Lomihlav

Košice 1. 12. 2017

Úlohy

Úloha 1:
Matúš robil grill-párty. Ku každým 7 klobásam, čo ugriloval, ugriloval aj 4 steaky. Koľko steakov ugriloval Matúš, ak vieme, že ugriloval 42 klobás?

Výsledok: 24

Riešenie:

Matúš dokopy ugriloval 6-krát po 7 klobás, lebo $42 = 6 \cdot 7$. Ku každým 7 klobásam ugriloval aj 4 steaky. Toto urobil 6-krát, dokopy preto Matúš ugriloval $6 \cdot 4 = 24$ steakov.

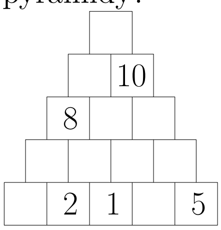
Úloha 2:
V nepriestupnom roku bolo 53 nedieľ. Na aký deň v týždni vyšiel sviatok troch kráľov (6.1.)?

Výsledok: piatok

Riešenie:

Rok má $365 = 52 \cdot 7 + 1 = 6 \cdot 52 + 53$ dní. To je 52 celých týždňov a jeden deň. Preto sa šesť dní v týždni bude nachádzať v roku 52-krát, okrem jedného, ktorý tam bude 53 krát. Zároveň vieme, že prvý a posledný deň roku sú rovnaké dni v týždni a je to ten deň, ktorý sa v roku nachádza 53-krát. Zo zadania vieme, že je to nedeľa, a preto je šiesty deň v roku piatok.

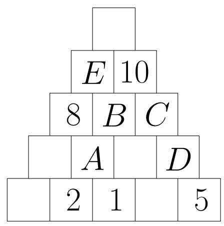
Úloha 3:
Janka nakreslila pyramídu. Povedala, že do políčok je potrebné vpísať také celé čísla, aby sa súčin dvoch čísel v rade vedľa seba rovnal číslu v políčku nad nimi. Aké číslo bude na vrchole Jankinej pyramídy?



Výsledok: 160

Riešenie:

Ako prvé doplníme, že $A = 2 \cdot 1 = 2$.



Potom sa pozrieme na čísla B a C. Vieme, že ich súčin je 10. Môžu to teda byť 1 a 10, 2 a 5, 5 a 2 alebo 10 a 1.

Číslo B je však nad číslom A, a keďže $A = 2$ a B vzniklo súčinom A a ďalšieho čísla, číslo B je určite párne. Ostali nám už iba dve možnosti: $B = 2$ a $C = 5$ alebo $B = 10$ a $C = 1$.

Teraz sa pozrieme na číslo C – to je nad číslom D, ktoré je nad čislom 5. D teda musí byť deliteľné 5, a rovnako aj C. Jediná správna možnosť preto je: $B = 2$ a $C = 5$. Potom $E = 2 \cdot 8 = 16$, čiže na vrchole je $16 \cdot 10 = 160$.

Úloha 4:
Timka napiekla 77 koláčikov pre 7 hladných vedúcich. Sedem vedúcich si zoradila podľa výšky od najmenšieho. Postupne im dávala koláčiky tak, že najmenšiemu dala niekoľko koláčikov a každý ďalší dostal o 1 koláčik viac. Takto rozdala všetky koláčiky. Koľko koláčikov dostal najvyšší?

Výsledok: 14

Riešenie:

Keďže každý vedúci dostal o 1 koláčik viac ako vedúci pred ním, a vedúcich je 7, tak hľadáme 7 po sebe idúcich prirodzených čísel, ktorých súčet je 77. To znamená, že každý dostane priemerne $77/7 = 11$ koláčikov (Čo to znamená? Keď stredný, 4. vedúci, dostane x koláčikov, tak 3. dostane o 1 menej a 5. o 1 viac, čo znamená, že dokopy dostanú 2-krát toľko, čo prostredný, teda priemerne x, rovnako to platí pre 2. a 6. a 1. a 7.). Keďže čísla sú po sebe idúce, 11 koláčikov dostane len stredný vedúci, v našom prípade štvrtý najvyšší. Z toho sa dá už ľahko zistiť, že prvý dostane 8 koláčikov, druhý 9, tretí 10, ... až nakoniec posledný, najvyšší vedúci, dostane 14 koláčikov.

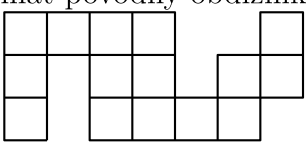
Úloha 5:
Ak súčet 2000 za sebou idúcich celých čísel je 1000, aký je súčet cifier najväčšieho z nich?

Výsledok: 1

Riešenie:

Všimnime si, že v postupnosti musíme použiť aj záporné čísla, nakoľko súčet čísel je menší ako ich počet. Taktiež vieme, že 0 nám so súčtom nespraví nič. Keď ku nejakému kladnému číslu nájdeme jeho opačné číslo (to je také, ktoré má rovnakú hodnotu, ale s mínusom), tak nám to tiež neovplyvní celkový súčet čísel (keďže súčet týchto dvoch je 0). Zvolíme si čísla od -999 po 999, tých je 1999. V tejto postupnosti, ktorá má zatiaľ 1999 členov je súčet 0. Pridaním 2000. člena postupnosti, čísla 1000, získame súčet 1000, čo sme chceli dosiahnuť. Najväčšie číslo je preto 1000 a jeho ciferný súčet je 1.

Úloha 6:
Z obdĺžnika Peťo odstrihol 11/16 jeho obsahu. Ostal mu útvar ako na obrázku. Aké rozmery mohol mať pôvodný obdĺžnik, ak jeho rozmery boli celé čísla? Napíšte všetky možnosti.



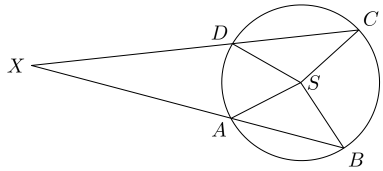
Výsledok: 3×16, 4×12, 6×8

Riešenie:

Útvar, ktorý nám ostal na obrázku, je 5/16 z jeho pôvodného obsahu, keďže 11/16 odstrihol. Ostalo nám 15 štvorčekov, ktoré predstavujú 5/16 z pôvodného obsahu. Vieme si teda dorátať, aký obsah mal pôvodný obdĺžnik nasledujúcim výpočtom: $15/5 \cdot 16 = 48$. Teraz, keď už vieme, aký obsah mal pôvodný obdĺžnik, potrebujeme už len vypísať možnosti, aké dlhé mohol mať strany. V nákrese vidíme, že jedna strana musí byť aspoň 3 a druhá aspoň 7. Vyhovujúce dĺžky strán obdĺžnika s obsahom 48 sú teda 3×16, 4×12 a 6×8.

Úloha 7:

Na kružnici so stredom v bode S sú vyznačené 4 body A, B, C, D. Platí, že $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle CSD| = 100°$. Zistite veľkosť uhla DXA .



Výsledok: 20°

Riešenie:

Trojuholník BCS je rovnoramenný (so základňou BC), keďže ako polomery jednej kružnice sú SB a SC zhodné. Pri hlavnom vrchole je vnútorný uhol 100°, teda pri základni bude $(180° - 100°)/2 = 40°$. Obdobne 40° majú aj uhly pri základniach rovnoramenných trojuholníkov ABS a CDS (zhodných podľa *sus*). Potom $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCD| = 2 \cdot 40° = 80°$, a teda z trojuholníka XBC vieme, že $|\sphericalangle DXA| = 180° - 80° - 80° = 20°$.

Úloha 8:

Na oslavu Tomášových narodenín prišli 4 hostia: Janka, Robo, Viki a Martin. Priemerný vek všetkých piatich bol 33 rokov. Potom sa oslávenec odfotil so slečnami. Priemerný vek ľudí na fotke bol 29 rokov. Aj chlapi sa chceli odfotiť s Tomášom. Priemerný vek týchto troch na fotke bol 38 rokov. Koľké narodeniny oslavoval Tomáš?

Výsledok: 36

Riešenie:

Mená si postupne označíme písmenami v poradí T, J, R, V, M. Aritmetický priemer je súčet nejakých hodnôt, ktoré sú predelené ich počtom (napríklad takto rátate svoj priemer známok na konci roka z väčšiny predmetov). V našom prípade to je súčet vekov ľudí predelený počtom ľudí, s ktorými sme rátali. Na základe týchto informácií vyplývajú zo zadania tieto vzťahy:

$$\frac{T+J+R+V+M}{5} = 33 \qquad \frac{T+J+V}{3} = 29 \qquad \frac{T+R+M}{3} = 38$$

Keď obe strany každej rovnice vynásobíme číslom, ktoré sa nachádza v menovateli, z každej rovnice dostaneme súčet vekov ľudí, ktorí sú vypísaní v čitateli:

$$\begin{array}{lll} T+J+R+V+M = 33 \cdot 5 & T+J+V = 29 \cdot 3 & T+R+M = 38 \cdot 3 \\ T+J+R+V+M = 165 & T+J+V = 87 & T+R+M = 114 \end{array}$$

Z druhej a tretej rovnice vieme vytvoriť jednu rovnicu, v ktorej tieto dve rovnice sčítame:

$$(T+J+V) + (T+R+M) = 87 + 114$$

$$T+J+R+V+M+T = 201$$

Vidíme, že sme dostali rovnicu, v ktorej máme súčet vekov každého z hostí a máme tam dvakrát Tomáša. Číselnú hodnotu pre $T+J+R+V+M$ poznáme, preto môžeme tento súčet odčítať:

$$(T+J+R+V+M+T) - (T+J+R+V+M) = 201 - 165$$

$$T = 36$$

Vidíme, že hodnoty T, J, R, V a M sa nám odčítali a na ľavej strane nám ostalo len T. Na pravej strane máme rozdiel, ktorého výsledok je 36. Preto Tomáš oslavuje svoje 36. narodeniny.

Úloha 9:
Zlepením stien niekoľkých rovnakých menších kociek sme dostali väčšiu kocku. Počet kociek, ktoré sú prilepené práve štyrmi stenami, je 96. Koľko je kociek, ktoré sú prilepené práve piatimi stenami?

Výsledok: 384

Riešenie:

Kocky, ktoré sa nachádzajú vnútri veľkej kocky, sú prilepené práve šiestimi stenami; tie, ktoré sa nachádzajú na rohoch, sú prilepené práve tromi stenami; tie, ktoré sa nachádzajú na niektorej z hrán (okrem rohov), sú prilepené práve štyrmi stenami a tie, ktoré sa nachádzajú na povrchu kocky (okrem rohov a hrán), sú prilepené práve piatimi stenami.

Vieme, že tých na hranách (okrem rohových) je 96 a kocka má 12 hrán, čiže na jednej hrane sa nachádza $96 : 12 = 8$ kociek. Keď k tomu prirátame 2 rohové kocky na každej hrane tak zistíme, že naša kocka má rozmery $10 \times 10 \times 10$. Na každej stene je teda $10 \cdot 10 = 100$ kociek, z čoho 4 sú rohové a $4 \cdot 8 = 32$ je na hranách. Tie zvyšné sú prilepené piatimi stenami a je ich $100 - 4 - 32 = 64$. Keďže stien je na kocke 6 a každá z malých kociek prilepených piatimi stenami sa nachádza práve na jednej stene, tak dokopy ich je $6 \cdot 64 = 384$.

Úloha 10:
Súčin dvoch kladných čísel je dvakrát väčší než ich súčet a súčet je trikrát väčší než ich rozdiel. Aké sú to čísla?

Výsledok: 6 a 3

Riešenie:

Označme hľadané čísla a, b a predpokladajme, že a je aspoň také veľké ako b. Podľa zadania vieme, že platí:

$$a \cdot b = 2 \cdot (a + b) = 2a + 2b,$$

$$a + b = 3 \cdot (a - b) = 3a - 3b.$$

Z druhého vzťahu máme $2a - 4b = 0$, teda $a = 2b$. Po dosadení $a = 2b$ do prvého vzťahu dostaneme:

$$2b \cdot b = 2 \cdot 2b + 2b = 6b.$$

Rovnicu môžeme vydeliť b, keďže sa nerovná 0 (hľadáme kladné riešenia), dostávame $2b = 6$, teda $b = 3$ a $a = 2b = 6$. Riešenie je $a = 6$, $b = 3$.

Úloha 11:
Mimi si napísal čísla od 1 po 999 na tabuľu. Červenou si zakrúžkoval párne čísla zložené len z párnych číslic a modrou nepárne čísla zložené len z nepárnych číslic. Aké číslo dostaneme, keď odčítame počet čísel zakrúžkovaných červenou od počtu modro zakrúžkovaných čísel?

Výsledok: 31

Riešenie:

Všetky čísla zložené len z párnych číslic sú párne (lebo sa končia na párnu cifru) a všetky čísla zložené len z nepárnych číslic sú nepárne (lebo sa končia na nepárnu cifru). Spočítame, koľko je červených čísel zložených len z párnych číslic. Od 1 do 9 sú 4. Dvojciferných je $4 \cdot 5 = 20$, lebo pre prvú cifru máme na výber 4 možnosti: 2, 4, 6 alebo 8 (číslo sa nemôže začínať na 0) a pre druhú cifru máme 5 možností: 0, 2, 4, 6 alebo 8. Trojciferných je $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$, lebo rovnako ako pri dvojciferných, pre prvú cifru máme na výber 4 možnosti a pre druhú aj tretiu cifru máme na výber 5 možností. Dokopy je týchto čísel $4 + 20 + 100 = 124$.

Podobne spočítame, koľko čísel je zložených len z nepárnych číslic (modrých čísel). Od 1 do 9 ich je 5. Dvojciferných je $5 \cdot 5 = 25$, lebo pre prvú aj druhú cifru máme 5 možností, a to 1, 3, 5, 7 a 9. Trojciferných je $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, lebo pre každú z cifier máme 5 možností. Dokopy ich je $5 + 25 + 125 = 155$.

Modrých (nepárnych) čísel je 155 a červených je 124. Ich rozdiel je $155 - 124 = 31$.

Úloha 12:
Filip charakterizoval svoj obľúbený trojuholník ABC týmito výrokmi:

- Trojuholník ABC je pravouhlý.
- Trojuholník ABC je rovnoramenný.
- Veľkosť uhla ABC je 50 stupňov.

Zistite, aké rôzne veľkosti v stupňoch môže mať uhol ACB, ak viete, že práve 1 z týchto výrokov je nepravdivý. Ako výsledok uveďte ich súčet.

Výsledok: $370°$

Riešenie:

Zo zadania vieme, že práve jeden výrok je nepravdivý. Pozrime sa preto na všetky prípady, ktoré mohli nastať.

- Ak by bol tretí výrok nepravdivý, tak trojuholník ABC má uhol $90°$ a dva zhodné uhly, ktoré majú $45°$, teda súčet možných uhlov ACB je zatiaľ $135°$ ($45° + 90°$).
- Ak by bol druhý výrok nepravdivý, tak trojuholník ABC má uhly $90°$, $50°$ a $40°$. Súčet možných uhlov je zatiaľ $225°$ ($135° + 40° + 50°$, $90°$ už nepripočítavame, lebo tento uhol sme už zarátali skôr).
- Ak by bol prvý výrok nepravdivý, tak trojuholník ABC má uhly $50°$, $50°$ a $80°$ alebo $50°$, $65°$, $65°$, podľa toho, ktorá zo strán je základňa. Súčet možných uhlov je preto $370°$ (k predošlému výsledku $225°$ ešte pripočítame $65°$ a $80°$, pričom $50°$ už nepričítavame, lebo sme ho pričítali v predošlom bode).

Úloha 13:
Nájdite najmenšie prirodzené číslo m, pre ktoré platí $nsn(15, m) = nsn(42, m)$, pričom $nsn(x, y)$ značíme najmenší spoločný násobok čísel x a y.

Výsledok: 70

Riešenie:

Najmenší spoločný násobok dvoch čísel musí byť deliteľný oboma číslami, a preto aj všetkými prvočíslami, ktorými sú tieto čísla deliteľné.

Z toho vieme, že $nsn(15, m)$ je určite deliteľný piatimi a tromi. Zároveň $nsn(42, m)$ je deliteľný tromi, dvomi a siedmimi. Keďže ide o to isté číslo, tak toto číslo musí byť deliteľné dvomi, tromi, piatimi a siedmimi. Preto $nsn(15, m) = nsn(42, m)$ je určite aspoň $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ alebo nejaký násobok 210.

Zostáva nájsť najmenšie m. Kedže $nsn(15, m) = 210k$, tak m musí byť deliteľné dvomi a siedmimi, lebo 15 nie je. Zároveň $nsn(42, m) = 210k$, takže m musí byť deliteľné piatimi, lebo 42 nie je. Dokopy sme zistili, že m musí byť deliteľné $2 \cdot 7 \cdot 5 = 70$, preto najmenšie možné m je 70.

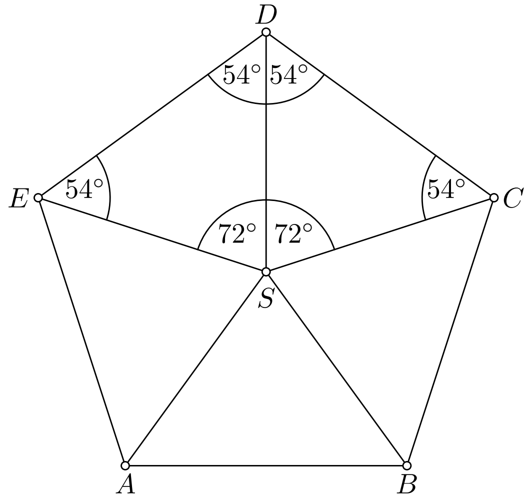
Úloha 14:

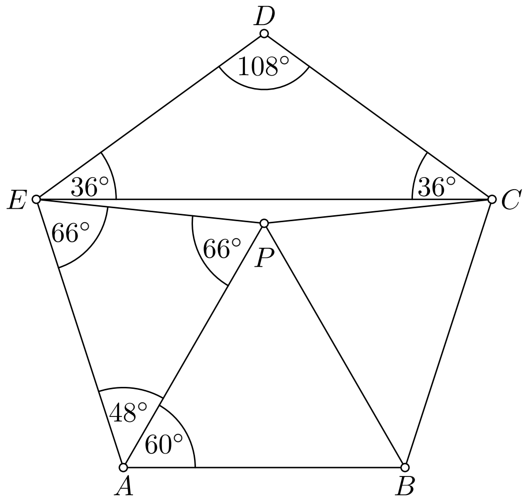
Daný je pravidelný päťuholník $ABCDE$. Zostrojme bod P tak, aby PAB bol rovnostranný trojuholník a bod P ležal vo vnútri päťuholníka $ABCDE$. Akú veľkosť má uhol PEC?

Výsledok: $6°$

Riešenie:

Pre riešenie je potrebná informácia, aký veľký uhol sa nachádza pri každom z vrcholov. Päťuholník si preto rozdelíme na 5 rovnakých rovnoramenných trojuholníkov, ktorých základne sú strany päťuholníka a tretí vrchol majú všetky spoločný, nazvime ho S (stred päťuholníka $ABCDE$). Súčet uhlov okolo bodu S je $360°$, teda každému z trojuholníkov prislúcha $360°/5 = 72°$. Keďže ide o uhol oproti základni v rovnormennom trojuholníku a súčet uhlov v trojuholníku je $180°$, tak vieme, že súčet zvyšných dvoch uhlov v týchto trojuholníkoch bude $108°$, teda oba budú mať po $54°$. Keďže sa pri každom vrchole päťuholníka nachádzajú dva takéto uhly, veľkosť vnútorného uhla pri každom vrchole päťuholníka bude $108°$.





Nad stranou AB si spravíme vo vnútri päťuholníka rovnostranný trojuholník PAB. Keďže je rovnostranný vieme, že jeho vnútorné uhly sú všetký rovné $60°$ a jeho strany sú rovnako dlhé. Pri vrchole A máme teraz dva uhly, jedným z nich je uhol BAP, ktorého veľkosť je $60°$. Ostáva uhol PAE, ktorého veľkosť vieme vypočítať, keďže súčet uhlov pri vrchole A je $108°$. Z toho vyplýva, že

$$|\sphericalangle PAE| = 108° - 60° = 48°.$$

Uhol PAE sa nachádza v rovnoramennom trojuholníku PAE, keďže $|PA| = |AE|$. Z toho vieme určiť, že

$$|\sphericalangle EPA| = |\sphericalangle AEP| = (180° - 48°)/2 = 66°.$$

Ďalej sa pozrieme na rovnoramenný trojuholník ECD, ktorého základňou je EC. Keďže je uhol oproti základni rovný $108°$, pre uhly ECD a DEC platí:

$$|\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle DEC| = (180° - 108°)/2 = 36°.$$

Pri bode E máme tri uhly, ktorých súčet je $108°$. Preto tie, ktoré poznáme, odčítame a dostaneme výsledný uhol, ku ktorého veľkosti sa máme dostať:

$$|\sphericalangle PEC| = 108° - (|\sphericalangle DEC| + |\sphericalangle AEP|) = 108° - (36° + 66°) = 108° - 102° = 6°.$$

Úloha 15:
Aké je najväčšie prvočíslo v prvočíselnom rozklade čísla $9^{18} - 3^{32}$ (9^{18} je súčin osemnástich deviatok a 3^{32} je súčin 32 troják).

Výsledok: 5

Riešenie:

Výraz $9^{18} - 3^{32}$ si môžeme upraviť nasledovne: $9^{18} - 3^{32} = 3^{2\cdot18} - 3^{32} = 3^{36} - 3^{32} = 3^{32}(3^4 - 1) = 3^{32}(3^2 \cdot 3^2 - 1) = 3^{32}(9 \cdot 9 - 1) = 3^{32} \cdot 80$.

Chceme teda zistiť, aké je najväčšie prvočíslo v prvočíselnom rozklade čísla $3^{32} \cdot 80$. Toto číslo už na súčin prvočísel rozložiť vieme, a to nasledovne: $3^{32} \cdot 80 = 3^{32} \cdot 2^4 \cdot 5$.

Najväčšie číslo v prvočíselnom rozklade je teda 5.

Iné riešenie:

Takto sa dá riešenie spísať síce pekne a ľahko, ale rovnako sa na úlohu dalo pozrieť aj bez úprav s mocninami. Na začiatok si uvedomíme, že súčin 18 deviatok (teda 9^{18}) je vlastne súčin 36 troják (keďže každá 9 je vlastne len súčin 2 troják), čiže naše číslo je rozdiel súčinu 36 troják a súčinu 32 troják.

Obe tieto čísla sú deliteľné súčinom 32 troják, pričom ako podiely dostaneme súčin 4 troják a v druhom prípade 1. Keď si to v našom rozdieli podelíme súčinom 32 troják (keďže je to spoločné pre obe čísla), tak súčin 32 troják môžeme písať do prvočíselného rozkladu. K tomu nám ostáva rozložiť ešte to, čo nám po delení z čísel zvýši, teda súčin 4 troják mínus 1 (čo je presne tvar z predošlého spôsobu riešenia $3^{32}(3^4 - 1)$). Toto číslo vieme vyrátať – $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 = 80$. Následne prvočíselný rozklad už ľahko zvládneme $80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$, a teda vidíme, že najväčšie číslo v ňom bude práve 5.

Úloha 16:
V cukrárni sedí za okrúhlym stolom 7 vedúcich. Vieme, že Dano a Mihál sedia pri sebe. Ďalej vieme, že medzi Kubom a Samom sedí práve jeden vedúci. Koľko je rôznych možností ako mohli sedieť? Otočenie stola sa nepočíta.

Výsledok: 72

Riešenie:

Vieme, že Mihál a Dano budú vždy vedľa seba, a to buď v poradí Dano a Mihál, alebo Mihál a Dano, čo sú 2 možnosti. Keďže nerátame s otočením stola a Dano a Mihál nemôžu sedieť medzi Samom a Kubom (pretože medzi nimi sedí práve jeden vedúci), stačí sa nám pozrieť na zvyšných 5 miest, ktoré nie sú uzavreté v kruhu.

Očíslujme si zvyšných 5 miest ako 1, 2, 3, 4 a 5. Keďže medzi Samom a Kubom je práve jeden vedúci, tak Samo a Kubo môžu sedieť len na 1 a 3, 2 a 4 alebo 3 a 5. To sú 3 možnosti, ak Samo je ten prvý a ďalšie 3, ak Kubo je ten prvý, takže spolu 6 možností.

Bez ohľadu na to, na ktorých pozíciách budú sedieť Samo a Kubo, zostanú 3 voľné miesta. Na tieto chceme rozmiestniť 3 zvyšných vedúcich, čo môžeme spraviť $3! = 6$ možnosťami.

Možností na rozmiestnenie všetkých vedúcich je teda $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$.

Úloha 17:

Vraťo, Peťo a Martin majú za manželku každý jednu z troch žien: Natáliu, Ivku alebo Ajšu. Spolu majú 151 rokov (každého vek je prirodzené číslo). Každý muž je o päť rokov starší ako jeho žena. Vraťo je o rok starší než Ivka. Natália s Vraťom majú spolu 48 rokov. Martin s Natáliou majú dokopy 52 rokov. Koľko rokov má Ivkin manžel?

Výsledok: 30

Riešenie:

Vraťo nemôže byť manžel Ivky, pretože rozdiel ich vekov je 1. Súčet vekov Vraťa a Natálie je párne číslo. Ak by bol Vraťo manžel Natálie, rozdiel ich vekov by bol nepárny. Z čísel, ktoré majú nepárny rozdiel, musí byť jedno párne a druhé nepárne, čiže ich súčet musí byť nepárny. Vraťo teda nemôže byť manžel Natálie a z rovnakého dôvodu nemôže byť ani Martin manžel Natálie. Natália teda musí byť vydatá za Peťa, Vraťo musí byť ženatý s Ajšou a napokon Martin musí byť ženatý s Ivkou.

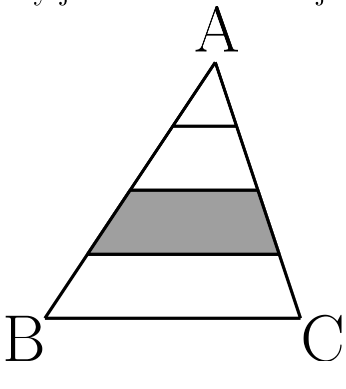
Označme si vek každej osoby postupne ako v, p, m, n, i a a. Zo zadania vieme: $v = i + 1$. Ajša je manželka Vraťa, a teda má o 5 rokov menej, čiže musí platiť $a = i - 4$. Martin je manžel Ivky, takže o ich vekoch vieme povedať $m = i + 5$. Keďže poznáme súčet vekov Natálie a Vraťa vieme, že platí $n + v = 48$, čo vieme nahradiť za $n + i + 1 = 48$ a zjednodušiť na $n = 47 - i$. Natália je žena Peťa, takže o jeho veku vieme $p = n + 5 = 47 - i + 5 = 52 - i$. Teraz už máme každého vek odvodený od veku Ivky, čo môžeme dosadiť do súčtu všetkých vekov a zistiť tak Ivkin vek.

$$\begin{aligned} v + p + m + n + i + a &= 151 \\ (i + 1) + (52 - i) + (i + 5) + (47 - i) + i + (i - 4) &= 151 \\ 2i + 101 &= 151 \\ 2i &= 50 \\ i &= 25 \end{aligned}$$

Ivkin manžel je o päť rokov starší ako ona, takže jeho vek je 30 rokov.

Úloha 18:

V trojuholníku ABC sú nakreslené tri úsečky rovnobežné so stranou BC, ktoré delia výšku trojuholníka ABC na štyri rovnaké časti. Ak je oblasť druhej najväčšej časti 35 (vyznačenej sivou farbou), aký je obsah celého trojuholníka ABC?



Výsledok: 112

Riešenie:

Pozrime sa na najmenšiu časť, ktorá má trojuholníkový tvar. Tento malý trojuholník je podobný s trojuholníkom ABC, pretože deliaca čiara je rovnobežná s BC. Označme si dĺžku jeho základne a a dĺžku výšky v. Z podobnosti trojuholníkov vieme, že keď k tomuto trojuholníku pridáme druhú najmenšiu časť máme trojuholník so základňou $2a$ a výškou $2v$. Tak isto určíme rozmery trojuholníka, ktorý vznikne pridaním tretej najmenšej časti: $3a$ a $3v$, a aj veľkého trojuholníka ABC: $4a$ a $4v$.

Druhá najväčšia časť je rozdielom obsahov druhého a tretieho najväčšieho trojuholníka:

$$35 = \frac{3a \cdot 3v}{2} - \frac{2a \cdot 2v}{2} = 4{,}5av - 2av = 2{,}5av.$$

To znamená, že $av = 14$. Obsah trojuholníka ABC je $\dfrac{4a \cdot 4v}{2} = 8av = 8 \cdot 14 = 112$.

Úloha 19:
Majme 4 čísla a, b, c, d také, že $a < b < c < d$. Keď si vezmeme 4 najmenšie súčty dvojíc týchto čísel, tak dostaneme 1, 2, 3 a 4. Aké číslo potom môže byť d? Nájdite všetky možnosti.

Výsledok: 7/2, 4

Riešenie:

Najmenší súčet vznikol určite sčítaním dvoch najmenších čísel, teda $a+b=1$. Druhý najmenší súčet určite vznikol súčtom najmenšieho a tretieho najmenšieho čísla, teda $a+c=2$. Keďže $a+b=1$ a $a+c=2$, tak c je o 1 väčšie ako b, inak povedané $c=b+1$.

Najväčší súčet určite vznikol súčtom dvoch najväčších čísel $(c+d)$. Druhý najväčší súčet určite vznikol súčtom najväčšieho a tretieho najväčšieho čísla $(b+d)$.

Všetkých súčtov je dokopy 6. Súčty $a+b$ a $a+c$ teda už poznáme, súčty $b+d$ a $c+d$ sa nenachádzajú medzi 4 najmenšími. Ostali nám súčty $a+d$ a $b+c$, ktoré majú hodnoty 3 a 4. Sú teda dve možnosti: buď $a+d=3$ a $b+c=4$ alebo $a+d=4$ a $b+c=3$.

Ak $a+d=3$ a $b+c=4$, dosadením $c=b+1$ dostaneme rovnicu $b+b+1=4$, potom $2 \cdot b = 3$ a následne $b = 3/2$. Potom z rovnice $a+b=1$ zistíme hodnotu a: $a+3/2=1$, a teda $a=-1/2$. Dosadením tejto hodnoty do rovnice $a+d=3$ dostaneme $-1/2+d=3$, a teda $d=7/2$.

Ak $a+d=4$ a $b+c=3$, dosadením $c=b+1$ dostaneme rovnicu $b+b+1=3$, potom $2 \cdot b = 2$ a následne $b=1$. Potom z rovnice $a+b=1$ zistíme hodnotu a: $a+1=1$, a teda $a=0$. Dosadením tejto hodnoty do rovnice $a+d=4$ dostaneme $0+d=4$, a teda $d=4$.

Dospeli sme k 2 riešeniam: $d=7/2$ a $d=4$.

Úloha 20:
Tráva na lúke rastie rovnako rýchlo a rovnomerne. Je známe, že 172 kráv by ju spáslo za 7 dní a 106 kráv za 18 dní. Koľko kráv treba na to, aby trávu spásli za 21 dní?

Výsledok: 100

Riešenie:

Na začiatku máme 1 lúku trávy. Nech denne na nej narastie r trávy (čo je násobok jednej lúky) a za jeden deň jedna krava spasie k lúk trávy (teda neznáme r a k označujú nejakú časť celku (1), ktorým je tráva na počiatku na lúke). Zapíšme si zadanie a hľadaný počet kráv označíme x:

$$\begin{aligned} 7(172k-r) &= 1 \\ 18(106k-r) &= 1 \\ 21(xk-r) &= 1 \end{aligned}$$

Pre úplnosť si vysvetlíme, ako sme prišli na prvú rovnicu. Množstvo trávy, ktoré zje 172 kráv za deň je $172k$ a za ten istý deň narastie r. Teda výraz $172k-r$ vyjadruje, koľko trávy zmizne za deň. Vieme, že za 7 dní má zmiznúť všetka tráva, a tej bolo na začiatku 1 (to sme si označili ako jednotku). Takže $7(172k-r)=1$. Analogicky si vieme vyrobiť aj zvyšné dve rovnice.

Vyjadrime si z prvej rovnice r:

$$\begin{aligned}
7(172k - r) &= 1 \\
172k - r &= \frac{1}{7} \\
r &= 172k - \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

Teraz z druhej rovnice k a dosadíme r z horného výpočtu:

$$\begin{aligned}
18(106k - r) &= 1 \\
106k - 172k + \frac{1}{7} &= \frac{1}{18} \\
-66k &= -\frac{11}{126} \\
k &= \frac{1}{756}
\end{aligned}$$

Napokon vypočítame hľadané x pomocou vyjadrení r a k:

$$\begin{aligned}
21(xk - r) &= 1 \\
xk - 172k + \frac{1}{7} &= \frac{1}{21} \\
(x - 172) \cdot k &= -\frac{2}{21} \\
\frac{x - 172}{756} &= -\frac{2}{21} \\
x - 172 &= -72 \\
x &= 100
\end{aligned}$$

Teda potrebných je v našom prípade 100 kráv.

Iné riešenie: Označme si ako jednotku trávy (JT) množstvo, ktoré spasie jedna krava za jeden deň. Vieme, že:

- 172 kráv sa pasie 7 dní. Dokopy spasú 1204 JT.
- 106 kráv sa pasie 18 dní. Dokopy spasú 1908 JT.

V druhom prípade tráva rástla o 11 dní dlhšie a vyrástlo jej o $1908 - 1204 = 704$ JT viac. Z toho vieme vypočítať, že na lúke vyrastie 704 JT za 11 dní, a teda $704 : 11 = 64$ JT za jeden deň. V prvom prípade rástla tráva 7 dní, a teda jej vyrástlo $(7 \cdot 64) = 448$ JT. Teraz vieme zistiť, koľko JT bolo na začiatku na lúke. Stačí odčítať to, čo vyrástlo, od toho, čo kravy zjedli. Na začiatku teda bolo na lúke $1204 - 448 = 756$ JT (a to platí pre každú z možností). V prípade na ktorý sa pýtame tráva rastie 21 dní, pričom vieme, že za jeden deň vyrastie 64 JT. Dokopy teda musia kravy za 21 dní zjesť $21 \cdot 64 = 1344$ (tráva, čo vyrástla) plus 756 (tráva na začiatku), čo je 2100 JT. Keďže JT spasie jedna krava za jeden deň, tak 2100 JT muselo za 21 dní spásť (2100 : 21) 100 kráv.

Hádanky

Hádanka 1:
Stojí pani na streche, rozťahuje prsty a čo chytí v povetrí, do izby nám pustí.

Výsledok: anténa

Hádanka 2:
Poznám strýka kúzelníka, stúpa k nebu bez rebríka. Namorí sa neraz veľmi, až je z toho celý čierny.

Výsledok: dym

Hádanka 3:
Idú vo dne, idú v noci, bez jedla a bez pomoci. Nemá konca dlhá cesta, a predsa sa nehnú z miesta.

Výsledok: hodiny

Hádanka 4:
Hoci nie je vôbec zlá, za ucho je priviazaná. A hoci je celkom tichá, do všetkého nos svoj pichá.

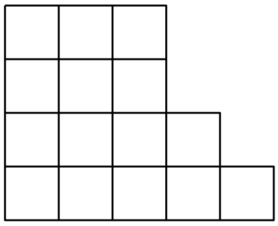
Výsledok: ihla

Hádanka 5:
Má listy a nie je strom, radí ti a nemá hlas, aj priateľa nájdeš v tom, ukáže ti krásu krás.

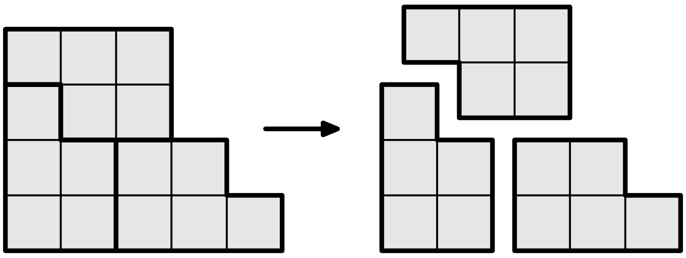
Výsledok: kniha

Hlavolamy

Hlavolam 1:
Rozdeľte útvar na tri zhodné časti. Zhodné časti majú rovnaký tvar aj veľkosť.



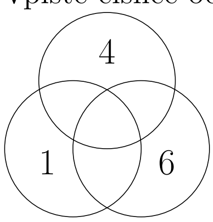
Výsledok:



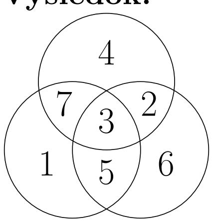
Riešenie:

Na začiatok si spočítame všetky štvorčeky aby sme vedeli, aký veľký útvar hľadáme. Celý útvar má 15 štvorčekov. Keďže hľadáme 3 zhodné útvary (veľkosťou aj tvarom), tak útvary sa budú skladať z 5 štvorčekov. Teraz sa už len trochu pohráme a napasujeme 3 takéto útvary do obrázku.

Hlavolam 2:
Vpíšte číslice od 1 do 7 do voľných kruhových oblastí tak, aby súčet čísel v každom kruhu bol 16.

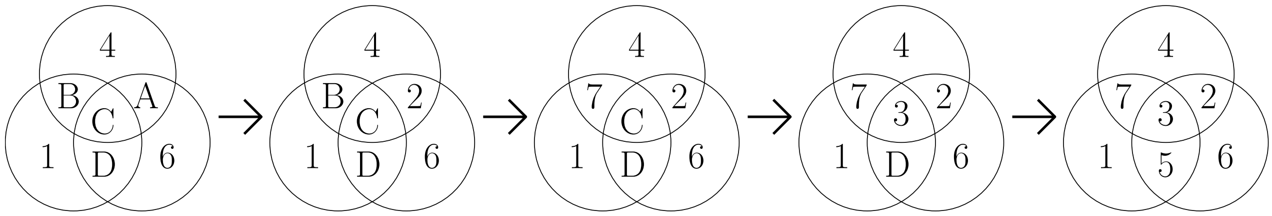


Výsledok:



Riešenie:

Najprv si označíme nevyplnené časti kruhov písmenami $A - D$. Keďže sú čísla 1, 4 a 6 vpísané, potrebujeme nájsť miesto pre 2, 3, 5 a 7. Vieme, že v každom kruhu je súčet 16, teda pre kruh s 1 platí $1+B+C+D = 16$. Z toho dostávame $B+C+D = 15$. Ak sa pozrieme na čísla, ktoré môžeme použiť, nájdeme len jednu kombináciu troch z nich so súčtom 15, a to $7+5+3$. Vďaka tomu vieme, že číslo 2 nie je v tom istom kruhu ako číslo 1, preto $A = 2$. Rovnakým spôsobom sa pozrieme na kruh s číslom 6. Môžeme o ňom povedať $6 + 2 + C + D = 16$, a teda $C + D = 8$. Pozrime sa na čísla, ktoré sme ešte nedopĺňali – 3, 5, a 7. Naskytá sa nám jediná možnosť – použiť 3 a 5. Nevieme však, ktoré doplniť kam, no vieme, že číslo 7 nie je v tom istom kruhu ako číslo 6. Môžeme teda doplniť $B = 7$. Teraz nám v kruhu s číslom 4 chýba už iba jedno číslo, môžeme ho teda jednoducho dopočítať $4 + 7 + 2 + C = 16$, takže $C = 3$. Posledné miesto doplníme zvyšným číslomm a to $D = 5$.



Hlavolam 3:
Aké číslo sa skrýva na mieste označenom x v klasickom magickom štvorci? (V magickom štvorci sú rozmiestnené čísla od 1 do 9 tak, že súčet čísel vo všetkých riadkoch, stĺpcoch a na uhlopriečkach je rovnaký.)

8		
x	7	

Výsledok: 6

Riešenie:

Najprv si uvedomíme, že súčet všetkých čísel je 45, a keďže už len v každom riadku má byť rovnaký súčet, tak to musí byť súčet $45/3 = 15$.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Na začiatok si vieme doplniť 9. Ak by sme 9 umiestnili do stĺpca, riadku alebo uhlopriečky s 8 alebo 7, tak by spolu dávali súčet 17 alebo 16, avšak my už vieme, že to má byť 15, teda číslo 9 musí byť v osobitnom stĺpci a riadku. Taká je len jedna možnosť.

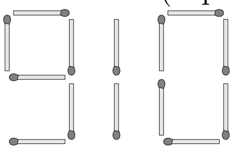
Ďalšie číslo je 6, ak by sme ho umiestnili do riadku alebo stĺpca s 9, dáva nám to súčet 15. Ostalo by nám však ešte jedno voľné miesto a súčet sme už naplnili. 6 teda nesmie byť v riadku ani v stĺpci s číslom 9. To nám ostali už len 2 možnosti. Obe možnosti si vyskúšame.

1. Ak 6 umiestnime do horného riadku do stredu, vo výsledku nám jedna uhlopriečka ostala prázdna a do nej vieme dať maximálne $5 + 4 + 3$, čo je málo. Táto možnosť preto nevyhovuje.

2. Ak 6 umiestnime na miesto x, prídeme na to, že nám to vyjde.

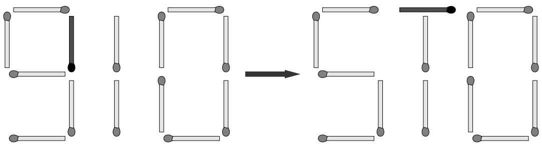
Na mieste x je číslo 6. Všimnite si, že po doplnení čísla 6 už vieme pomocou súčtu v riadku, stĺpci aj uhlopriečke dopočítať všetky čísla v štvorci.

Hlavolam 4:
Z čísla 910 (zapísaného digitálne pomocou zápalok) preložením jednej zápalky napíšte 100.



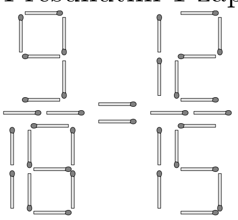
Výsledok: *STO*

Riešenie:

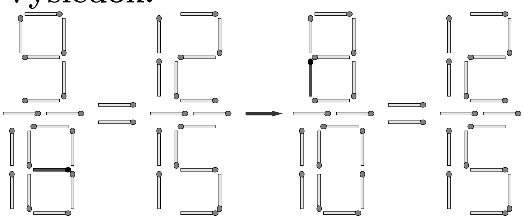


Ako dostaneme 100? Môžeme použiť inú číselnú sústavu, rímske čísla, ale aj slovo. Napovedať nám mohla 0 na konci, ktorá v digitálnej podobe pripomína písmeno O. Z písmen sa skladajú slová, a práve slovo bolo riešením tohto hlavolamu. Číslo 910 vieme presunutím jednej zápalky zmeniť na slovo *STO*.

Hlavolam 5:
Presunutím 1 zápalky upravte rovnicu:



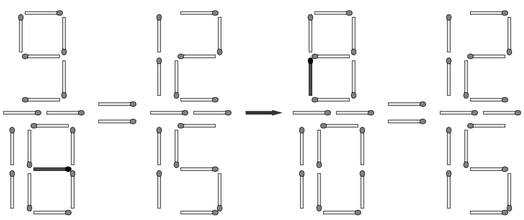
Výsledok:



Riešenie:

Musíme si uvedomiť, že presunutím zápalky vieme zmeniť buď len jedno zo štyroch čísel, ktoré sa v rovnici nachádzajú (preložíme zápalku z jedného miesta toho čísla na iné) alebo nejaké dve čísla (vezmeme zápalku z jedného čísla a položíme na druhé). Po chvíľke skúšania zistíme, že prvá (jednoduchšia možnosť na skúšanie) nám riešenie neprinesie.

Teraz vidíme, že čísla, z ktorých môžeme zobrať zápalku tak, aby vzniklo iné číslo, sú len 9 (vznikne 3 alebo 5) a 18 (vznikne 10, 16 alebo 19). Ak by sme zobrali zápalku z 9, tak si ľahko všimneme, že zápalku už nevieme nikde pridať tak, aby platila rovnosť. Preto nám zostáva jediná možnosť, a to zobrať zápalku z 18. Po troche skúšania zistíme, že jediná možnosť, ako to urobiť tak, aby sme splnili zadanie, je takto:



Lomihlav

Lomihlav je matematická súťaž organizovaná Združením STROM a Prírodovedeckou fakultou Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach pre žiakov základných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií. V roku 2017 sa koná už 17. ročník tejto súťaže.

Súťaž trvá (čarovných) 66 minút. Súťažiaci zo základných škôl (7. – 9. ročník) a príslušných tried osemročných gymnázií (sekunda až kvarta) súťažia v štvorčlenných družstvách. Družstvá dostanú na začiatku 20 matematických úloh, 5 hlavolamov a 5 hádaniek. Úlohy sú zoradené približne podľa náročnosti, pričom žiaci ich môžu riešiť v ľubovoľnom poradí. Družstvá získavajú body za jednotlivé úlohy, hlavolamy a hádanky podľa ročníkov súťažiacich v družstve, a to podľa tabuľky:

Ročník				Správny výsledok			Nesprávny	Neodovzdané
1. žiak	2. žiak	3. žiak	4. žiak	úloha	hlavolam	hádanka	výsledok	riešenie
7	7	7	7	4,20	2	1	-1	0
7	7	7	8	4,05	2	1	-1	0
7	7	7	9	3,90	2	1	-1	0
7	7	8	8	3,90	2	1	-1	0
7	7	8	9	3,75	2	1	-1	0
7	7	9	9	3,60	2	1	-1	0
7	8	8	8	3,75	2	1	-1	0
7	8	8	9	3,60	2	1	-1	0
7	8	9	9	3,45	2	1	-1	0
7	9	9	9	3,30	2	1	-1	0
8	8	8	8	3,60	2	1	-1	0
8	8	8	9	3,45	2	1	-1	0
8	8	9	9	3,30	2	1	-1	0
8	9	9	9	3,15	2	1	-1	0
9	9	9	9	3,00	2	1	-1	0

Zadania starších ročníkov nájdete na `https://matik.strom.sk/sk/lomihlav`.

autori:	Jakub Genči, Florián Hatala, Matúš Hlaváčik, Veronika Hubeňáková, Peter Kovács, Henrieta Micheľová, Kristína Mišlanová, Daniel Onduš, Zuzana Ontkovičová, Roman Staňo, Žaneta Semanišinová, Martin Vodička
recenzia a úprava:	Jana Baranová, Viktória Brezinová, Filip Csonka, Michaela Dlugošová, Jakub Farbula, Matej Hanus, Tomáš Kocák, Vratislav Madáč, Michal Masrna, Martin Masrna, Martin Mihálik, Ján Richnavský, Martin Šalagovič, Martin Števko
názov:	**Lomihlav – 1. 12. 2017**
vydavatelia:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta Združenie STROM
www:	https://matik.strom.sk/sk/lomihlav/ http://itakademia.sk/

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk