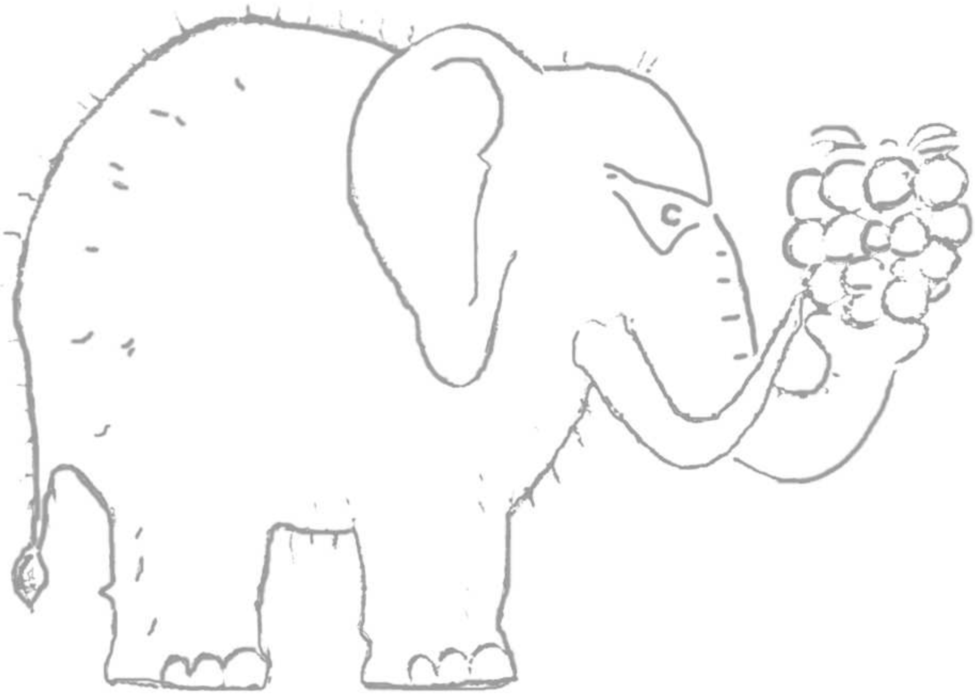
it akadémia

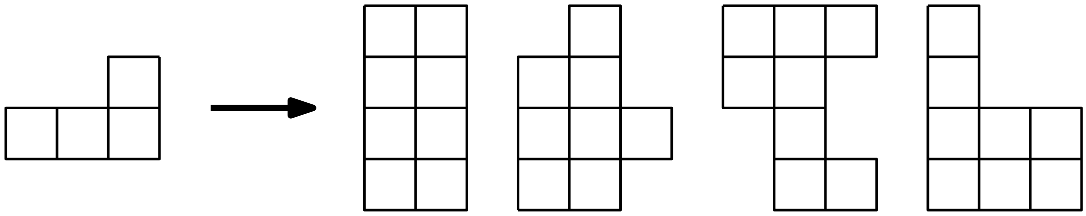
STROM

PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY P. J. ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH • 1963 •



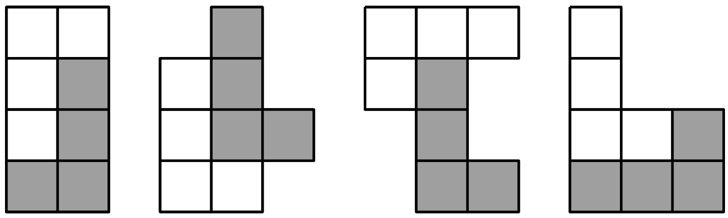
MAMUT
2017

Ľahké 1. Rozhodnite, ktoré z útvarov je možné poskladať z dielikov tvaru vľavo.

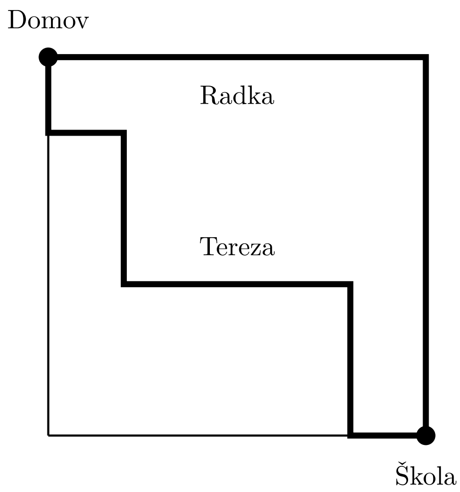


Výsledok. všetky

Riešenie. Stačí si uvedomiť, že daný dielik vieme otáčať aj preklápať, a ľahko zistíme, že všetky útvary sa z dielikov zložiť dajú.



Ľahké 2. Radka a Tereza šli domov zo školy rôznymi cestami. Obe začínajú naraz v škole a idú rovnakou rýchlosťou podľa obrázka. Rozhodnite, v akom poradí prídu domov.



Výsledok. prídu naraz

Riešenie. Uvedomme si, že Radka aj Tereza sa pohybujú v dvoch smeroch – vodorovnom a zvislom. Bez ohľadu na to, ako ktorá odbáča, prejdú obe vo vodorovnom smere rovnakú vzdialenosť (a to presne dĺžku strany štvorca na obrázku). Rovnako aj v zvislom smere prejdú obe rovnakú vzdialenosť. Celkovo teda prejdú rovnako dlhú dráhu, a keďže sa pohybujú rovnako rýchlo, prídu domov naraz.

Ľahké 3. Roman, Anton a Floro študujú (každý z nich iný odbor v inom meste). Vieme tieto fakty:

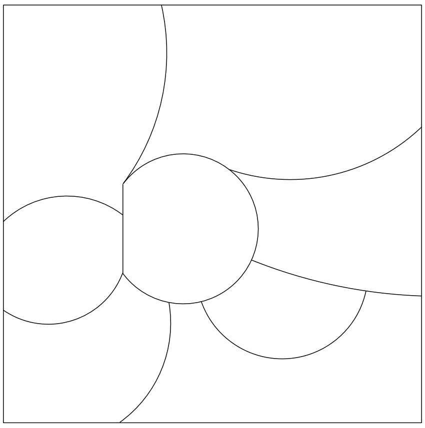
- Floro študuje v anglicky hovoriacej krajine,
- medzinárodné vzťahy sa neštudujú v Pekingu (v Pekingu niekto z chlapcov študuje),
- Anton študuje v Londýne,
- dejiny umenia sa študujú v New Yorku (niekto z chlapcov študuje dejiny umenia).

Jeden z chlapcov študuje bezpečnostný manažment. Ktorý to je?

Výsledok. Roman

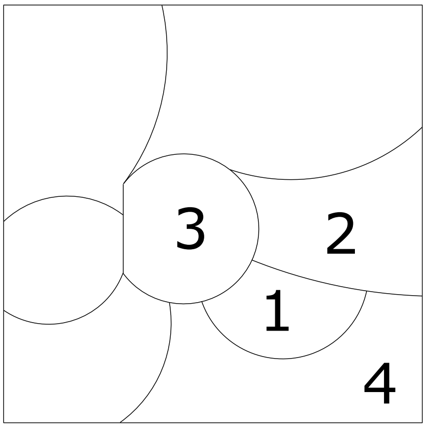
Riešenie. Keďže Floro študuje v anglicky hovoriacej krajine a Anton v Londýne, Floro musí nutne študovať v New Yorku (ostal by už len Peking a ten nie je v anglicky hovoriacej krajine). Medzinárodné vzťahy sa neštudujú v Pekingu a v New Yorku sa už študujú dejiny umenia, takže medzinárodné vzťahy sa musia študovať v Londýne. Teraz už vieme, že Floro študuje v New Yorku dejiny umenia a Anton medzinárodné vzťahy v Londýne. Z toho vyplýva, že Roman musí študovať bezpečnostný manažment v Pekingu.

Ľahké 4. Územia na mape sú oddelené hranicami. Každé územie vyfarbíme jednou farbou tak, aby žiadne dve susedné územia neboli vyfarbené rovnakou farbou. Koľko najmenej farieb je potrebné použiť na vyfarbenie mapy?

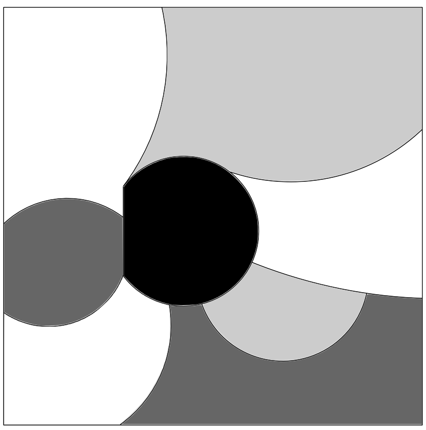


Výsledok. 4

Riešenie. Pomenujme štyri vybrané územia podľa obrázka:



Územie 1 na mape je vyfarbené nejakou farbou (napr. zelenou). Územie 2 musí mať inú farbu, keďže s územím 1 susedí (napr. modrú). Všimnime si ďalej územie 3, ktoré susedí naraz s územiami 1 aj 2. Jeho farba preto musí byť odlišná od farby každého z týchto dvoch území (napr. žltá). Na koniec si uvedomme, že územie 4 susedí s každým z území 1, 2 a 3 (o ktorých už vieme, že musia mať nutne tri rôzne farby), a teda musí mať farbu odlišnú od každej z farieb modrá, zelená a žltá. Na vyfarbenie týchto štyroch území teda určite potrebujeme aspoň štyri farby. Tento počet stačí aj pre celý zvyšok mapy, ktorý vieme ofarbiť napríklad takto:



Ukázali sme, že pre štyri farby existuje riešenie a zároveň, že na menej farieb to nejde. Štyri je preto hľadaný (minimálny) počet farieb.

Ľahké 5. Koľko štvorciferných čísel vieme vytvoriť z číslic 4, 2, 6, 9, 0, ak môžeme každú číslicu použiť najviac jedenkrát?

Výsledok. 96

Riešenie. Na prvé miesto štvorciferného čísla môžeme položiť ľubovoľnú z cifier 4, 2, 6 a 9 (nulou číslo začínať nemôže). Pre každú z týchto štyroch možností máme 4 možnosti, akú cifru umiestniť na ďalšie miesto (môže sa tam nachádzať aj nula, ale tým, že sme jednu cifru už položili na prvé miesto, ostávajú nám len štyri možnosti). Dostávame tak $4 \cdot 4 = 16$ možností pre možné dvojčíslia na začiatku. Na treťom mieste sa môže pre každú z možností nachádzať jedna zo zvyšných troch cifier. Máme teda $3 \cdot 16 = 48$ možností na vytvorenie prvého trojčíslia. Na posledné – štvrté miesto môžeme pre každú z týchto možností umiestniť jednu zo zvyšných dvoch cifier. Spolu máme teda $48 \cdot 2 = 96$ možností na vytvorenie štvorciferného čísla.

Ľahké 6. Slimák sa plazí po záhrade. Každý deň prekoná 50 cm. Za koľko dní prejde 10 metrov?

Výsledok. 20 dní

Riešenie. Slimák prejde za dva dni $2 \cdot 50$ cm $= 100$ cm, čo je 1 meter. 10 metrov preto prekoná za $10 \cdot 2 = 20$ dní.

Ľahké 7. Turisti sú ubytovaní v troch hoteloch. V druhom hoteli je ubytovaných o 8 turistov viac než v prvom a v treťom o 14 viac než v druhom. Koľko turistov býva v každom hoteli, ak ich je spolu 258?

Výsledok. 76, 84 a 98

Riešenie. V treťom hoteli je ubytovaných o $8+14 = 22$ turistov viac ako v prvom. Ak sčítame počty hostí vo všetkých hoteloch, tak dostaneme:

$$\text{počet hostí v prvom hoteli} + (\text{počet hostí v prvom hoteli} + 8) + (\text{počet hostí v prvom hoteli} + 22),$$

čo spolu dáva 258 (všimnime si, že obsah prvej zátvorky je len počet obyvateľov druhého hotela a obsah druhej zátvorky predstavuje počet obyvateľov tretieho hotela). Toto číslo je teda trojnásobok počtu turistov v prvom hoteli zväčšený o $8 + 22 = 30$. V prvom hoteli preto býva turistov trikrát menej ako $258 - 30 = 228$. V prvom hoteli teda býva 76 turistov (lebo práve $76 \cdot 3 = 228$). V druhom $76 + 8 = 84$ a v treťom $84 + 14 = 96$. Pre overenie vieme sčítať počty turistov v jednotlivých hoteloch $76 + 84 + 96 = 258$, čím dostávame ich celkový počet, ktorý súhlasí so zadaním.

Ľahké 8. Celá kocka $4 \times 4 \times 4$ je natretá farbou a rozrezaná na 64 malých kociek. Koľko malých kociek nemá natretú ani jednu stenu?

Výsledok. 8

Riešenie. Poďme postupne odstraňovať kocky natreté farbou. Určite musíme odstrániť celú prednú stenu, čím z kocky vznikne kváder o rozmeroch $4 \times 4 \times 3$. Ďalej odstránime aj zadnú stenu novovzniknutého kvádra, pretože aj tá je celá natretá. Vznikne tak kváder s rozmermi $4 \times 4 \times 2$. Všetky kocky jeho vrchnej aj spodnej steny boli súčasťou stien pôvodnej kocky, takže sú tiež ofarbené, a preto ich odstránime. Po tomto kroku má kváder rozmery $4 \times 2 \times 2$. Ešte na ňom ostali ofarbené ľavá a pravá stena, preto aj tie musíme odobrať. Ostane nám tak kocka $2 \times 2 \times 2$, ktorá sa skladá z $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ kociek.

Ľahké 9. Žiaci piatej triedy denne sledovali počasie v priebehu dvoch týždňov a zaznamenali, že slnečno bolo 5 dní, slnečno a hmla 3 dni, hmla 7 dní. Ostatné dni bolo iba zamračené. Koľko dní bolo zamračené?

Výsledok. 5

Riešenie. Zistíme, koľko bolo slnečných dní alebo dní s hmlou. Keď sčítame ich počty, dostaneme $5 + 7 = 12$, ale po dva razy sme zarátali 3 dni, ktoré boli slnečné a aj s hmlou zároveň (tieto dni sú totiž obsiahnuté v siedmich dňoch s hmlou aj piatich slnečných dňoch), čiže počet musíme znížiť na $12 - 3 = 9$ dní. Ostatných (zamračených) dní potom zostáva $14 - 9 = 5$.

Ľahké 10. Myslím si číslo. Vynásobím ho tromi, potom pričítam 10, pričítam polovicu pôvodného čísla, odčítam 7, odčítam polovicu aktuálneho čísla, vynásobím nulou, pričítam 2, vynásobím dvomi, odčítam 4 a dostanem pôvodné číslo. Aké číslo som si myslel?

Výsledok. 0

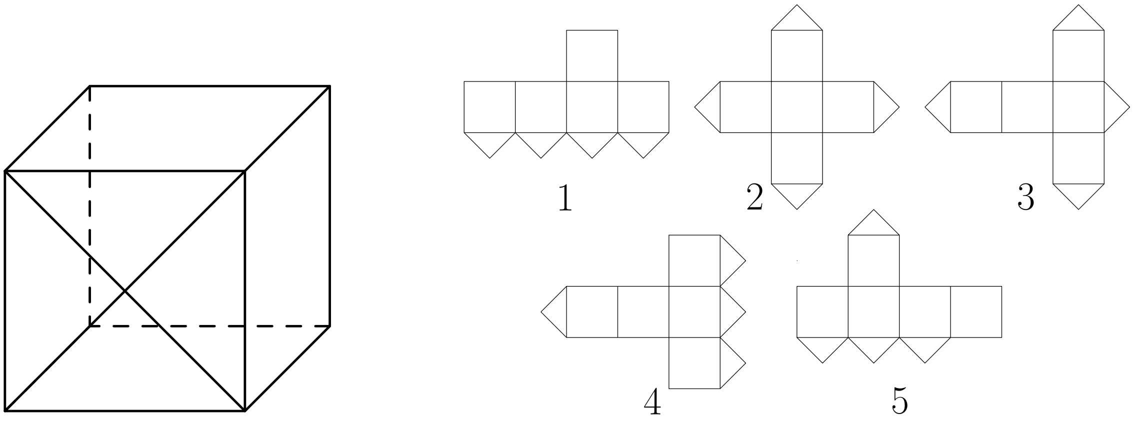
Riešenie. Všimnime si, že šiesta operácia v poradí je násobenie nulou. Bez ohľadu na to, aké číslo sme mali predtým, to po tomto kroku bude nula. V ďalšej fáze k nemu pričítame dva a dostaneme $0 + 2 = 2$. Vynásobíme dvomi $2 \cdot 2 = 4$, odčítame štyri $4 - 4 = 0$ a dostávame pôvodné číslo. Číslo, čo sme si mysleli, je preto 0.

Ľahké 11. Z čísla 5192763 vyškrtnite 3 číslice tak, aby vzniklo čo najväčšie možné číslo.

Výsledok. Vyškrtneme 5, 1 a 2

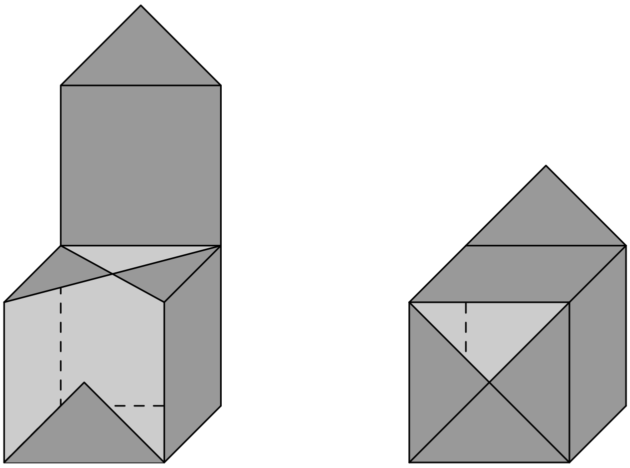
Riešenie. Máme istotu, že výsledné číslo bude štvorciferné. Skúsme preto maximalizovať číslicu na mieste tisícok. Najvyššia číslica v pôvodnom čísle je 9. Dokonca ju je možné dostať na miesto tisícok (nutne pritom vyčiarkneme 5 a 1). Ešte stále máme na výber jednu cifru na vyškrtnutie, tak spravme čo najväčšiu číslicu na mieste stoviek. Najvyššou číslicou čísla okrem 5, 1 a 9 je 7. Dá sa umiestniť na želané miesto vyčiarknutím jednej číslice (2). Vyškrtnutím cifier 5, 1 a 2 tak dostávame číslo 9763, ktoré je najväčšie možné štvorciferné číslo, ktoré nám môže vzniknúť.

Ľahké 12. Na ktorých obrázkoch (1 až 5) nie je sieť kocky vľavo?



Výsledok. 3 a 5

Riešenie. Zo sietí na obrázkoch 1, 2 a 4 sa kocka poskladať dá (stačí si predstaviť, ako bude vyzerať útvar po zahnutí po hranách). Ak by sme sa však snažili poskladať kocku zo sietí na obrázkoch 3 a 5, dostali by sme napríklad takéto útvary:



U nich už jasne vidno, že ich nemožno preskladať tak, aby sme dostali zadanú kocku.

Ľahké 13. Koľkými spôsobmi vieme zaplatiť sumu 4 eurá, ak máme k dispozícii len 50-centové, 1-eurové a 2-eurové mince?

Výsledok. 9

Riešenie. Pri platení môžeme použiť najviac dve 2-eurové mince. Ak použijeme obe, dostávame prvý spôsob zaplatenia. Ak použijeme jednu, do štyroch eur ešte potrebujeme doplatiť dve eurá. Pri ich platení vieme použiť buď dve, jednu alebo žiadnu 1-eurovú mincu a zvyšok musia nutne tvoriť 50-centové mince. Dostávame tak ďalšie tri spôsoby vyplatenia. Ostávajú možnosti, kde nezaplatíme žiadnymi 2-eurovými mincami. Vieme tak použiť najviac štyri a najmenej nula 1-eurových mincí. Zvyšok tvoria opäť nutne 50-centovky. Máme tak ďalších 5 spôsobov. Spolu to je $1 + 3 + 5 = 9$ rôznych spôsobov (pre úplnosť sú všetky spôsoby ešte uvedené v tabuľke).

Možnosť	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Počet 2€ mincí	2	1	1	1	0	0	0	0	0
Počet 1€ mincí	0	2	1	0	4	3	2	1	0
Počet 0,50€ mincí	0	0	2	4	0	2	4	6	8

Ľahké 14. Na lyžiarskom výcviku si 8 ľudí v apartmáne dalo do troch šuflíkov svoje čisté ponožky (každý má jeden pár). Aký najväčší počet ponožiek by sme s istotou mohli nájsť v jednom šuflíku?

Výsledok. 6

Riešenie. 8 ľudí má spolu $8 \cdot 2 = 16$ ponožiek. Ak by v každom šuflíku bolo najviac 5 ponožiek, spolu by ich bolo maximálne $5 \cdot 3 = 15$, čo je málo. Preto aspoň v jednom šuflíku musí byť aspoň 6 ponožiek. 7 ponožiek sa však už v žiadnom šuflíku nemusí nachádzať, keďže počty ponožiek v šuflíkoch môžu byť napríklad 5, 5, 6. Najväčší počet ponožiek, aký môžeme určite nájsť v jednom zo šuflíkov je 6.

Ľahké 15. Koľko najviac a koľko najmenej partií šachu mohli odohrať dvaja hráči, ak sa dohodli, že na titul majstra potrebuje hráč 4 víťazné partie?

Výsledok. najviac 7, najmenej 4

Riešenie. Najmenší počet partií je 4 – stačí, aby jeden z hráčov štyrikrát vyhral a je majstrom. Menej partií sa odohrať nedá, keďže na titul potrebujeme aspoň spomínané štyri výhry. Naopak, najvyšší počet partií je 7 – ak jeden hráč vyhrá štyrikrát a druhý trikrát (stretnutie teda skončí so skóre 4:3). Viac partií nie je možné odohrať. Pri siedmich partiách, z ktorých každá skončila niekoho výhrou, totiž musí mať jeden z hráčov nutne na konte 4 výhry, čo ale znamená, že už je majstrom.

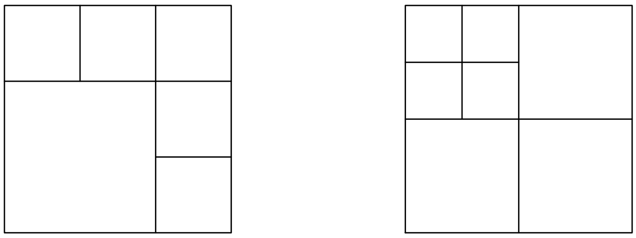
Ľahké 16. Koľko je teraz hodín, ak čas, čo zostáva do polnoci je trikrát dlhší ako čas, čo uplynul od poludnia?

Výsledok. 15:00

Riešenie. Od poludnia do polnoci uplynie 12 hodín. Ak doteraz uplynul nejaký čas a do polnoci uplynie ešte trikrát, tak medzi poludním a polnocou (teda v 12 hodinách) je tento čas zarátaný spolu štyrikrát. Čas, ktorý uplynul od poludnia doteraz je preto 3 hodiny (lebo práve $3 \cdot 4 = 12$). Aktuálny čas je teda $12 + 3 = 15$ hodín.

Ľahké 17. Máme dva štvorce. Rozrežte jeden štvorec na šesť štvorcov a druhý štvorec na sedem štvorcov.

Výsledok.



Riešenie. Štvorce rozdelíme napríklad podľa vzoru vyššie – úloha je skutočne dosť triková a riešenie jednoducho musíme uvidieť.

Ľahké 18. Matúš si myslí štvorciferné číslo. Jeho prvé dvojčíslie je o 3 väčšie ako posledné dvojčíslie. Súčet všetkých cifier je 10 a posledná cifra je 7. Aké číslo si Matúš myslí?

Výsledok. 2017

Riešenie. Keď od ciferného súčtu (10) odčítame číslo 7 (ktoré stojí na poslednom mieste) dostaneme $10 - 7 = 3$, čo je súčet cifier na prvých troch miestach čísla. Vieme, že na mieste tisícok musí byť cifra aspoň 1 (aby to číslo bolo štvorciferné). Do úvahy tak prichádzajú len 4 možnosti pre cifry na prvých troch miestach čísla, a to 300, 201, 210, 111 (inak nebude ciferný súčet 10). Ak ku každej z nich pripíšeme cifru 7 na koniec, stačí nám pre vzniknuté štvorciferné čísla už len overiť poslednú podmienku – to, či je posledné dvojčíslie o 3 menšie ako prvé dvojčíslie. Túto podmienku spĺňa len číslo 2017, a preto si ho Matúš myslí.

Ľahké 19. Každý obyvateľ strateného ostrova buď vždy hovorí pravdu, alebo vždy klame. Jeden z nich povedal druhému: „Som klamár alebo neklameš.“ Určte, čo sú zač.

Výsledok. obaja hovoria pravdu

Riešenie. Rozoberme všetky možné kombinácie:

1. Obaja hovoria pravdu – v takom prípade je výrok zo zadania pravdivý, druhý z ostrovanov totiž skutočne neklame. Táto možnosť preto vyhovuje a dáva nám prvé riešenie.

2. Prvý hovorí pravdu a druhý klame – v takom prípade ale výrok zo zadania neplatí (prvý nie je klamár a druhý klame). Ak ale prvý vyslovil nepravdu, znamenalo by to, že je klamár, a teda nie je pravdovravný, ako sme predpokladali. Táto možnosť vedie k sporu, a preto nie je riešením.

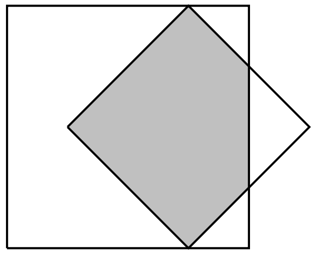
3. Prvý klame a druhý hovorí pravdu – výrok zo zadania je v tejto možnosti pravdivý (druhý skutočne neklame). To ale znamená, že prvý hovorí pravdu a nemôže tak byť klamár, ako predpokladáme. Táto možnosť preto opäť nevedie k riešeniu.

4. Obaja klamú – v tomto prípade je výrok zo zadania pravdivý (prvý je naozaj klamár). To ale znamená, že prvý hovorí pravdu, čo je zase spor s našim predpokladom, podľa ktorého je klamár.

Jediná možnosť, ktorá logicky vyhovuje (nevedie ku žiadnemu rozporu), je tá, kde sú obaja pravdovravní.

Ľahké 20. Načrtnite dva štvorce, ktorých prienikom („spoločnou plochou“) je päťuholník.

Výsledok.



Riešenie. Zo štvorca vieme vytvoriť päťuholník napríklad tak, že skosíme jeden jeho vrchol (takýmto skosením vlastne pridáme ku štyrom stranám štvorca piatu). Teraz ostáva z nášho skosenia len urobiť veľký štvorec, aby bol päťuholník skutočne prienikom. Jedno z mnohých možných riešení vidíme na obrázku.

Ľahké 21. V skupine o postup na majstrovstvá vo futbale bolo 6 družstiev. Koľko zápasov sa odohralo v skupine, ak každé družstvo hralo s každým dvakrát? Koľko zápasov odohralo jedno družstvo?

Výsledok. každý tím odohral 10, spolu sa odohralo 30

Riešenie. Každý tím hral s každým zo zvyšných piatich dvakrát. Každý tím teda spolu odohral $5 \cdot 2 = 10$ zápasov. Tímov je 6 a každý hral 10-krát, no aj napriek tomu nebolo všetkých zápasov spolu $6 \cdot 10 = 60$, ale len 30. Pomenujme si tímy ako $A, B, \ldots, F$. V 10 zápasoch, čo tím A odohral, sú zahrnuté zápasy: dvakrát $A : B$, dvakrát $A : C$, ..., dvakrát $A : F$. V 10 zápasoch, čo odohral tím B sú zahrnuté: dvakrát $B : A$, dvakrát $B : C$, ... Uvedomme si ale, že zápasy $B : A$ a $A : B$ sú tie isté. Ak by sme však vzali prostý súčin $6 \cdot 10 = 60$, tak započítame každý odohraný zápas dvakrát (raz ako príspevok z jedného a raz z druhého tímu). Preto sa zápasov v skutočnosti odohralo len 30.

Ľahké 22. Do mriežky doplňte čísla od 1 po 4 tak, aby každý stĺpec aj každý riadok obsahoval každé z čísel (1, 2, 3, 4) práve jedenkrát. Každý hrubo orámovaný štvorec 2×2 musí tiež obsahovať každé z čísel (1, 2, 3, 4) práve jedenkrát. Mriežok máte viac len pre prípad, že sa pomýlite.

2			4
		1	
	3		

2			4
		1	
	3		

2			4
		1	
	3		

Výsledok.

2	1	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
1	2	4	3

Riešenie. V prvom riadku nám chýbajú čísla 1 a 3, pričom 1 nemôže byť v pravom z voľných štvorčekov (v príslušnom štvorci 2×2 už 1 máme). Dostávame tak prvý riadok. V ľavom hornom štvorci 2×2 nám chýbajú čísla 3 a 4, ktoré vieme ľahko doplniť (3 nemôže byť v pravom štvorčeku, lebo v príslušnom stĺpci sa už 3 nachádza).

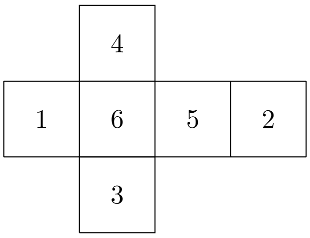
2	1	3	4
3	4	1	
	3		

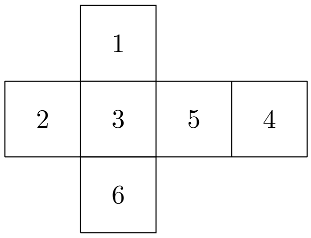
Na konci druhého riadku potom musí byť nutne 2. V ľavom dolnom štvorci 2×2 ľahko doplníme číslo 2 pod číslo 3 (je jediné, čo ešte chýba v príslušnom stĺpci). Obráťme teraz pozornosť na blok 2×2 vpravo dole. Vieme, že v ľavom hornom štvorčeku bude číslo 2 (inde byť nemôže, lebo v danom riadku alebo stĺpci by inak boli dve dvojky).

2	1	3	4
3	4	1	2
	3	2	
	2		

Pod dvojku patrí 4 ako posledné chýbajúce číslo stĺpca. Na zvyšných dvoch pozíciách bloku sa pod sebou nachádzajú 1 a 3 (nie naopak, lebo v treťom riadku by tak vznikli dve 3). Posledné dve políčka v sudoku už doplníme ľahko.

Ľahké 23. Sú na týchto dvoch obrázkoch siete rovnakej kocky? Zdôvodnite.





Výsledok. nie

Riešenie. Ak sa so sieťou trochu pohráme, prídeme na dve pozorovania:

1. Dve steny, medzi ktorými sa nachádza práve jedna ďalšia, budú po zložení kocky oproti sebe.
2. Kocky nie sú rovnaké, ak majú steny s rovnakými číslami na oboch kockách rôzne čísla na susedných stenách.

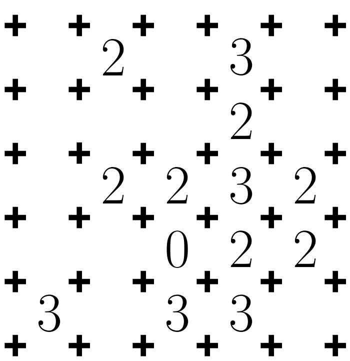
Pozrieme sa na číslo 6 v prvej sieti – po zložení má susedov (steny, ktoré s ňou majú spoločnú hranu): 1, 3, 4 a 5. V druhej sieti sa však medzi číslami 1 a 6 nachádza ešte jedna stena a tieto dve steny sa preto budú nachádzať oproti sebe. Tým pádom nebudú susedné, ako na prvej kocke, a siete preto nezodpovedajú rovnakej kocke.

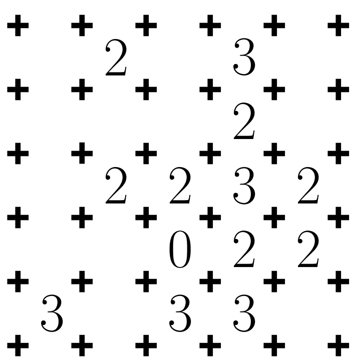
Ľahké 24. Otec má 48 rokov, syn 21. Pred koľkými rokmi bol otec 10-krát starší ako jeho syn? Vek je kladné celé číslo.

Výsledok. 18

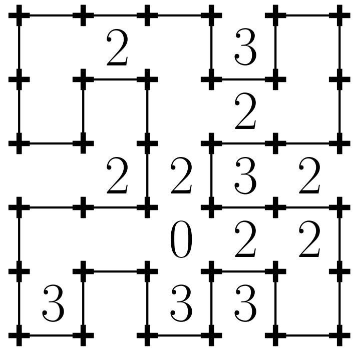
Riešenie. Keď bol otec 10-krát starší, jeho vek musel byť 10-násobkom synovho veku, a teda musel končiť nulou (tak ako všetky násobky desiatky – 0, 10, 20, 30, ...). To sa mohlo stať pred 8 rokmi, keď mal otec 40 a syn 13 rokov. To ale otcov vek nie je 10-krát väčší ako synov a toto preto nie je riešenie. Do úvahy pripadá tiež situácia pred 18 rokmi, kedy mal otec 30 a syn 3 roky, čo sedí, lebo $30 = 10 \cdot 3$. Pred 28 a viac rokmi to už nastať nemohlo, lebo syn ešte nežil. Jediným riešením je preto 18 rokov.

Ľahké 25. Vyriešte nasledujúci hlavolam:
Body označené krížikmi (nie nutne všetky) musíte pospájať zvislými a vodorovnými čiarami tak, aby čiary tvorili jednu okružnú cestu (je to jeden okruh a nikde sa nerozbočuje). Cesta musí byť nakreslená tak, aby číslo v štvorčeku predstavovalo počet strán štvorčeka, ktorými prechádza cesta (napr. číslo 2 v štvorčeku znamená, že cesta prechádza práve dvomi stranami štvorčeka). Ak nie je v štvorčeku žiadne číslo, cesta môže prechádzať ľubovoľným počtom jeho strán. Hlavolamy máte dva pre prípad, že sa pomýlite.

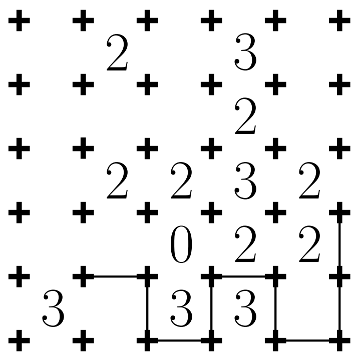




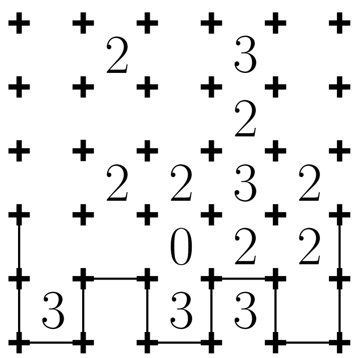
Výsledok.



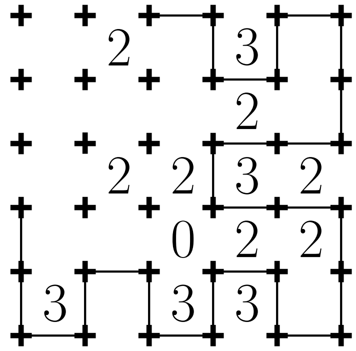
Riešenie.
Začať môžeme dole, kde susedia políčka s číslami 3 a 0. Okolo políčka 3 bude určite viesť trasa tými stranami, ktoré nepatria zároveň políčku 0 (v opačnom prípade by cesta viedla okolo políčka 0 a to podľa zadania nemôže). Dostávame tak prvý úsek cesty, ktorý budeme na oboch koncoch postupne rozširovať – to vieme spraviť hneď na oboch koncoch vo vodorovnom smere (majme na pamäti, že cesta nemá odbočky a zároveň určite nepôjde okolo políčka 0). Na pravom konci cesty vidíme, ako obísť ďalšie políčko 3 – zahneme cestu nadol a následne nutne doprava (je to jediný smer, v ktorom nebude mať odbočky). Ďalej musíme pokračovať hore, lebo je to opäť jediný možný smer.



Teraz obráťme pozornosť na ľavý koniec cesty. Vidíme, že políčko 3 musíme obísť zdola (ak by sme ho obišli zhora, dostali by sme cestu do bodu, kde už z nej nikdy nespravíme okružnú – neprepojili by sme ju s druhým koncom). Hneď vidíme aj to, že cesta pokračuje nahor (aby nemala odbočky).



Všimnime si susediace dvojky vpravo dole (tie v jednom riadku). Je jasné, ako musí cesta pokračovať, aby na nich nevznikli odbočky – musíme ju potiahnuť vodorovne doľava ponad obe dvojky. Ďalej bude pokračovať nutne nahor (iné smery sú neprípustné kvôli nulovému políčku). Hneď vieme cestu zahnúť aj okolo trojky (opäť kvôli odbočkám). Cesta musí ďalej pokračovať doprava (inak by okolo dvojky vpravo v danom riadku už nemohli byť dve cesty na jej stranách). Cesta pokračuje do jediného možného smeru – nahor. Je nám jasné, že dvojkou v aktuálnom riadku musí prechádzať cesta po hornej strane (kvôli odbočkám). Ľahko tak prídeme na to, ako obísť trojku, aby sme vyhoveli požiadavkám.



Ostáva prepojiť konce ciest. To ale už nechávame na Vás :). Stačí sa držať našich myšlienok o odbočkách.

Stredné 1. Janko s ockom nastúpili na sedačkovú lanovku s číslom 17. Lanovka ide hore na kopec a na vrchu sa otočí. Keď išla oproti sedačka s číslom 55, Janko povedal: „Sme v polovici.“ Koľko sedačiek mala lanovka? Sedačky lanovky sú označené celými kladnými číslami počínajúc 1 a žiadna sedačka nechýba.

Výsledok. 76

Riešenie. To, že Janko uvidel v polovici sedačku s číslom 55, znamená, že v tomto momente bolo rovnako veľa sedačiek medzi číslami 17 a 55 ako medzi číslami 55 a 17. Medzi číslami 17 a 55 je spolu 37 sedačiek. Medzi sedačky 55 až 17 patria sedačky s číslami menšími ako 17 a tiež tie s číslami väčšími ako 55. Čísel menších ako 17 je 16, takže čísel väčších ako 55 bolo $37 - 16 = 21$ (spolu ich je predsa rovnako veľa ako sedačiek medzi číslami 17 a 55). Najväčšie číslo sedačky bolo preto $55 + 21 = 76$, čo je aj celkový počet sedačiek, ktoré lanovka mala.

Stredné 2. Aké je najväčšie 4-ciferné číslo, ktoré má všetky cifry rôzne, súčet jeho cifier je 14 a súčin jeho cifier je kladný?

Výsledok. 8321

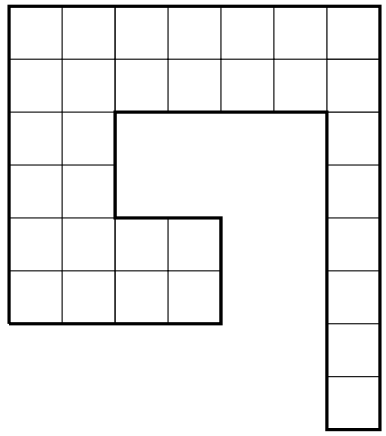
Riešenie. Súčin cifier je kladný, teda v čísle sa nevyskytuje číslica 0 (inak by bol súčin 0, a teda by nebol kladný). Hľadáme najväčšie možné štvorciferné číslo, tak skúsme dať na prvú pozíciu číslicu 9. Číslice na zvyšných troch miestach musia dávať v súčte 5. To je ale možné len spôsobmi $3 + 1 + 1 = 5$ alebo $2 + 2 + 1 = 5$ (keďže 0 použiť nemôžeme). Podľa zadania však každé dve číslice musia byť rôzne a to v žiadnom z prípadov splnené nie je. Náš predpoklad, že štvorciferné číslo začína číslicou 9, bol preto zlý (vedie ku sporu a nie ku riešeniu). Skúsme preto umiestniť na prvú pozíciu hľadaného čísla číslicu 8. Číslice na ďalších troch miestach dávajú v súčte 6 a pre nich už ľahko nájdeme vyhovujúcu kombináciu $1 + 2 + 3 = 6$. Číslice ostáva zoradiť na zvyšné pozície tak, aby sme dostali skutočne najväčšie možné číslo, a to 8321.

Stredné 3. Pri rekonštrukcii vlakovej trate boli vymenené 40-metrové kusy koľajníc za 15-metrové. Aký najkratší úsek koľajovej trate sa dá vymeniť bez rezania koľajníc?

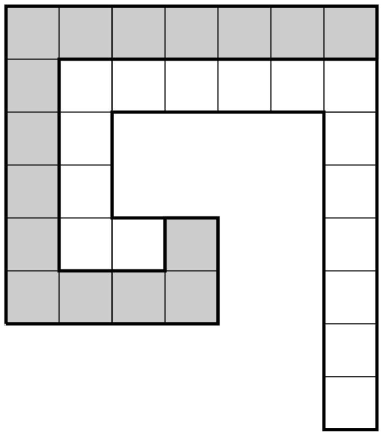
Výsledok. 120 metrov

Riešenie. Je možné 40 metrov nahradiť niekoľkými 15-metrovými kusmi? Nie, dva 15-metrové kusy nestačia ($15 \cdot 2 = 30 < 40$) a tri už sú veľa ($15 \cdot 3 = 45 > 40$). 80 metrov? Tiež nie, päť 15-metrových kusov nestačí ($15 \cdot 5 = 75 < 80$) a šesť je už veľa ($15 \cdot 6 = 90 > 80$). 120 metrov? Áno, lebo tri 40-metrové kusy nahradíme ôsmimi 15-metrovými ($15 \cdot 8 = 120 = 40 \cdot 3$).

Stredné 4. Rozdeľte obrazec na dva zhodné (teda na také diely, ktoré majú rovnaký tvar a rovnako veľa štvorčekov). Rezy delenia môžete viesť len po vyznačených čiarach.



Výsledok.



Riešenie. Pravá časť obrazca pozostávajúca z jedného dlhého radu musí patriť celá jednému dielu, a to až do hĺbky 7 štvorčekov (inak by táto časť predstavovala sama jeden diel a druhý (zvyšok) by zrejme nebol rovnaký). Takémuto dlhému radu môže v druhom diele obrazca zodpovedať jedine horný rad (žiaden iný už nemá dĺžku 7). Teraz už vidíme, ako sú diely v sebe umiestnené – jeden je voči druhému otočený, a zvyšok tak nájdeme ľahko.

Stredné 5. Vo vrecku je 5 červených, 7 modrých a 1 zelená guľôčka. Koľko guľôčok musíme vybrať, aby sme mali určite aspoň tri guľôčky jednej farby?

Výsledok. 6

Riešenie. 5 guľôčok nestačí, lebo môžeme vytiahnuť napr. 2 modré, 2 červené a 1 zelenú (vidíme, že nemáme tri jednej farby). Ak však vytiahneme 6 guľôčok, určite budeme mať tri jednej farby – bude medzi nimi totiž aspoň 5 modrých a červených spolu a medzi piatimi guľôčkami dvoch farieb musíme mať určite tri z jednej alebo z druhej farby.

Stredné 6. 15 strán papiera na sebe sme zohli na polovicu a dostali sme tak 60-stranový zošit. Strany sme očíslovali od 1 do 60. Aké ďalšie 3 čísla sú na tom istom papieri ako strana číslo 42?

Výsledok. 19, 20 a 41

Riešenie. Na prvom papieri máme strany číslo 1, 2, 59 a 60. Na druhom 3, 4, 58 a 57 (už vidíme, že na ďalších papieroch sa nachádzajú postupne ďalšie nasledujúce dvojice čísel, pretože jedna polovica papiera pojme dve, po sebe idúce, strany). Stranu 42 nájdeme v dvojici spolu s číslom 41 na desiatej strane (je to desiata dvojica). Podobne, desiata dvojica v poradí odpredu obsahuje čísla 19 a 20. Na danom papieri teda nájdeme 19, 20, 41 a 42.

Stredné 7. Aké najmenšie kladné číslo môžeme pričítať k číslu 25973 tak, aby bol výsledok palindróm? Palindróm je také číslo, ktoré sa číta odzadu rovnako ako odpredu (napr. 15251 alebo 216612 sú palindrómy).

Výsledok. 89

Riešenie. Všimnime si, že žiaden väčší palindróm nemôže začínať dvojčíslím 25. To by totiž musel končiť dvojčíslím 52 a nech si dáme do stredu ľubovoľnú číslicu, vzniknuté číslo bude vždy menšie ako 25973. Ak teda chceme väčší palindróm, musí byť prvé dvojčíslie aspoň 26. Potom by bolo posledné 62, a ak dáme do stredu 0, dostávame najmenší palindróm väčší ako 25973 (a to palindróm 26062). O tom, že je skutočne najmenší, väčší ako číslo 25973, sa vieme presvedčiť tak, že si prejdeme všetky čísla medzi a zistíme, že žiaden iný palindróm sa tam nenachádza. K pôvodnému číslu teda potrebujeme pričítať $26062 - 25973 = 89$.

Stredné 8. Koľko najviac dedkov mohli mať spolu dedkovia tvojich dedkov?

Výsledok. 8

Riešenie. Ja mám najviac 2 dedkov. Každý z nich má najviac 2 dedkov, teda dokopy $2 \cdot 2 = 4$ dedkov a každý z týchto 4 dedkov môže mať tiež najviac 2 dedkov, teda celkovo $4 \cdot 2 = 8$ dedkov.

Stredné 9. Súťaže o najťažšieho muža sa zúčastnili traja súperi. Spolu vážili 621 kilogramov. Koľko najmenej mohol vážiť víťaz? Hmotnosť muža je kladné celé číslo.

Výsledok. 208 kg

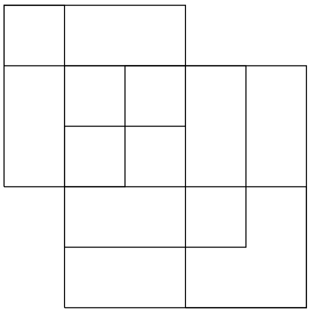
Riešenie. Víťaz súťaže musí vážiť viac ako tretinu celkovej hmotnosti, teda viac ako 207 kg (lebo $3 \cdot 207 = 621$). Ak by totiž víťaz vážil presne tretinu, zvyšní dvaja by buď:

- Obaja vážili rovnako, čiže každý tiež tretinu z 621 kg, a teda nikto by nebol víťaz (lebo všetci traja by mali rovnakú hmotnosť).

- Vážili rôzne, a teda jeden z nich by mal vyššiu hmotnosť. Tá by ale musela byť viac ako tretina zo 621 kg (ak by obaja vážili menej ako tretinu zo 621 kg, tak spolu s víťazom by dokopy dávali menej ako 621 kg, čo je ale rozpor). To by znamenalo, že náš prvý muž nie je víťaz, lebo tento váži viac.

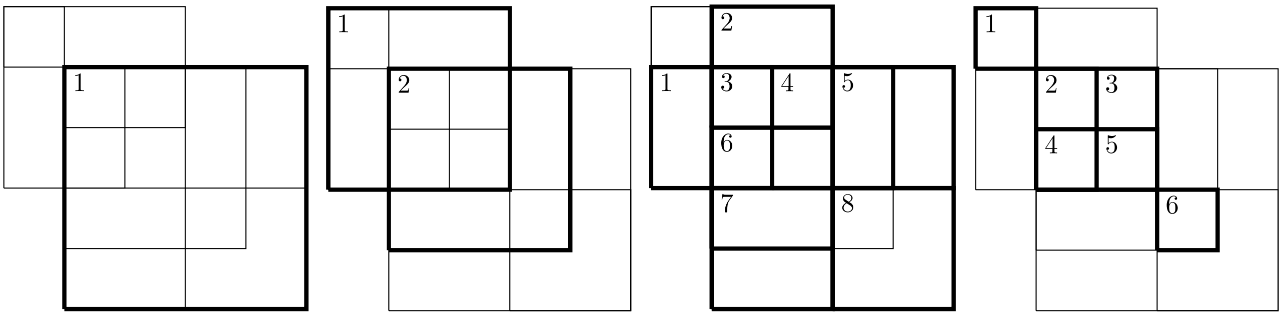
Víťaz preto musí vážiť aspoň 208 kg a s takouto hmotnosťou môže vyhrať napríklad, ak majú zvyšní dvaja hmotnosti 206 kg a 207 kg.

Stredné 10. Koľko štvorcov sa nachádza na obrázku?



Výsledok. 17

Riešenie. V útvare vidíme štvorce štyroch rôznych veľkostí. Hľadajme postupne štvorce vždy len jednej veľkosti (príslušné štvorce sú vykreslené v obrázkoch hrubou čiarou. Každý štvorec je označený vo svojom ľavom hornom rohu poradovým číslom).



Keď spočítame štvorce jednotlivých rozmerov, dostávame spolu $1 + 2 + 8 + 6 = 17$ štvorcov.

Stredné 11. Zozove hodinky zobrazujú čas v hodinách a minútach (v 24-hodinovom formáte). Koľko minút denne môžeme na hodinkách vidieť číslicu 5?

Výsledok. 450

Riešenie. Počas dňa máme 2 hodiny, počas ktorých je číslicu 5 vidieť stále (hodiny 5 a 15). To nám spolu dáva $2 \cdot 60{=}120$ minút. V zvyšných 22 hodinách dňa môžeme vidieť číslicu 5 počas posledných desiatich minút hodiny (minúty 50 až 59), ale tiež počas prvých päťdesiatich minút hodiny, a to hneď päťkrát (minúty 5, 15, 25, 35 a 45). V každej zo zvyšných 22 hodín teda môžeme vidieť číslicu 5 spolu $10 + 5 = 15$ minút. Za všetky hodiny to dáva $22 \cdot 15 = 330$ minút. Za celý deň tak dostávame $120 + 330 = 450$ minút, počas ktorých na hodinkách vidíme číslicu 5.

Stredné 12. Kráľovná chobotníc má 4 služobnice, z ktorých každá má 6, 7 alebo 8 chápadiel. Služobnice so 7 chápadlami vždy klamú a ostatné hovoria vždy pravdu. Kráľovná sa spýtala, koľko majú chápadiel spolu. Dostala odpovede: 25, 26, 27 a 28. Koľko chápadiel majú spolu pravdovravné služobnice?

Výsledok. 6

Riešenie. Keďže každá služobnica hovorí iné číslo, pravdu môže mať najviac jedna (lebo ich počet chápadiel je jednoznačný). Aspoň tri sú teda určite klamárky a tie majú spolu $7 \cdot 3 = 21$ chápadiel. Ak by štvrtá služobnica mala 6 chápadiel, potom by mali spolu 27 chápadiel. Takáto odpoveď skutočne padla a všetko teda sedí – máme prvé riešenie. Ak by mala 7 chápadiel, spolu by ich mali 28. Taká odpoveď síce tiež padla, ale so siedmimi chápadlami štvrtej služobnice by boli všetky klamárky, a teda takáto odpoveď padnúť nemohla. Táto možnosť preto nevedie k výsledku, ale k sporu. Ak by mala 8 chápadiel, spolu by mali 29 chápadiel. Takáto odpoveď však nepadla, čo by zas bolo v rozpore s tým, že máme jednu pravdovravnú služobnicu. Štvrtá služobnica je preto jediná pravdovravná a má 6 chápadiel.

Stredné 13. Nahraď hviezdičky číslicami tak, aby súčet výsledkov obidvoch príkladov bol 18210.

$$\star 8 \star 9 + 6 \star 7 \star = \star 8 \star 1$$

$$6383 + \star\star\star\star = 8 \star 6 \star$$

Výsledok. $2869 + 6972 = 9841$; $6383 + 1986 = 8369$

Riešenie. Najprv doplníme hviezdičky vo výsledkoch oboch z príkladov. Sčítajme pod sebou.

$$\begin{array}{ccccc} & \star & 8 & \star & 1 \\ & 8 & \star & 6 & \star \\ \hline 1 & 8 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Dopĺňajme postupne hviezdičky odzadu. Súčet posledných číslic oboch sčítancov musí končiť nulou. Dolné z čísel v súčte sa preto musí končiť číslicou 9 (inak by celkový súčet nekončil nulou). Deviatka na konci nám nechá v sčítavaní pod sebou zvyšok 1. Tento zvyšok, v súčte so šestkou a druhou hviezdičkou horného z čísel, musí v súčte končiť jednotkou. To ale znamená, že táto hviezdička musí odpovedať štvorke (opäť, inak by čísla nedávali na danej pozícii súčet končiaci na číslicu 1). To znamená ďalší zvyšok 1 na nasledujúcej pozícii. Z toho vyplýva, že prvá hviezdička v dolnom z čísel musí byť 3 (lebo $8 + 1 + 3$ nám dá v súčte 2 na poslednej pozícii). Nakoniec ostáva prvá hviezdička horného čísla, ktorá musí, v súčte s číslom 8 a zvyškom 1, dať súčet 18. Bude preto 9. Zistili sme tak, že súčty zo zadania sú 9841 a 8369. Teraz ostáva zopakovať postup pre príklady:

$$\begin{array}{cccc} \star & 8 & \star & 9 \\ 6 & \star & 7 & \star \\ \hline 9 & 8 & 4 & 1 \end{array} \quad \text{a} \quad \begin{array}{cccc} 6 & 3 & 8 & 3 \\ \star & \star & \star & \star \\ \hline 8 & 3 & 6 & 9 \end{array}$$

To už ale nechávame na čitateľa :).

Stredné 14. Slimák začína ráno na zemi a lezie po metrovej stene smerom nahor. Každý deň vylezie o 10 cm vyššie, ale v noci skĺzne o 5 cm dolu. Po koľkých nociach slimák prekoná celú stenu?

Výsledok. 18

Riešenie. Po prvom dni a prvej noci bude slimák vo výške $10\text{ cm} - 5\text{ cm} = 5\text{ cm}$. Po druhom dni a druhej noci vo výške $5\text{ cm} + 10\text{ cm} - 5\text{ cm} = 10\text{ cm}, \ldots$ Slimák postupne lezie každým dňom a nocou po 5 centimetroch, až kým nedosiahne výšku 90 cm (to mu bude trvať presne 18 dní a 18 nocí, lebo $18 \cdot 5 = 90$). V nasledujúci deň vylezie posledných 10 centimetrov (čím bude vo výške jedného metra), ale keďže už je na vrchu, po stene znova neklesne. Slimák teda potrebuje 19 dní, ale nocí mu stačí 18.

Stredné 15. Za nehybný okrúhly stôl (to znamená, že rozlišujeme jednotlivé miesta za stolom) si sadli 3 manželské páry tak, že na obvode stola sa striedajú muži a ženy a žiaden manželský pár nesedí pri sebe. Koľkými spôsobmi si mohli páry posadať?

Výsledok. 12

Riešenie. Posaďme niekam za stôl niektorú zo žien. Vedľa nej sedia dvaja muži, ale ani jeden z nich nemôže byť jej manžel. Ten preto musí sedieť oproti (muži a ženy sa na okraji stola striedajú). To znamená, že manželský pár musí sedieť nutne oproti sebe. Ak usadíme prvú ženu, máme dve možnosti, ako ku nej usadiť mužov, a keďže ich manželky musia sedieť oproti nim, poloha všetkých je tak už jednoznačne daná. Ešte si uvedomme, že prvú ženu vieme usadiť na ľubovoľné zo 6 miest pri stole. Spolu tak máme $6 \cdot 2 = 12$ možností (6 možností usadenia ženy a ku každej možnosti máme 2 ďalšie na usadenie mužov).

Stredné 16. Máme tri klasické hracie kocky s číslami 1 - 6, na ktorých súčet bodiek na ľubovoľných dvoch protiľahlých stenách je 7. Chceme z nich zlepiť teleso (zlepujeme len celé steny). Aký najmenší počet bodiek môže byť na povrchu telesa?

Výsledok. 40

Riešenie. Hracia kocka má tri dvojice protiľahlých stien. Súčet bodiek na jednej hracej kocke je preto $7 \cdot 3 = 21$. Na troch samostatných hracích kockách máme spolu $3 \cdot 21 = 63$ bodiek. Ak chceme dosiahnuť čo najmenší súčet bodiek na telese, kocky musíme zlepiť tak, aby sme tie najväčšie čísla zakryli (zlepíme kocky stenami s najvyššími číslami). Dve kocky vieme spojiť tak, že ich spolu zlepíme ich stenami, kde majú šesť bodiek. Ak chceme prilepiť aj tretiu kocku, môžeme ju pripojiť tak, že na nej zakryjeme stenu so šiestimi bodkami. Na dvojici zlepených kociek ale vieme zalepením zakryť najviac už len päť bodiek (lebo steny so šiestimi sú už zlepené). Nalepením tretej kocky tak dostávame teleso s najmenším počtom bodiek. Lepením sme zakryli $6 + 6 = 12$ bodiek (zlepením prvých dvoch kociek) a $6 + 5 = 11$ bodiek (zlepením dvoch s treťou). Teleso má preto súčet bodiek na povrchu $63 - 12 - 11 = 40$.

Stredné 17. Na ostrove žijú poctivci, ktorí vždy hovoria pravdu a klamári, ktorí vždy klamú. Cudzinec stretne troch ostrovanov A, B a C. Cudzinec sa opýta A: „Ste klamár alebo poctivec?“ A niečo odpovie, ale cudzinec to nepočuje, a tak sa pýta B: „Čo povedal A?“ B odpovedá: „A povedal, že je klamár.“ Na to C povie: „Neverte B, ten klame.“ Čo sú zač B a C?

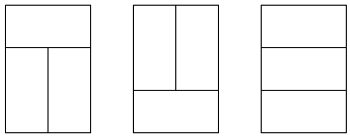
Výsledok. B klame a C hovorí pravdu

Riešenie. Uvedomme si, že nikto nemôže povedať vetu: „Som klamár.“ Klamár by tak hovoril pravdu a pravdovravný by tak klamal. Ak teda B tvrdí, že táto veta padla, sám je klamár. C, ktorý tvrdí, že B klame, je tým pádom pravdovravný.

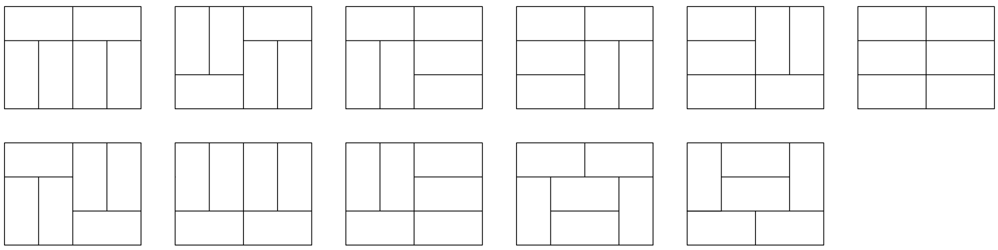
Stredné 18. Koľkými spôsobmi vieme vydláždiť miestnosť pôdorysu 4×3 dlaždicami s rozmerom 2×1?

Výsledok. 11

Riešenie. Vezmime si jednoduchší prípad, a to miestnosť s rozmermi 2×3. Tu ľahko nájdeme tri možnosti vydláždenia:



Teraz si vieme miestnosť 4×3 pomyselne rozdeliť na dve miestnosti 2×3, ktoré sú nezávislé. Pre prvú z nich máme 3 spôsoby vydláždenia, a pre každé z týchto vydláždení máme 3 spôsoby vydláždenia druhej. Celkovo to je $3 \cdot 3 = 9$ možností. Ostáva vyriešiť prípad, kedy nemáme takéto dve pomyselné 2×3 miestnosti, t.j. vtedy, keď cez pomyselnú poliacu čiaru prechádza dlaždica. Tu ľahko nájdeme posledné dve možnosti:



Stredné 19. Na večierku sa zišlo niekoľko hostí, medzi ktorými bolo rovnako veľa mužov a žien. Najskôr si hostia chceli podať ruky každý s každým – to by však bolo príliš veľa podaní. Preto si podali ruky iba všetci muži navzájom a všetky ženy navzájom. Tým sa ušetrilo 36 podaní. Koľko osôb sa zúčastnilo večierku?

Výsledok. 12

Riešenie. Predstavme si, že máme jedného muža a jednu ženu – bude medzi nimi jedno podanie. Ak by sme mali dvoch mužov a dve ženy, každý muž podá ruku každej zo žien. Podaní preto bude $2 \cdot 2 = 4$. Traja muži a tri ženy? Opäť každý z troch mužov podá ruku každej z troch žien. Spolu tak nastane $3 \cdot 3 = 9$ podaní. Stačí teda nájsť číslo, ktoré v súčine samo so sebou dáva 36. Po chvíľke ľahko zistíme, že $6 \cdot 6 = 36$, takže počet mužov aj žien je 6 a večierku sa zúčastnilo $6 + 6 = 12$ osôb.

Stredné 20. Rodinka chce prejsť tunelom. Otec prejde tunel za 1 minútu, mama za 2 minúty, syn za 4 minúty a dcéra za 5 minút. Cez úzky tunel môžu naraz prejsť maximálne dvaja, pričom sa pohybujú rýchlosťou toho pomalšieho. Vždy, keď niekto prechádza tunelom, musí mať so sebou baterku. Rodina má k dispozícii práve jednu baterku, ktorá vydrží svietiť práve 12 minút. Stihnú za tento čas všetci prejsť na druhú stranu tunela? Ak áno, tak ako?

Výsledok. áno

Riešenie. Ak prejdú tunelom na druhú stranu dvaja ľudia, niekto z nich sa musí vrátiť s baterkou naspäť. Na začiatku tak budeme mať opäť troch členov rodiny. Ak prejdú ďalší dvaja z nich, na začiatku stále ostáva jeden člen rodiny, po ktorého sa treba vrátiť s baterkou. Až tak vie prejsť tunelom posledná dvojica ľudí. Cestu tunelom bude preto baterka musieť absolvovať aspoň 5-krát. S presunom dvojíc členov veľmi hýbať nevieme, lebo aj tak musia na druhú stranu prejsť všetci. Bude ale výhodné, ak sa bude s baterkou vždy vracať otec alebo mama, lebo sú najrýchlejší. Pošlime preto na druhú stranu najprv mamu a otca (baterka svieti spolu 2 minúty). Posielame ich preto, aby sa jeden z nich hneď mohol vrátiť. Nech to je otec (čas baterky sa tak zvyšuje na $2 + 1 = 3$ minúty). Teraz pošlime na druhú stranu obe deti (čas sa zvyšuje na $2 + 1 + 5 = 8$ minút) – je výhodné ich poslať spolu, lebo ak by išli oddelene, trvalo by to aspoň $4 + 5 = 9$ minút času, čo je veľa (na miesto toho prejde len čas 5 minút). Teraz máme na druhej strane deti a mamu, ktorú môžeme poslať späť po otca a dostaneme sa tak na $2 + 1 + 5 + 2 = 10$ minút. Obaja rodičia nakoniec prejdú na druhú stranu, čím dostávame $2 + 1 + 5 + 2 + 2 = 12$ minút.

Ťažké 1. Kubo rozdeľoval mince svojim trom deťom. Najstaršiemu dal presne polovicu a pridal ešte jednu. Prostrednému dal presne tretinu (z pôvodného počtu) a pridal ešte jednu. Najmladší dostal mincí aspoň 10. Koľko najmenej mincí mohol Kubo na začiatku mať?

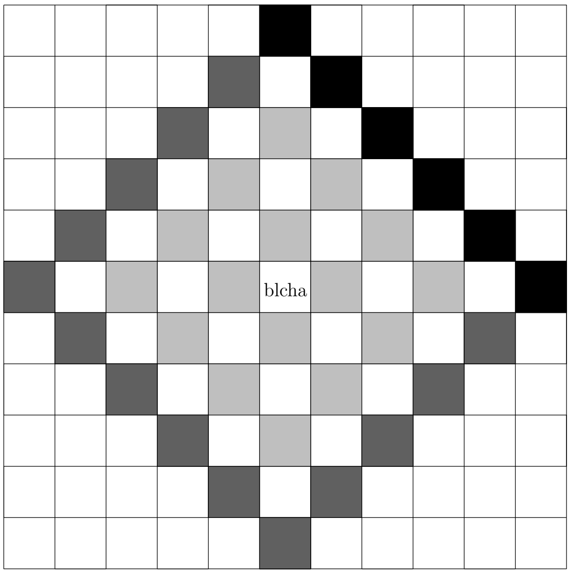
Výsledok. 72

Riešenie. Uvedomme si, že keď máme nejaký obnos mincí, ktorý rozdelíme na 6 rovnakých kôpok, tak 3 kôpky tvoria presne polovicu všetkých mincí a 2 kôpky tvoria presne tretinu mincí. Kubo tak mohol deliť peniaze práve takto – najprv ich rozdelil na 6 kôpok. Najstaršiemu synovi potom dal 3 kôpky a ešte jednu mincu napr. zo šiestej kôpky. Prostrednému 2 celé kôpky a ešte jednu mincu zo šiestej kôpky. Zvyšok šiestej kôpky patril najmladšiemu, ktorý mal aspoň 10 mincí. Kôpka mala teda na začiatku aspoň $10 + 1 + 1 = 12$ mincí, a keďže kôpok bolo 6, Kubo mal aspoň $6 \cdot 12 = 72$ mincí.

Ťažké 2. Blcha stojí na políčku štvorcovej siete. Každým skokom sa vie blcha dostať o políčko dopredu, dozadu, doľava alebo doprava. Na koľko políčok sa vie blcha dostať po 5 skokoch?

Výsledok. 36

Riešenie. Povedzme, že blcha bude skákať len smerom dopredu a doprava. Ak vyskúšame všetky možnosti (5-krát dopredu, 4-krát dopredu a 1-krát doprava, ...), dostaneme sa na políčka označené čiernou farbou.



Kombináciou nejakých iných dvoch smerov dostaneme vypísaním všetkých možností všetky tmavosivé políčka. Tie (spolu s čiernymi) predstavujú hranicu, za ktorú sa blcha nedostane (na to, aby sa dostala za hranicu by nám nevystačili skoky. Ak by sme totiž išli hoci tou najkratšou cestou, potrebovali by sme zjavne viac ako 5 skokov). A čo vo vnútri hranice? Ľahko prídeme na to, že na svetlosivé políčka sa dostať vieme. Vezmime si napríklad najvrchnejšie z nich – stačí skočiť 3-krát dopredu a potom spraviť dvojicu ľubovoľných skokov s navzájom opačnými smermi. Uvedomme si, ako nám určilo 5 skokov vonkajšiu hranicu. Ak by sme na začiatku spravili dva protichodné skoky, nepohneme sa nikam a ostanú nám ešte 3 skoky na ďalšie pohyby. Ale tie nám predsa definujú podobnú hranicu – to je vonkajšia vrstva svetlosivých štvorčekov. Podobne objavíme aj ostatné svetlosivé štvorčeky. Ak budeme skúšať rôzne skoky, nikdy sa nám nepodarí skončiť na žiadnom z bielych políčok. Dôvod je ten, že po mriežke sa pohybujeme v dvoch smeroch – vodorovnom a zvislom. Ak máme k dispozícii 5 skokov, v jednom z týchto smerov musíme vykonať nepárny počet skokov. Všimnime si však, že na to, aby sme sa dostali na biele políčka, musíme vykonať v oboch smeroch párny počet skokov. Svetlosivé, tmavosivé a čierne políčka sú preto všetky, kam blcha môže skočiť – ostáva ich spočítať: $4 + 12 + 20 = 36$.

Ťažké 3. Radka si na začiatok povie dve čísla. Každé ďalšie číslo, čo povie, je súčet všetkých čísel, ktoré predtým povedala. Radka na začiatok povedala číslo jedna a po ňom neznáme číslo. Aké je neznáme číslo, ak jedenáste Radkine číslo bolo 512?

Výsledok. 1

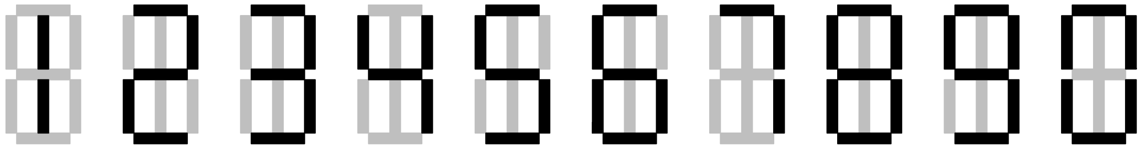
Riešenie. Ak povedala Radka 512 ako jedenáste číslo, musí to zároveň byť súčet všetkých predchádzajúcich, teda prvých desiatich, čísel, čo povedala. Čo ak by chcela Radka vysloviť dvanáste číslo? Bol by to súčet prvých jedenástich, teda $512 + 512 = 1024$ (súčet prvých desiatich + jedenáste). A čo trináste? Podobne $1024 + 1024 = 2048$. To nám dáva zaujímavé pozorovanie – každé číslo, čo Radka povie (okrem prvých dvoch), je dvojnásobok predchádzajúceho. Platí to preto, lebo ak máme niekoľko čísel s určitým súčtom, ďalšie číslo, čo vyslovíme, bude práve hodnota tohto súčtu. Bude teda tvoriť polovicu nového súčtu. Ak bolo Radkine jedenáste číslo 512, tak desiate bolo 256, deviate 128, ôsme 64, ..., tretie 2 a prvé dve preto museli byť obe jednotky.

Ťažké 4. V zvláštnej krajine majú zvláštny kalendár. Deň má 24 hodín, rok má 12 mesiacov, pričom každý mesiac má rovnaký počet dní a jeden rok má 8064 hodín. Každý týždeň má 7 dní a obsahuje rovnaké dni v rovnakom poradí ako náš týždeň. Tento rok začal pondelkom. Koľko piatkov je v tohtoročnom kalendári v tejto krajine?

Výsledok. 48

Riešenie. Ak má deň 24 hodín a celý rok 8064 hodín, jeden rok má presne $8064 : 24 = 336$ dní. Keďže rok má 12 mesiacov, jeden mesiac má $336 : 12 = 28$ dní. Každý mesiac teda trvá presne 4 týždne (a to presne od pondelka do nedele, nakoľko rok začína pondelkom). Každý mesiac má preto 4 piatky a za celý rok je v krajine piatkov $4 \cdot 12 = 48$.

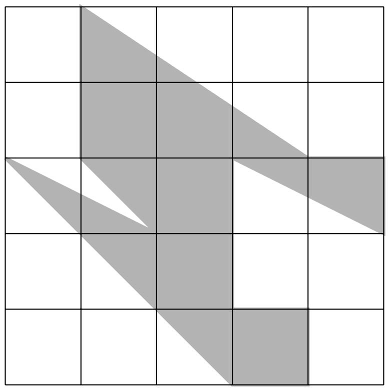
Ťažké 5. Peťo má doma digitálne hodiny a hneď vedľa nich zrkadlo tak, že hodiny sa v ňom odrážajú ako obraz podľa zvislej osi. Peťo nikdy nevie, kedy sa pozerá do zrkadla, a kedy na hodiny. Koľko je počas dňa takých momentov, že čas, ktorý je na hodinách aj v zrkadle je nejaký skutočný? Číslice na Peťovych hodinkách vyzerajú takto:



Výsledok. 121

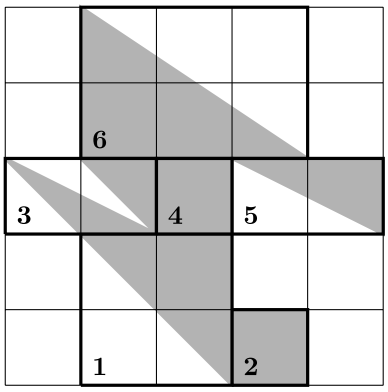
Riešenie. Ak sa pozrieme do zrkadla, vidíme obraz, ktorý je stranovo prevrátený. Preto čas, ktorý ukazujú digitálne hodinky, musí obsahovať len cifry, ktoré po stranovom prevrátení sú tiež ciframi (napísané správne). Tejto podmienke vyhovujú cifry 0, 1 a 8 (rovnaké po stranovom prevrátení) a 2 a 5 (zobrazia sa navzájom na seba).
Digitálne hodinky ukazujú čas od $00 : 00$ do $23 : 59$, teda čas má formát $AB : CD$, a v zrkadle vidíme stranovo prevrátený obraz vo formáte $DC : BA$. Pre zjednodušenie stačí uvažovať usporiadanie dvoch cifier (napr. AB) a ich stranové prevrátenie, keďže pre druhú dvojicu (DC) by sme mali úplne rovnaký postup.
Možné dvojice cifier (vyjadrujúce hodiny), ktoré aj po stranovom prevrátení dávajú vhodné dvojice (vyjadrujúce minúty), sú 00, 01, 02, 05 – začínajúce nulou (08 neprichádza do úvahy, lebo po preklopení by to bolo 80, čo sa nemôže nachádzať na pozícii minút), 10, 11, 12, 15 – začínajúcu jednotkou (18 opäť nevyhovuje, lebo 81 nie je reálny čas minút), 20, 21, 22 – začínajúce dvojkou. Ostatné dvojice čísel tvoria čísla väčšie ako 23. Taký počet hodín však nenastane, a preto sa nemusíme týmito dvojicami zaoberať.
Dohromady teda máme $4 + 4 + 3 = 11$ možností pre dvojicu AB, ale (podľa úvah vyššie) rovnako 11 možností pre dvojicu DC. Platí, že ku každej z 11 možností pre AB vieme priradiť ktorúkoľvek z možností pre DC a bude správna. Z toho dostávame, že všetkých možností je $11 \cdot 11$, čo je dokopy 121 možností.

Ťažké 6. Zistite obsah sivej plochy, ak obsah jedného malého štvorčeka je 1.



Výsledok. 9

Riešenie.

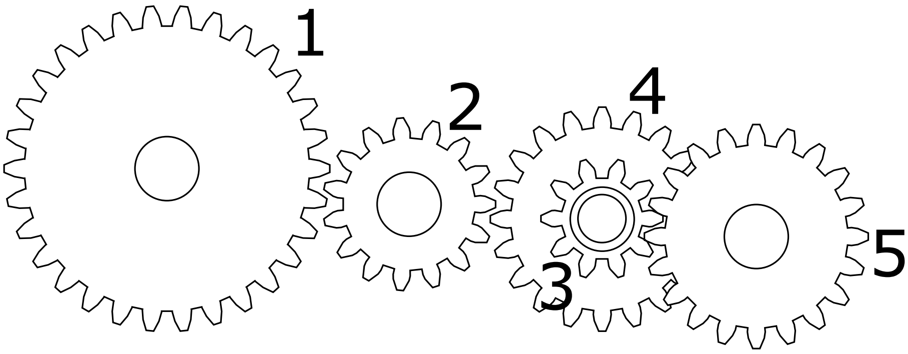


Rozdeľme sivú plochu na 6 obdĺžnikov podľa obrázka a pozrime sa na obsahy sivých častí v jednotlivých obdĺžnikoch.

1. Obdĺžnik 1 má obsah 4 štvorčeky, pričom sivá časť zjavne tvorí polovicu tohto obsahu, a teda príslušná sivá časť má preto obsah 2.
2. Obdĺžnik 2 má obsah 1 a celý ho tvorí sivá plocha.
3. Obdĺžnik 3 má obsah 2, pričom sivá plocha tvorí polovicu tohto obsahu (všimnime si, že dva biele trojuholníky v ňom majú rovnaký tvar aj veľkosť ako dva sivé – tvoria preto polovicu), a teda má obsah 1.
4. Obdĺžnik 4 má obsah 1 a celý ho tvorí sivá plocha.
5. Obdĺžnik 5 má obsah 2, pričom sivá časť tvorí polovicu, a teda má obsah 1.
6. Obdĺžnik 6 má obsah 6, pričom sivá časť tvorí polovicu, a teda má obsah 3.

Keď spočítame obsahy jednotlivých sivých častí, dostaneme obsah celého útvaru: $2+1+1+1+1+3=9$.

Ťažké 7. Na obrázku je sústava ozubených kolies na osiach. Koleso 1 má 30 zubov, 2 má 15 zubov, 3 má 10 zubov a kolesá 4 a 5 obe po 20 zubov. Kolesá 3 a 4 sú navyše spojené osou (otáčajú sa spoločne). Koľkokrát sa otočí koleso 5, a v ktorom smere sa bude točiť, ak kolesom 1 otočíme štyrikrát v smere pohybu hodinových ručičiek?



Výsledok. trikrát v protismere pohybu hodinových ručičiek

Riešenie. Stačí si uvedomiť, ako ozubené kolesá fungujú – zuby kolies do seba zapadajú striedavo (raz zub jedného, potom zub druhého kolesa). Ak sa prvé koleso otočí štyrikrát, teda o $4\cdot 30=120$ zubov, tak aj druhé koleso sa musí otočiť o 120 zubov a rovnakou úvahou sa aj koleso číslo 4 otočí o 120 zubov. Navyše, ak sa točí prvé koleso v smere pohybu hodinových ručičiek, druhé sa musí nutne točiť v smere opačnom (predstavte si vzájomný pohyb kolies). Koleso 4 sa tak bude točiť tiež v smere pohybu hodinových ručičiek, rovnako ako prvé koleso. Koleso 4 sa otočí o 120 zubov, teda šesťkrát (lebo samo má 20 zubov a $120:20=6$). Koleso 3, ktoré je na rovnakej osi, sa otočí v rovnakom smere a nutne tiež šesťkrát. Miestom dotyku kolies 3 a 5 teda prejde $6\cdot 10=60$ zubov (koleso 3 má 10 zubov) a koleso 5 sa preto otočí tiež o 60 zubov, a to v protismere pohybu hodinových ručičiek (lebo kolesá 3 a 4 sa spolu točia v smere pohybu). Ostáva určiť počet otáčok piateho kolesa – keďže sa otočilo o 60 zubov a samo má 20 zubov, otočilo sa spolu trikrát ($60:20=3$).

Ťažké 8. Zuzka žije v krajine, kde existujú len mince hodnoty 3 a hodnoty 7. Akú najvyššiu sumu s týmito mincami nevie zaplatiť, ak má k dispozícii ľubovoľný počet mincí oboch hodnôt? Suma je kladné celé číslo a pri platení jej žiadne mince späť nevydajú.

Výsledok. 11

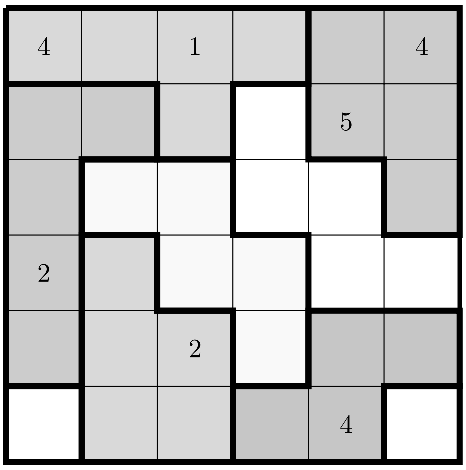
Riešenie. Rozdeľme si všetky kladné celé čísla (teda všetky čísla, čo môžu byť sumou) na tri skupiny (každej skupine patrí samostatný riadok v tabuľke):

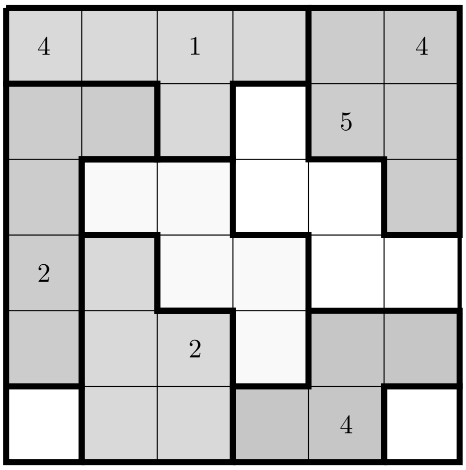
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
1.	1			4			7			10			13			16		...
2.		2			5			8			11			14			17	...
3.			3			6			9			12			15			...

Všimnime si, že Zuzka vie zaplatiť ľubovoľnú sumu z tretej skupiny (t.j. sumy 3, 6, 9, 12, ...) tak, že ju jednoducho celú vyskladá z mincí s hodnotou 3. Je to možné, pretože táto skupina obsahuje len násobky čísla 3.
Uvedomme si tiež, že vie zaplatiť každú sumu z druhej skupiny od sumy 14 vyššie (vrátane 14), t.j. sumy 14, 17, 20, 23, ... Sumu 14 totiž vie zaplatiť dvomi mincami hodnoty 7 a vyššie sumy získame pridávaním mincí s hodnotou 3. Podobne, z prvej skupiny vie zaplatiť všetky sumy od 7 vyššie (vrátane), t.j. 7, 10, 13, 16, ... Opäť tak, že ku jednej minci s hodnotou 7 bude pridávať mince s hodnotou 3.

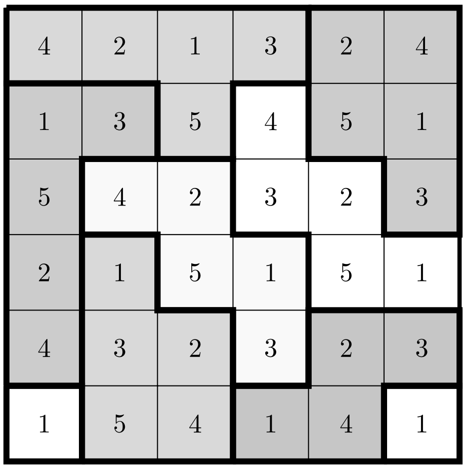
Všimnime si teda, že vie zaplatiť všetky sumy od 14 vyššie (vrátane 14). Hľadaná najvyššia suma, ktorú zaplatiť nevie, je preto menšia ako 14. Z prvej skupiny sme zatiaľ neprišli na to, ako vie zaplatiť sumy 1 a 4. Z druhej sú to sumy 2, 5, 8 a 11. Kandidátom na výsledok je teda suma 11. Po chvíľke skúšania naozaj zistíme, že táto suma sa nedá danými mincami zaplatiť.

Ťažké 9. Mriežka sa skladá z ohraničených oblastí zložených z 1 až 5 políčok. Vašou úlohou je vyplniť tieto políčka číslami tak, aby v každej oblasti boli čísla od 1 po počet políčok v nej (t.j. ak má oblasť napr. 3 políčka, sú v nej čísla 1, 2 a 3). Akékoľvek dve susedné políčka mriežky (aj po diagonále) nemôžu obsahovať rovnaké číslo. Dve mriežky máte pre prípad, že sa pomýlite.

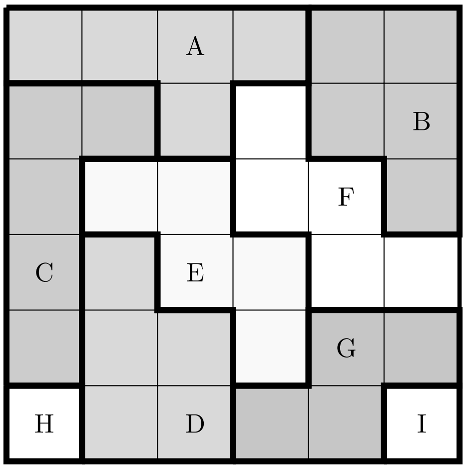




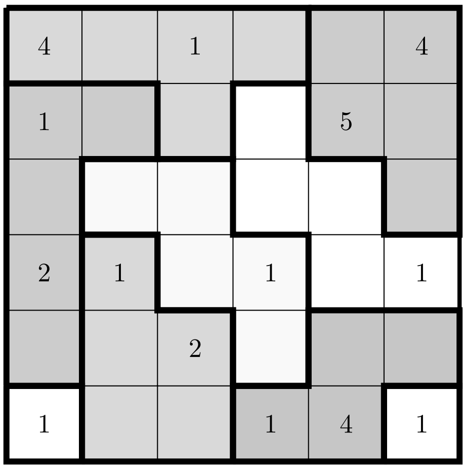
Výsledok.



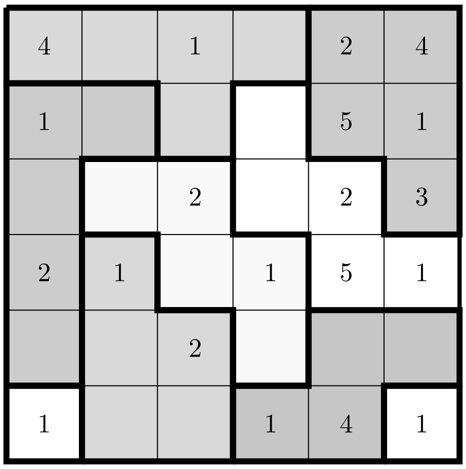
Riešenie. Najprv si jednotlivé oblasti označme písmenami od A po I podľa obrázka.



Najjednoduchšie sa vypĺňujú oblasti H a I, kde dáme automaticky 1. Ak sa pozrieme na oblasť G, môže v nej byť 1 len na jedinom mieste (a to tom, ktoré nesusedí s oblasťou I. Na hociktorom inom by totiž susedilo s jednotkou v oblasti I a to podľa zadania nie je povolené). V oblasti D máme teraz tiež len jednu možnosť pre umiestnenie čísla 1 – vo vrchnom štvorčeku (na zvyšných dvoch by totiž susedila s už doplnenými jednotkami v H a G). Rovnako doplníme jednotky v oblasti C, takisto v oblasti E a nakoniec v oblasti F (všade je len jedno vyhovujúce miesto).



Ak chceme doplniť číslo 2 do oblasti E, máme opäť len jedinú možnosť, lebo D a C určujú len jedno políčko, ktoré nie je susedné s dvojkou v nich. Ďalej vieme doplniť číslo 5 do oblasti F, lebo ostáva len jedno neobsadené políčko, ktoré nesusedí s päťkou v B. Číslo 2 v oblasti E ďalej obmedzuje umiestnenie dvojky v F len na jediné nevyplnené políčko – to, ktoré s ňou nesusedí. Pozrime sa na najnižšie políčko v oblasti B, v ktorej chýbajú už len čísla 1, 2 a 3. Na spomínané políčko nemôžeme umiestniť čísla 1 ani 2 (všimnime si susedov v oblasti F), a teda na políčku musí byť nutne číslo 3. Teraz už poľahky vyplníme zvyšné čísla (1 a 2) v oblasti B.



Vieme vyplniť celú oblasť A (najprv číslo 3 na políčko najviac vpravo, lebo 2 ani 5 tam byť nemôžu. Potom 2 a 5 podľa oblasti E). Následne vieme dokončiť aj oblasť F a po nej oblasť E, z nich už jasne plynie aj obsadenie políčok v C, G a nakoniec D. To už ale nechávame na Vás :).

Ťažké 10. Detská stavebnica obsahuje kocku, ihlan a valec. Určte hmotnosť každého z telies, ak viete, že:

1. 2 valce, 1 kocka a 1 ihlan spolu vážia 450 gramov,
2. 1 valec, 2 kocky a 1 ihlan spolu vážia 480 gramov,
3. 1 valec, 1 kocka a 2 ihlany spolu vážia 510 gramov.

Výsledok. Valec – 90 g, Kocka – 120 g, Ihlan – 150g

Riešenie. Vezmime všetky telesá zo všetkých troch informácií. Dostaneme spolu 4 valce, 4 kocky a 4 ihlany, ktoré spolu vážia $450+480+510 = 1440$ gramov. 1 valec, 1 kocka a 1 ihlan preto vážia 360 gramov (pretože $360 \cdot 4 = 1440$). Teraz si ostáva všimnúť, že v každej z informácií máme oproti tejto trojici o jedno teleso viac, a teda:

1. 1 valec, 1 kocka a 1 ihlan (spolu 360 gramov) a 1 valec spolu vážia 450 gramov → valec váži 90 gramov,
2. 1 valec, 1 kocka a 1 ihlan (spolu 360 gramov) a 1 kocka spolu vážia 480 gramov → kocka váži 120 gramov,
3. 1 valec, 1 kocka a 1 ihlan (spolu 360 gramov) a 1 ihlan spolu vážia 510 gramov → ihlan váži 150 gramov.

autori:	Florián Hatala, Peter Kovács, Henrieta Micheľová, Kristína Mišlanová, Daniel Onduš, Zuzana Ontkovičová, Žaneta Semanišinová, Roman Staňo
recenzia a úprava:	Jana Baranová, Erik Berta, Viktória Brezinová, Filip Csonka, Jakub Genči, Matej Hanus, Samuel Chaba, Vratislav Madáč, Michal Masrna, Martin Mihálik, Patrik Paľovčík, Martin Šalagovič, Martin Ševko
názov:	**MAMUT – 2. 6. 2017**
vydavatelia:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta Združenie STROM
www:	https://malynar.strom.sk/sk/mamut/ http://itakademia.sk/

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM
ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk