Lomihlav

Košice 2. 12. 2016

Úlohy

Úloha 1:
Majme trojuholník, ktorého strany sú 5 a 7 centimetrov. Akú najväčšiu dĺžku môže mať tretia strana tohto trojuholníka, ak vieme, že je to celočíselná hodnota v centimetroch?

Výsledok: 11

Riešenie:

Využijeme trojuholníkovú nerovnosť, ktorá hovorí, že súčet dvoch strán musí byť väčší ako strana tretia. V našom prípade je súčet $5+7 = 12$. Hľadaná strana môže mať dĺžku najviac 11 centimetrov.

Úloha 2:
Koľko existuje takých dvojciferných prirodzených čísel, ktoré obsahujú aspoň jednu cifru 5?

Výsledok: 18

Riešenie:

Čísla, ktoré obsahujú cifru 5 si môžeme rozdeliť na 2 typy. Tie, ktoré začínajú číslom 5 a tie, ktoré ním končia. Na číslo 5 začína 10 dvojciferných čísel (50, 51, . . . , 59). Číslom 5 končí 9 čísel (15, 25, . . . , 95). Dokopy to je 19 čísel, no číslo 55 sme započítali dvakrát. Takých čísel je 18.

Úloha 3:
Škaredé káčatko má v škole strašnú smolu. Pri všetkých hrách, kde sa káčatká delili do skupiniek po 3, 4 a 5, zostalo vždy ako jediné samé. Koľko káčatok chodí do školy, ak vieme, že ich počet je číslo medzi 40 a 70?

Výsledok: 61

Riešenie:

Hľadáme číslo, ktoré bude dávať zvyšok 1 po delení číslami 3, 4 a 5. Po delení 5 dávajú zvyšok 1 tieto čísla medzi 40 a 70: 41, 46, 51, 56, 61, 66. Po delení 4 dávajú z predošlej skupiny zvyšok 1 iba 41 a 61. A len 61 dáva zvyšok 1 aj po delení 3. Do školy chodí 61 káčatok.

Úloha 4:
V triede je 30 žiakov. Nikto z nich nemal z matematiky na vysvedčení horšiu známku ako dvojku. Určte počet žiakov, ktorí mali jednotku, ak trieda mala priemer známok 1,4.

Výsledok: 18

Riešenie:

Priemer známok dostaneme tak, že sčítame všetky známky (v našom prípade 1 a 2) a predelíme ich počtom žiakov (v našom prípade 30). Dostaneme celkový priemer, čo je 1,4. Preto ak priemer vynásobíme počtom žiakov, tak dostaneme súčet známok: $1{,}4 \cdot 30 = 42$. Keby všetci žiaci mali 1, tak by bol súčet 30 a priemer triedy by bol 1. Priemer je ale 1,4, označme si teda počet jednotkárov neznámou x. Počet dvojkárov je potom $30 - x$. Súčet ich známok zapíšeme ako $1 \cdot x + 2 \cdot (30 - x) = 60 - x$, čo vieme, že má byť 42. Z toho dostaneme, že jednotkárov bolo $x = 18$.

Úloha 5:
Pri obdĺžnikovom stole sedí 6 ľudí - traja na jednej a traja na opačnej strane. Medzi nimi sú 2 manželské páry. Každý manželský pár chce sedieť priamo oproti sebe. Koľkými spôsobmi sa môžu usadiť?

Výsledok: 48

Riešenie:

Ak si sadnú 2 páry oproti sebe, zvyšní dvaja ľudia budú musieť tiež sedieť oproti sebe. Úloha je preto rovnaká, ako keby sme usádzali tri páry. Máme tri dvojice stoličiek, ktoré sú priamo oproti sebe. Prvý pár si môže sadnúť na ľubovoľné z troch možných miest, druhému ostanú na výber dve a poslednému už len jedno miesto. Ľudia v páre si ale vedia navzájom vymeniť miesta, a stále sedieť oproti sebe, čo nám pre každý pár dá dvojnásobok možností. Počet možností je teda $(3 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2) = 48$

Úloha 6:
Na stenách kocky sú napísané čísla 1, 2, 3, 4, 5 a 6 tak, že súčet čísel na protiľahlých stenách je 7. Číslo vo vrchole kocky vznikne tak, že spolu vynásobíme čísla na troch stenách, ktoré mu prislúchajú. Aký je súčet čísel vo vrcholoch kocky?

Výsledok: 343

Riešenie:

Na kocke, ktorá má súčet čísel na protiľahlých stenách 7, musia byť oproti sebe tieto čísla: 1 – 6, 2 – 5, 3 – 4.

Vieme, že kocka má 8 vrcholov, čiže 8 súčinov na sčítanie. Ku každej stene s číslom vždy prislúchajú 4 vrcholy, čiže 4 súčiny, v ktorých sa bude nachádzať. Ďalej vieme, že čísla, ktoré spolu tvoria dvojice, ktorých súčet dáva 7, nemôžu byť spoločne v jednom súčine, vzhľadom na to, že sú oproti sebe a nemajú žiadny spoločný vrchol. Teraz si vypíšme možné súčiny a rovno ich aj sčítajme:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 6 \cdot 3 \cdot 5 + 6 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \cdot 4$$

Toto sa už dá vyrátať, no aby sme si boli istí, že sme sa nepomýlili, spravme jednoduchú úpravu. Z prvej časti vieme vybrať jednotku pred zátvorku a z druhej šestku.

$$1 \cdot (2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4) + 6 \cdot (3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4)$$

To sa dá ešte ďalej upraviť a vybrať pred zátvorku ďalšie čísla pre prehľadnosť.

$$(1 + 6) \cdot (2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4)$$
$$7 \cdot 3 \cdot (2 + 5) + 4 \cdot (2 + 5)$$
$$7 \cdot (3 + 4) \cdot (2 + 5)$$
$$7 \cdot 7 \cdot 7$$

Teraz sa už isto nepomýlime. Výsledok je $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$.

Úloha 7:
Zákazník si objednal 25 čokolád. Čokolády sú balené práve po jednej, po dvoch alebo po štyroch. Koľkými spôsobmi vieme tieto čokolády zabaliť? (Čokolády sú rovnaké, a teda nás zaujíma len množstvo čokolád v baleniach.)

Výsledok: 49

Riešenie:

Keďže máme 25 čokolád, vieme, že v každej možnosti musí byť aspoň jedna čokoláda zabalená samostatne (akýkoľvek počet balení po dvoch alebo po štyroch nám dokopy dá iba párny počet čokolád). Preto čokolád zbalených po jedna musí byť nepárny počet. Po štyri čokolády môžeme zabaliť 0, 1, 2, 3, 4, 5 alebo 6-krát. Ak ich zbalíme 6-krát, tak to je jediná možnosť $(6 \cdot 4 + 1)$. Ak 5-krát, tak nám treba zvyšných 5 čokolád zbaliť v baleniach po jednej alebo dvoch čokoládach. To vieme spraviť troma spôsobmi: $5 \cdot 1$, $2 \cdot 2 + 1$, $1 \cdot 2 + 3 \cdot 1$. Keď uložíme čokolády do štyroch balení po štyri, tak zvyšné čokolády vieme uložiť piatimi spôsobmi. Ak použijeme tri balenia po štyri, tak je sedem spôsobov, ak dve, tak deviatimi spôsobmi, ak jedno balenie po štyroch, tak máme 11 spôsobov. Keď nezbalíme čokolády ani raz po štyri, vtedy existuje trinásť možností uloženia čokolád.

Teraz všetky tieto možnosti sčítame a dostaneme: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$.

Preto je 49 možností.

Úloha 8:
Predavač má k dispozícii 10 závaží s hmotnosťami 1, 2, 3, 4, . . . ,10 kg (z každej hmotnosti jedno). Ktoré z nich si má vybrať, aby mohol odvážiť ľubovoľnú celočíselnú hmotnosť od 1 kg do 11 kg a aby vybrané závažia mali v súčte čo najmenšiu hmotnosť?

Výsledok: 1 kg, 2 kg, 3 kg, 5 kg

Riešenie:

Zrejme potrebujeme závažia so súčtom hmotností aspoň 11 kg, pretože potrebujeme vedieť odvážiť aj 11 kg. Jedno závažie zjavne stačiť nebude. Všimnime si, že ak si zoberiem nejaké závažia, tak viem odvážiť ich hodnoty, súčet každej dvojce a rozdiel každej dvojce. Ak by sme zvolili dve závažia, vieme dostať najviac 4 rôzne hodnoty. Ak by sme zobrali 3, vieme dostať najviac 9 rôznych hodnôt. Najmenej teda potrebujeme 4 závažia v hmotnosti aspoň 11kg. Zo štyroch závaží sa dá vyskladať 11 kg, len jedným spôsobom a to: 1 kg, 2 kg, 3 kg, 5 kg. Ľahko overíme, že z týchto 4 závaží sa dá vyskladať každá z hodnôt.

Úloha 9:
Ferko si myslí také dvojciferné číslo, že ak ho napíšeme dvakrát za sebou, výsledné číslo bude deliteľné deviatimi. Ak ho napíšeme trikrát za sebou, výsledné číslo bude deliteľné ôsmimi. Aké dvojciferné číslo si myslí Ferko?

Výsledok: 72

Riešenie:

Ak napíšeme dvojciferné číslo dvakrát za sebou, výsledné číslo bude deliteľné 9. To znamená, že ciferný súčet tohto čísla musí byť deliteľný 9. To nastane práve vtedy, keď pôvodné dvojciferné číslo má ciferný súčet tiež deliteľný 9. Ak napíšeme toto číslo trikrát za sebou, výsledné číslo bude deliteľné 8. Aby bolo číslo deliteľné 8, musí byť deliteľné aj 4, a preto je aj jeho posledné dvojčíslie deliteľné 4. To znamená, že pôvodné dvojciferné číslo musí byť tiež deliteľné 4. Ferkovo číslo je násobok 4 aj 9, a preto to môže byť len 36 alebo 72. Ľahko overíme, že 363636 nie je deliteľné 8, avšak 727272 je. To znamená, že Ferkovo číslo je 72.

Úloha 10:
Aká je posledná cifra súčtu $1! + 2! + 3! + \cdots + 2016!$? $(n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)$

Výsledok: 3

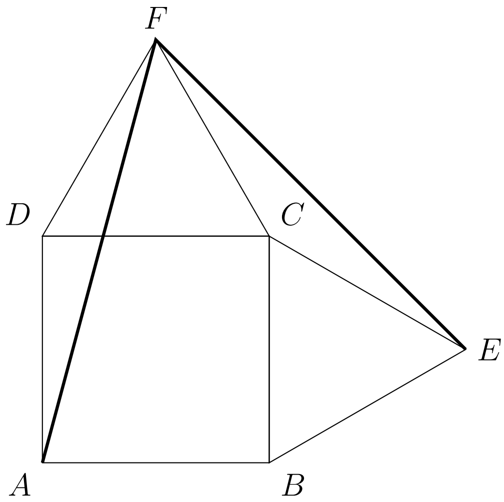
Riešenie:

Vieme, že faktoriál je súčin po sebe idúcich čísel, resp. $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$. Ďalej vieme, že 0 sa končia všetky čísla, ktoré majú vo svojom prvočíselnom rozklade čísla 5 a 2. Z tohto vieme ľahko vyvodiť, že všetky faktoriály, kde $n > 4$ sa končia na 0. Teda súčet $5! + 6! + \cdots + 2016!$ sa bude tiež končiť nulou. Zrátať si $4! + 3! + 2! + 1!$ už nie je ťažké. Výsledok je 33, a preto vieme, že poslednou cifrou výsledku príkladu je 3.

Úloha 11:
Je daný štvorec $ABCD$. Nad stranami BC a CD vytvoríme rovnostranné trojuholníky BCE a CDF tak, aby body E, F ležali mimo štvorca. Zistite veľkosť uhla AFE.

Výsledok: $60°$

Riešenie:



Najprv si uvedomíme, že uhol AFE je súčtom uhla AFC a uhla CFE. Keďže trojuholníky CDF a BCE sú rovnostranné, tak všetky ich uhly majú $60°$ a ich strany sú zhodné. A keďže sú nad stranami štvorca, tak sú zhodné aj so stranami štvorca. Teraz sa pozrieme na trojuholník ADF, ktorý je rovnoramenný s ramenami AD a DF. Vieme,že $|\sphericalangle ADF| = |\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle CDF|$, kde $|\sphericalangle ADC| = 90°$ a $|\sphericalangle CDF| = 60°$. Preto $|\sphericalangle ADF| = 150°$ a v trojuholníku ADF je to uhol oproti základni, lebo ho zvierajú ramená.

Teda uhly DAF a DFA sú rovnaké a platí $|\sphericalangle DFA| = 15°$, kvôli tomu, že súčet uhlov v trojuholníku ADF je $180°$.

Podobne sa pozrieme na trojuholník EFC a na uhol pri vrchole C, pri ktorom sa nachádzajú štyri uhly, kde tri poznáme, a to sú $|\sphericalangle DCB| = 90°$, $|\sphericalangle DCF| = 60°$ a $|\sphericalangle BCE| = 60°$. Ak od $360°$ odrátame ich súčet, tak dostaneme, že $|\sphericalangle FCE| = 150°$. A tu máme zase rovnoramený trojuholník s uhlom oproti základni FCE a rovnako ako predtým určíme, že $|\sphericalangle CFE| = |\sphericalangle CEF| = 15°$.

Vieme, že $|\sphericalangle DFA| + |\sphericalangle AFC| = |\sphericalangle DFC| = 60°$. Tiež vieme, že $|\sphericalangle DFA| = 15°$, a preto $|\sphericalangle AFC| = 45°$. A už poznáme aj uhol AFC a uhol CFE, teraz ich zrátame a dostaneme $|\sphericalangle AFE| = |\sphericalangle AFC| + |\sphericalangle CFE| = 45° + 15° = 60°$.

Úloha 12:
Kladné celé číslo voláme *vskutku interesantné*, ak je zložené z dvoch cifier a každá z nich je použitá práve dvakrát. Napríklad 1331 je *vskutku interesantné*, ale 1113, 1111, 1333 a 303 nie sú. Určte počet *vskutku interesantných* čísel.

Výsledok: 243

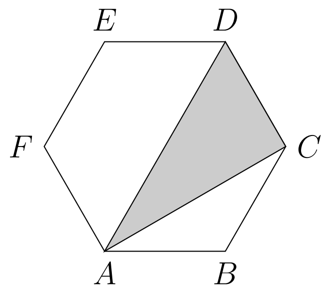
Riešenie:

Podľa zadania sú všetky *vskutku interesantné* čísla štvorciferné. Na prvej pozícii *vskutku interesantného* čísla môže byť ľubovoľná cifra od 1 po 9, to je 9 možností. Na jednej zo zvyšných troch pozícií bude rovnaká cifra ako na prvej pozícii, čo nám dáva 3 možnosti. Na zvyšných miestach bude iná cifra, ktorá môže byť ľubovoľná od 0 po 9 okrem tej, ktorá je na prvej pozícii. Tu je vždy 9 možností. Všetky výbery, ktoré tu boli spomenuté, su nezávislé, preto počet *vskutku interesantných* čísel je $9 \cdot 3 \cdot 9 = 243$.

Úloha 13:
Majme pravidelný šesťuholník $ABCDEF$. Koľkokrát je obsah šesťuholníka $ABCDEF$ väčší ako obsah trojuholníka ACD?

Výsledok: 3

Riešenie:



Úsečka AD rozdeľuje šesťuholník $ABCDEF$ na polovicu. Úsečka BE zrejme prechádza stredom 6-uholníka a je rovnobežná so stranou CD. Trojuholníky ACD a BCD majú spoločnú základňu CD a výška v trojuholníku BCD je polovičná oproti výške v trojuholníku ACD. Trojuholník ABC má rovnaký obsah ako BCD, lebo šesťuholník je pravidelný. To znamená, že trojuholník ACD zaberá dve tretiny z polovice šesťuholníka, teda tretinu z celého obsahu. Šesťuholník je 3-krát väčší.

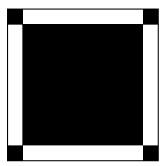
Úloha 14:
Súčet niekoľkých (ale najmenej dvoch) po sebe idúcich prirodzených čísel je 1000. Aké najväčšie číslo medzi nimi môže byť?

Výsledok: 202

Riešenie:

Najprv si musíme uvedomiť, že čím viac čísel bude v súčte, tým menšie bude najväčšie číslo v danom súčte. Súčet môže byť tvorený párnym počtom čísel, napr. súčet dvoch čísel, alebo nepárnym počtom, napr. súčet troch čísel. Takýto súčet jednoducho dostaneme, ak 1000 vydelíme počtom čísel v súčte. Napríklad pri súčte dvoch: $1000/2 = 500$. Teraz vieme, že potrebujeme dve po sebe idúce čísla, pričom zatiaľ máme $500 + 500 = 1000$, takže jednu päťstovku buď zväčšíme o jedna $(500 + 501 = 1001)$ alebo zmenšíme o jedna $(499 + 500 = 999)$. Síce máme súčet dvoch po sebe idúcich čísel, no nevyhovuje to – súčet nie je 1000. Takto môžeme pokračovať aj ďalej. Pre 3: $1000/3 = 333{,}333\ldots$, z tohto môže byť len $332+333+334 = 999$ alebo $333+334+335 = 1002$. Ani 3 nevyhovuje. Pre 4: $1000/4 = 250$, $249+250+251+252 = 1002$ alebo $248+249+250+251 = 998$. Ani 4 nevyhovuje. Pre 5: $1000/5 = 200$, $198+199+200+201+202 = 1000$, a my hľadáme najväčšie číslo, ktoré môže byť v takomto súčte a to je 202.

Úloha 15:



Na obrázku je nakreslená „skoromagická“ vreckovka. Je čierno-biela, pričom čiernu časť tvoria štvorce a bielu časť tvoria obdĺžniky. Keby mali biela a čierna časť rovnaký obsah, bola by vreckovka magická. Aké rozmery má magická vreckovka, ktorej rohový štvorec má obsah 16 cm^2?

Výsledok: 16 cm $\times$ 16 cm

Riešenie:

Najprv sa pozrieme na štvrtinu vreckovky. Keďže táto vreckovka je symetrická, tak aj pre túto štvrtinu platí, že obsah bielej aj čiernej časti je rovnaký. Túto štvrtinu si rozdelíme na štyri kúsky ako na obrázku. V ľavom hornom kúsku máme dva biele a dva čierne štvorce s rovnakým obsahom. V pravom hornom a v ľavom dolnom kúsku máme čierny a biely obdĺžnik s rovnakým obsahom. Čiže v týchto troch kúskoch je obsah bielej a čiernej časti rovnaký. Zostal nám pravý dolný kúsok, ktorý je celý čierny. Z toho vyplýva, že ak je vreckovka magická, tak tento kúsok tam nesmie byť. Čiže ak budeme rozdeľovať vreckovku týmto spôsobom, musí sa skladať iba z jedného kúsku, a to takého, aby obsahoval dva čierne a dva biele štvorce. Takže celá vreckovka musí vyzerať ako pravý horný kúsok. Inak by tam vznikol aj štvrtý kúsok, a tým pádom by bol obsah čiernej časti väčší. Keďže rohový štvorec má rozmery 4 cm × 4 cm, potom štvrtina má rozmery 8 cm × 8 cm, lebo sa skladá zo štyroch takýchto štvorcov. Celá vreckovka má rozmery 16 cm × 16 cm.

Úloha 16:
Nájdite najmenšie prirodzené číslo pre ktoré platí, že súčin jeho cifier je rovný 9!. ($9! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 9$)

Výsledok: 2578899

Riešenie:

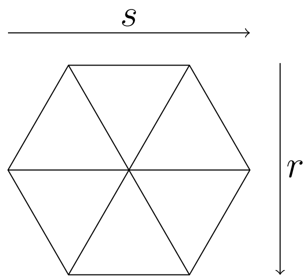
Našou úlohou je nájsť najmenšie číslo, ktoré spĺňa istú podmienku týkajúcu sa jeho cifier. Preto chceme v prvom rade docieliť, aby toto číslo malo čo najmenej cifier. Potom postupne z ľavej strany čísla sa snažíme, aby každá cifra bola čo najmenšia. Prvočíselný rozklad súčinu 9! je $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$. Z týchto prvočísel potrebujeme poskladať cifry tak, aby ich bolo čo najmenej. Zrejme prvočísla 5 a 7 budú samostatne tvoriť cifry, pretože po vynásobení akýmkoľvek prvočíslom dostaneme dvojciferné číslo, nie cifru. Ďalej pracujeme už s prvočíslami 2 a 3. Cifra môže byť len jeden z týchto súčinov: 3^2, 2^3, $2 \cdot 3$, 2^2, 3, 2, 1. Zvyšné prvočísla vieme rozdeliť do 5 cifier (napríklad 4, 4, 8, 9, 9), ale nie len do 4. Výsledné číslo bude preto mať 7 cifier.

Začnime prvou. Najmenšia možná cifra, ktorú môžeme použiť, je 2. Potom ale musíme nájsť také rozdelenie prvočísel do cifier, aby jedna z cifier bola 2. Určite v čísle budú cifry 2, 5, 7 a rozdelenie zvyšných prvočísel ($2^6 \cdot 3^4$) do 4 cifier je už jednoznačné: 8, 8, 9, 9. Ďalej druhá cifra nech je čo najmenšia, teda 5. Rovnakým postupom určíme ďalšie cifry, v poradí: 7, 8, 8, 9, 9.

Úloha 17:
Máme ihrisko v tvare pravidelného šesťuholníka. O jeho rozmeroch vieme, že najväčšia vzdialenosť medzi jeho rohmi vynásobená vzdialenosťou protiľahlých strán je rovná 80 m^2. Akú plochu v m^2 má ihrisko?

Výsledok: 60

Riešenie:



Najväčšiu vzdialenosť medzi rohmi si označíme ako r a vzdialenosť protiľahlých strán ako s.

Pravidelný šesťuholník vieme rozdeliť na šesť zhodných trojuholníkov (viď obr.), pričom si môžeme všimnúť, že vzdialenosť s je dvakrát výška jedného trojuholníka a vzdialenosť r je dvakrát strana trojuholníka.

Teda obsah jedného z každého je $((r/2) \cdot (s/2))/2$ (výška krát základňa vydelená dvomi), čo je po úprave $(r \cdot s)/8$ a keďže vieme, že $r \cdot s$ je 80 m^2, tak obsah jedného trojuholníka je 10 m^2. Obsah celého šesťuholníka bude $6 \cdot 10 = 60$ m^2.

Úloha 18:
Dano sa pri opravovaní úlohy rozhodol, že zo sto riešiteľov, ktorí poslali úlohu, udelí plný počet bodov práve trom. Aby týchto troch šťastlivcov nevyberal úplne náhodne, očísloval riešenia číslami $1, 2, \ldots, 100$ a rozhodol sa, že tieto tri riešenia vyberie tak, aby číslo jedného z nich bolo aritmetickým priemerom čísel zvyšných dvoch. Koľko má Dano možností na výber takýchto rôznych trojíc?

Výsledok: 2450

Riešenie:

Na začiatok si treba uvedomiť, že priemer je daný dvomi zvyšnými číslami, ktoré si Dano vyberie.

Preto vyberáme len dve čísla. Na to, aby bol aritmetický priemer dvoch čísel celé číslo, musí byť súčet týchto dvoch čísel párny. Párny súčet dostaneme, ak sčítame dve párne alebo dve nepárne čísla.

Chceme teda vybrať dve nepárne prirodzené čísla menšie ako 100. Ak jedno bude 1 tak máme $50 - 1$ možností na vybranie druhého, pretože nepárnych prirodzených čísel menších ako 100 je 50. Ak si ako prvé číslo vyberieme 3, tak musíme uvažovať ďalších 48 možností.

Je to tak preto, lebo ako druhé číslo nechceme vybrať nič menšie ako prvé číslo keďže takáto možnosť už bola zarátaná pre to nižšie číslo.

Takto sa dostaneme až po poslednú možnosť 97 a 99. Na výber dvoch nepárnych čísel máme $49 + 48 + 47 + \cdots + 1$ možností. Vyrátať takýto súčet môžeme vzorcom $49 + 48 + 47 + \cdots + 1 = 49 \cdot 50/2$. Keďže aj párnych prirodzených čísel menších ako 100 je 50, tak na vybratie dvoch párnych čísel máme tiež $49 \cdot 50/2$. V súčte to je teda $49 \cdot 50 = 2450$ možností.

Iné riešenie:

Počet rôznych trojíc, ktoré hľadáme je rovnaký ako počet možností ako dostať každý z možných priemerov. Čísla 1 a 100 priemermi byť nemôžu, pretože neexistuje menšie, respektíve väčšie číslo a aritmetický priemer je vždy medzi číslami, z ktorého ho rátame. Čísla 2 a 99 majú jednu možnosť ako byť priemerom. Čísla 3 a 98 majú dve možnosti.

Vo všeobecnosti vieme takto počet možností určiť tým, koľko je menších, respektíve väčších prirodzených čísel od 1 do 100 ako dané číslo, keďže priemer musí byť vždy medzi číslami, z ktorých sme ho rátali. Súčet všetkých týchto možností teda je $1 + 2 + \cdots + 48 + 49 + 49 + 48 + \cdots + 2 + 1$ a po úprave $2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 49)$. Použitím vzorca ako v prvom riešení znova dostávame počet možností $2 \cdot (49 \cdot 50/2) = 49 \cdot 50 = 2450$.

Úloha 19:
Na tabuli sú tri čísla x, y, z. Najväčší spoločný deliteľ čísel x a y je 15. Najväčší spoločný deliteľ čísel y a z je 6. Súčin čísel y a z je 1800. Najmenší spoločný násobok čísel x a y je 3150. Zistite hodnotu čísel x, y, z.

Výsledok: $x = 315$, $y = 150$, $z = 12$

Riešenie:

Najprv si urobíme prvočíselný rozklad čísla 1800. Takto dostávame: $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Keďže najväčší spoločný deliteľ čísel y a z je 6, tak čísla y a z sú násobkom čísla 6. Zároveň vieme, že jedno z čísel y a z je násobkom čísla 25, pretože v prvočíselnom rozklade čísla 1800 je dvakrát číslo 5, a zároveň najväčší spoločný deliteľ čísel y a z nie je násobkom čísla 5. Nakoľko najväčší spoločný deliteľ čísel x a y je 15, tak vieme, že násobkom čísla 25 bude práve y. To znamená, že buď $y = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150$ alebo $y = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$. Vieme však aj to, že najmenší spoločný násobok čísel x a y je 3150, a preto $y = 150$. Z toho dostávame $z = 12$.

Teraz potrebujeme zistiť už iba hodnotu čísla x. Začneme tým, že urobíme prvočíselný rozklad čísla 3150. Dostávame: $3150 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$. Vďaka podmienke o najväčšom spoločnom deliteli čísel x a y vieme, že číslo x nemá v prvočíselnom rozklade číslo 2 a číslo 5 sa tam nachádza iba raz. Teraz máme 3 možnosti. Tie sú:

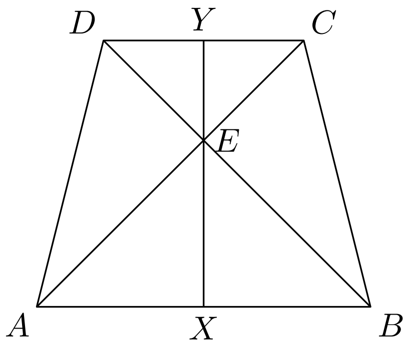
- $x = 3^2 \cdot 5 \cdot$,
- $x = 3 \cdot 5 \cdot 7$,
- $x = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

Zostáva nám overiť iba to, kedy bude najmenší spoločný násobok čísel x a y 3150. Táto situácia nastáva jedine v tretej možnosti. To znamená, že $x = 315$.

Úloha 20:
O lichobežníku $ABCD$ so základňami AB a CD vieme, že jeho uhlopriečky sú na seba kolmé. Ďalej vieme, že veľkosti uhlov BAC a BDC sú rovnaké a aritmetický priemer dĺžok jeho základní je 8 cm. Vypočítajte obsah tohto lichobežníka.

Výsledok: 64 cm^2

Riešenie:



Priesečník uhlopriečok označme E. Do lichobežníka dokreslíme výšku prechádzajúcu bodom E a jej krajné body na AB a CD označme X a Y v tomto poradí. Uhol BAC je rovnaký ako uhol ACD, lebo sú to striedavé uhly. Rovnako aj uhol BDC má veľkosť ako uhol ako ABD. Podľa zadania aj $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$, takže $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle ABD|$. V trojuholníku je súčet uhlov 180° a teda $2 \cdot |\sphericalangle BAC| + 90° = 180°$. Potom $|\sphericalangle BAC| = 45°$ a teda aj $|\sphericalangle BEX| = 45°$ aj $|\sphericalangle CEY| = 45°$. Vidíme, že trojuholník BXE je rovnoramenný so základňou BE. Rovnako trojuholník CEY so základňou CE.

Keďže aj trojuholníky ABE a CDE sú rovnoramenné, tak bod X je stred strany AB a Y stred strany CD. Potom vieme, že výška XY je rovnako dlhá ako polovica súčtu dĺžok základní, čo je vlastne ich aritmetický priemer. Obsah lichobežníka sa ráta ako súčin aritmetického priemeru dĺžok základní a výšky, takže obsah lichobežníka $ABCD$ je $8 \cdot |XY| = 8 \cdot 8 = 64$ cm^2.

Hádanky

Hádanka 1:
Do hrnca postupne pridávame 2/7 zo sliepky, 1/6 z ničoho a 1/2 kozy. Nemiešame, varíme 45 minút na miernom ohni. Čo to je?

Výsledok: slnko

Hádanka 2:
Čím rýchlejšie bežíš, tým ťažšie to chytíš. Čo je to?

Výsledok: dych

Hádanka 3:
Má veľa jazykov, postrach všetkých lesníkov. Čo je to?

Výsledok: oheň

Hádanka 4:
Keď to máš, chceš sa s tým podeliť. Keď sa s tým podelíš, už to nemáš. Čo je to?

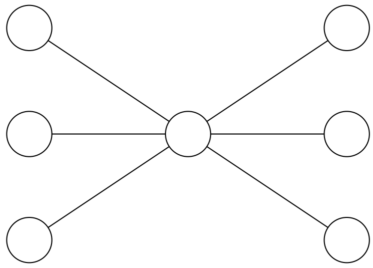
Výsledok: tajomstvo

Hádanka 5:
V polievke som super zeleninou a na slonovi som vecou inou. Čo som?

Výsledok: kel

Hlavolamy

Hlavolam 1:
Do každého z krúžkov doplňte jedno z čísel 2, 3, 4, 5, 6, 7 alebo 8 tak, aby bol súčet každých troch čísel na spoločnej priamke 15 a každé číslo použijete práve raz. Aké číslo bude napísané v strednom krúžku?

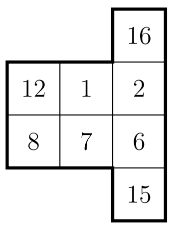


Výsledok: 5

Riešenie:

Súčet čísel od 2 do 8 je 35. Súčet čísel na priamkach má byť $3 \cdot 15 = 45$. Stredné číslo je tam zarátané trikrát, ostatné raz. To znamená, že rozdiel medzi súčtom čísel a súčtom čísel na priamkach je dvakrát väčší ako stredné číslo. To znamená, že do stredu napíšeme 5. Ostatné čísla popárujeme tak, aby dávali súčet 10. To sa dá iba jedným spôsobom, a to 2 a 8, 3 a 7, 4 a 6.

Hlavolam 2:
Odstráňte 2 štvorčeky tak, aby sa obvod útvaru nezmenil a súčet čísel v útvare bol najmenší možný. Útvar sa nesmie rozpadnúť na viacero častí. Do odpoveďového hárku napíšte čísla štvorčekov, ktoré ste odstránili.



Výsledok: 16 a 7

Riešenie:

Chceme, aby súčet čísel na 2 odstránených štvorčekoch bol najväčší možný. Tak skúsime odstrániť štvorček s číslom 16. Tým sa zmenšil obvod o 2. Čiže chceme zobrať štvorček s čo najväčším číslom, tak aby sa obvod zväčšil o 2. Ak odoberieme 15, 12 alebo 8, obvod sa zmenší. Ak odoberieme 7, obvod sa zväčší o 2. To nám vyhovuje, súčet na odstránených štvorčekoch je 23. Ak by sme na začiatku zobrali 15, tak symetricky by sme tiež mohli odobrať len 7 a súčet by bol menší.

Ak by sme zobrali ľubovoľné dva štvorčeky zo zvyšných šiestich, súčet by bol najviac 20, čo nám nevyhovuje.Takže odstránime štvorčeky s číslami 16 a 7.

Hlavolam 3:
Archeológovia vykopali papyrus so zvláštnou tabuľkou s výrezom v tvare “obráteného Z” (viď obrázok). Ak v tabuľke zakrúžkujeme ľubovoľných päť čísel tak, aby v každom stĺpci aj riadku bolo zakrúžkované práve jedno a týchto päť čísel sčítame, dostaneme vždy rovnaký súčet. Aký bude súčet čísel na sivých políčkach?

0				4
		3	2	
				9
	8	5		
6		7		

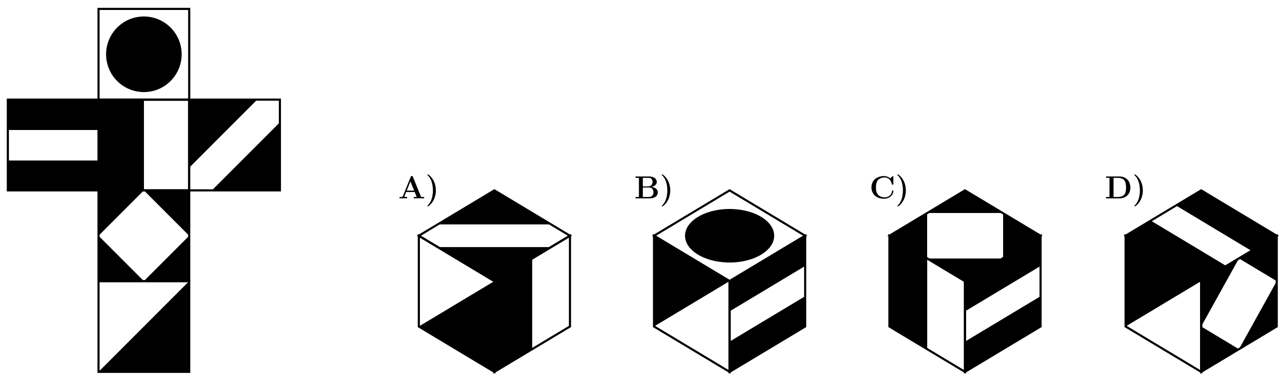
Výsledok: 26

Riešenie:

Na začiatku je potrebné zistiť, aký súčet vlastne máme dostať ak vyberieme čísla v úlohe popísaným spôsobom. Vyberme napríklad čísla $0+8+7+2+9 = 26$. Vidíme, že čísla sme vybrali ”dobre” a ich súčet je 26. Teda pre všetky takéto pätice musí byť súčet 26. Všimnime si, že aj pätica sivých políčok je vybraná ”dobre” a teda ich súčet musí byť tiež 26.

0	4	1	0	4
2		3	2	6
5				9
4	8	5		8
6	10	7	6	10

Hlavolam 4:
Určte, ktorá kocka sa dá zložiť z danej siete. Do odpoveďového hárku napíšte písmeno, pod ktorým sa kocka skrýva.

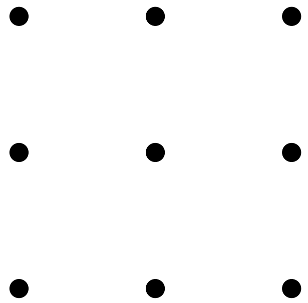


Výsledok: B

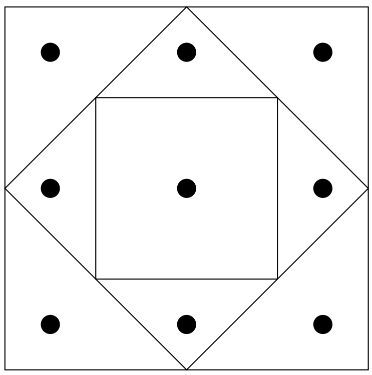
Riešenie:

Stačí si všímať susedné strany a ich natočenie. Vidíme, že jediná možnosť, ktorá môže nastať je B.

Hlavolam 5:
Na obrázku vidíte deväť čiernych bodov. Vašou úlohou je pomocou troch štvorcov ohraničiť každý bod zo všetkých strán tak, aby bol vo svojej vlastnej ohrádke (ohraničený čiarami štvorcov) sám.



Výsledok:



Riešenie:

Jeden štvorec musíme použiť na ohraničenie bodov od okolitého vonkajšieho prostredia. Druhým otočeným štvorcom oddelíme krajné 4 body do samostatnej ohrádky. Tretím menším štvorcom oddelíme stredný bod od ostatných v otočenom štvorci a tiež navzájom medzi sebou.

Lomihlav

Lomihlav je matematická súťaž organizovaná Združením STROM a Prírodovedeckou fakultou Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach pre žiakov základných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií. V roku 2016 sa koná už 16. ročník tejto súťaže.

Súťaž trvá (čarovných) 66 minút. Súťažiaci zo základných škôl (7. – 9. ročník) a príslušných tried osemročných gymnázií (sekunda až kvarta) súťažia v štvorčlenných družstvách. Družstvá dostanú na začiatku 20 matematických úloh, 5 hlavolamov a 5 hádaniek. Úlohy sú približne zoradené podľa náročnosti, pričom žiaci ich môžu riešiť v ľubovoľnom poradí. Družstvá získavajú body za jednotlivé úlohy, hlavolamy a hádanky podľa ročníkov súťažiacich v družstve, a to podľa tabuľky:

Ročník				Správny výsledok			Nesprávny	Neodovzdané
1. žiak	2. žiak	3. žiak	4. žiak	úloha	hlavolam	hádanka	výsledok	riešenie
7	7	7	7	4,20	2	1	-1	0
7	7	7	8	4,05	2	1	-1	0
7	7	7	9	3,90	2	1	-1	0
7	7	8	8	3,90	2	1	-1	0
7	7	8	9	3,75	2	1	-1	0
7	7	9	9	3,60	2	1	-1	0
7	8	8	8	3,75	2	1	-1	0
7	8	8	9	3,60	2	1	-1	0
7	8	9	9	3,45	2	1	-1	0
7	9	9	9	3,30	2	1	-1	0
8	8	8	8	3,60	2	1	-1	0
8	8	8	9	3,45	2	1	-1	0
8	8	9	9	3,30	2	1	-1	0
8	9	9	9	3,15	2	1	-1	0
9	9	9	9	3,00	2	1	-1	0

Zadania starších ročníkov nájdete na *https://matik.strom.sk/sk/lomihlav*.

http://www.strom.sk
http://matik.strom.sk
http://matik.strom.sk/sk/lomihlav

http://www.upjs.sk/prirodovedecka-fakulta
http://skoly.upjs.sk