Kleščová	S2	GPoštKE	35	9	9	-	-	-	-	0	53
35.	Ľubomír Vargovčík	S4	GPoštKE	23	9	9	3	5	-	-	0	49
36.	Bianka Gurská	S3	GPoštKE	16	9	8	9	4	-	-	0	46
37.	Michal Ferdinandy	Z9	GAlejKE	15	3	9	5	6	-	-	0	44
38. - 39.	Branislav Ječim	S3	GŠkolSN	27	9	7	-	-	-	-	0	43
	Natália Tkáčová	S1	SMládPP	24	3	6	-	5	-	-	0	43
40.	Rudolf Kusý	S1	OAMy1PK	0	9	5	9	5	5	-	0	42
41.	Sarah Klopstock	Z9	ŠpMNDaG	22	0	3	3	5	4	-	0	41
42.	Oskar Cacara	S1	GPoštKE	27	4	4	-	-	-	-	0	39
43.	Viliam Geffert	S4	GPoštKE	23	5	7	-	3	-	-	0	38
44. - 46.	Tomáš Sukeľ	S1	GAGLSHE	33	0	0	3	-	-	-	0	36
	Katarína Farbulová	S2	GPoštKE	18	9	9	-	-	-	-	0	36
	Matúš Jonaštík	S3	GAMČABA	18	9	9	-	-	-	-	0	36
47.	Tomáš Boledovič	Z9	CZNarBA	18	-	9	-	-	4	-	0	35
48.	Marek Ištok	S1	GJARMPO	27	-	7	-	-	-	-	0	34
49.	Alica Cimráková	S2	BGMHSuč	15	9	9	-	-	-	-	0	33
50. - 52.	Ján Stupák	S1	GAlejKE	27	5	-	-	-	-	-	0	32
	Juraj Kramár	S2	GAlejKE	12	4	6	6	2	-	-	0	32
	Michal Urban	S4	GAMČABA	32	-	-	-	-	-	-	0	32
53. - 54.	Nina Anna Betáková	S1	GAGLSHE	26	0	0	3	1	-	-	0	31
	Adela Horváthová	S3	GPoštKE	16	8	7	-	-	-	-	0	31
55.	Terézia Stanová	S3	EGJAKKE	16	5	9	-	-	-	-	0	30
56.	Natália Poliačiková	S2	GPoštKE	26	3	-	-	-	-	-	0	29
57.	Adam Žulevič	S1	GAlejKE	23	-	-	-	5	-	-	0	28
58.	Samuel Výrostek	S4	SZŠ Moyzesova 17	27	-	-	-	-	-	-	0	27

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	PS	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
59.	Paulína Tkáčová	S2	SMládPP	10	-	6	-	5	-	-	0	21
60.	Peter Varga	S2	GPoštKE	18	-	-	-	-	-	-	0	18
61.	Michal Almáši	S4	GPMláKE	17	-	-	-	-	-	-	0	17
62.	Šimon Borovský	S2	GAMČABA	15	-	-	-	-	-	-	0	15
63.	Miroslava Pokorná	S3	GAMČABA	14	-	-	-	-	-	-	0	14
64. - 65.	Alexandra Kopčányová	S1	GJChaBR	13	-	-	-	-	-	-	0	13
	Erik Jochman	S3	GAlejKE	13	-	-	-	-	-	-	0	13
66.	Kalista Semancová	S2	GAGLSHE	7	-	-	1	3	-	-	0	11
67. - 71.	Maxima Anna Alžbeta Bednarčíková	S2	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	-	0	9
	Katarína Polanská	S2	CSŠ	9	-	-	-	-	-	-	0	9
	Tomáš Jakubec	S2	TAkadSN	9	-	-	-	-	-	-	0	9
	Abigail Beblavá	S2	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	-	0	9
	Dominik Rigasz	S2	GJHN3BA	0	-	-	-	-	-	9	0	9
72.	Ladislav Jakab	S3	SOTBrKN	3	0	0	0	0	0	-	0	3
73.	František Bublák	Z8	GABerSC	2	-	-	-	0	-	-	0	2

Názov: Strom – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 3 • December 2022 • Zimný semester 47. ročníka (2022/2023)
Web: `seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`
Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese `riesenia.strom@strom.sk`.

Vydáva: Združenie Strom, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web: `zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.