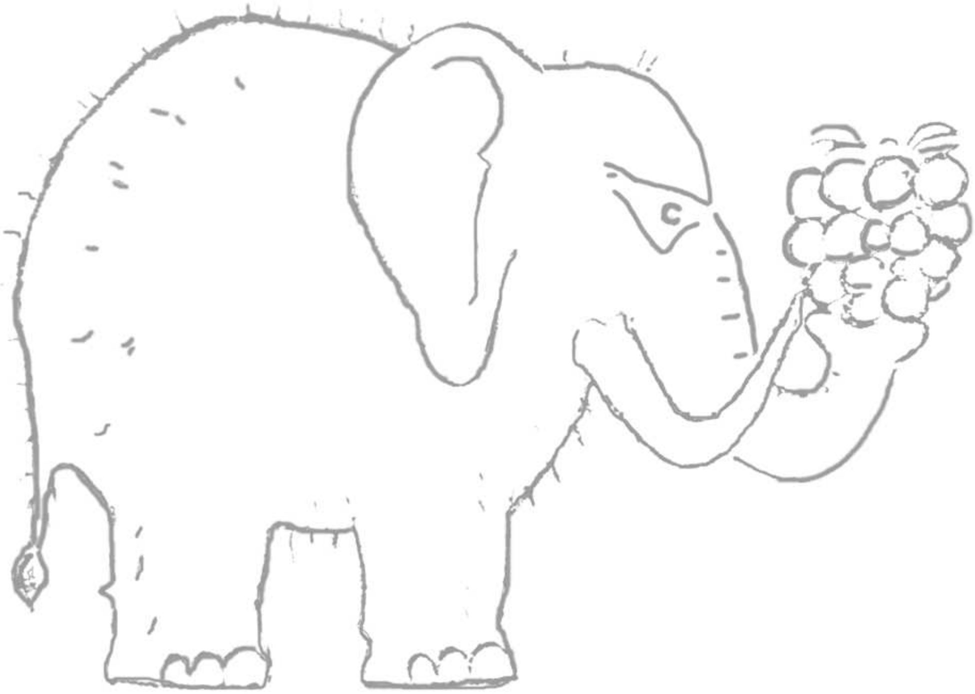


MAMUT

2019

Ľahké 1. Z čísla 69542310 vyčiarknite dve cifry tak, aby zostávajúce šesťciferné číslo bolo čo najmenšie. Potom urobte to isté ešte raz, ale tak, aby ste dostali čo najväčšie číslo. Aký je súčet týchto čísel?

Výsledok: 1496620

Riešenie: Nájdime najprv najmenšie možné šesťciferné číslo. Na to potrebujeme dostať čo najmenšiu cifru na mieste stotisícok. Tam sa môže nachádzať 6, ak škrtneme až cifry na ďalších pozíciách, 9, ak škrtneme cifru 6 a jednu z cifier na ďalších pozíciách alebo 5, ak škrtneme cifry 6 a 9. Najmenšia cifra z týchto možností je 5, a keďže sme už škrtli dve cifry, ďalšie už neškrtáme. Najmenšie možné šesťciferné číslo je teda 542310.
Teraz nájdime najväčšie možné šesťciferné číslo. Na mieste stotisícok je z troch možností najväčšia cifra 9 a z nasledujúcich potrebujeme vyškrtnúť ešte jednu. Ak by sme na ďalšej pozícii škrtli 5, ostalo by tam 4, čiže by vzniklo menšie číslo. Neskôr, ak by sme škrtli 4, ostala by tam cifra 2 a aj teraz by vzniklo menšie číslo. K výsledku sa dostávame až na ďalšej pozícii, keďže vyškrtnutím cifry 2 dostaneme na mieste stoviek hľadaného čísla cifru 3, čiže vznikne väčšie číslo. Už sme škrtli 2 cifry, čiže najväčšie možné šesťciferné číslo je 954310. Ich súčet je $954310 + 542310 = 1496620$

Ľahké 2. Deti na sústredení pochodovali v dvojstupe. Bol medzi nimi jeden zvedavec, ktorý ich chcel spočítať. Pred sebou napočítal 10 dvojíc, za sebou 8 dvojíc. Koľko bolo detí na sústredení?

Výsledok: 38

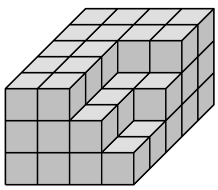
Riešenie: Zvedavec pred sebou napočítal 10 dvojíc, teda $10 \cdot 2 = 20$ detí a za sebou 8 dvojíc, teda $8 \cdot 2 = 16$ detí. Zvedavec ako člen dvojstupu taktiež musí byť členom dvojice, ktorú nerátal ani ako dvojicu za sebou, ani ako pred sebou. Detí je teda $20 + 16 + 2 = 38$

Ľahké 3. Farmár Robo má rovnaký počet sliepok, oviec a kráv. Dokopy majú 180 nôh. Koľko kráv má farmár Robo?

Výsledok: 18

Riešenie: Keďže kráv, oviec aj sliepok je rovnako, vieme ich rozdeliť do takých skupín, že v každej bude jedna krava, jedna ovca a jedna sliepka. Krava aj ovca majú po 4 nohy, zatiaľ čo sliepka má 2, teda takáto skupina má spolu $2+4+4 = 10$ nôh. Nôh je na farme 180, teda skupín bude $180 \div 10 = 18$. Ak je skupín 18 a v každej je jedna krava, tak kráv je na farme 18.

Ľahké 4. Koľko najmenej kociek budeme ešte potrebovať, aby sme stavbu na obrázku doplnili do kocky?



Výsledok: 73

Riešenie: Najväčší rozmer stavby na obrázku je 5, preto najmenšia vzniknutá kocka musí mať rozmery $5 \times 5 \times 5$. Na doplnenie tejto stavby na kváder $4 \times 5 \times 3$ budeme potrebovať 8 kociek. Na doplnenie kvádra $4 \times 5 \times 3$ na kváder $5 \times 5 \times 3$ budeme potrebovať $3 \cdot 5 = 15$ kociek. Na doplnenie kvádra $5 \times 5 \times 3$ na kocku $5 \times 5 \times 5$ budeme potrebovať $2 \cdot (5 \cdot 5) = 2 \cdot 25 = 50$ kociek. To je dokopy $8 + 15 + 50 = 73$ kociek.

Ľahké 5. V mestskej časti, kde žije Lujza, 3 pomaranče stoja toľko ako hruška a jablko dokopy. Jablko je o euro drahšie ako pomaranč a hruška je o 2 eurá drahšia ako jablko. Koľko stojí jablko, hruška a pomaranč dokopy?

Výsledok: 16

Riešenie: Hruška má rovnakú cenu ako jablko a dve eurá. To znamená, že vetu „3 omaranče stoja rovnako ako hruška a jablko dokopy“ môžeme prepísať ako „3 pomaranče stoja rovnako ako dve jablká a dve eurá“. Keďže vieme, že jablko má rovnakú cenu ako pomaranč a jedno euro, môžeme vetu „3 pomaranče stoja rovnako ako dve jablká a dve eurá“ prepísať ako „3 pomaranče stoja rovnako ako 2 pomaranče a štyri eurá“. Z tejto vety vidíme, že jeden pomaranč stojí 4 eurá, tým pádom jablko stojí $4 + 1 = 5$ eur a hruška stojí $5 + 2 = 7$ eur a spolu stoja $4 + 5 + 7 = 16$ eur.

Ľahké 6. Traja kamaráti, Robo, Filip a Martin, pracujú ako doktor, inžinier a hudobník v nejakom poradí. Najmladší z nich je doktor a nemá brata. Martin je starší ako inžinier a jeho sestra je vydatá za Filipovho brata. Kto je doktor a kto inžinier?

Výsledok: Doktor je Robo a inžinier je Filip

Riešenie: Najprv si povolania zoradíme podľa veku. Vieme, že doktor je najmladší. Keďže Martin je starší ako inžinier, tak inžinier nemôže byť najstarší, teda je druhý najstarší. Tým pádom je najstarší hudobník. Martin je starší ako inžinier, teda Martin musí byť hudobník. Vieme, že doktor nemá brata, a zároveň vieme, že Filip má brata. Filip preto nie je doktor, takže musí byť inžinier. Doktorom tak musí byť Robo.

Ľahké 7. Filip číta knihu svojej sestre. Začína v sobotu so siedmimi stránkami a každým dňom číta o štyri strany viac ako v deň predtým. Na siedmy deň dočíta už iba posledné tri strany. Koľko stránok má kniha?

Výsledok: 105

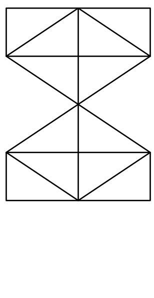
Riešenie: Počet strán, ktoré Filip prečítal počas prvých šiestich dní, zistíme tak, že sčítame 6 čísel, z ktorých prvé je 7 a každé ďalšie o 4 väčšie. Na konci ešte pričítame 3 strany, ktoré prečítal posledný deň. Celkový počet strán knihy je $7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27 + 3 = 105$.

Ľahké 8. Sedemhlavý velimihál sa živí mirabelkami. Jeho tri hlavy zožerú spolu za týždeň 30 kg mirabeliek. Aká je denná spotreba mirabeliek velimihála, keď každá jeho hlava zožerie rovnako veľa mirabeliek?

Výsledok: 10 kg

Riešenie: Vieme, že týždenná spotreba troch hláv je 30 kíl, teda týždenná spotreba jednej hlavy je $30 \div 3 = 10$ kíl. Jedna hlava zje za týždeň 10 kíl mirabeliek, 7 hláv ich teda za týždeň zje $10 \cdot 7 = 70$ kíl. Keďže za týždeň velimihál zje 70 kíl mirabeliek, tak za jeden deň zje $70 \div 7 = 10$ kíl mirabeliek.

Ľahké 9. Máme útvar postavený z dvanástich rovnakých trojuholníkov. Aký má obvod, ak obvod jedného trojuholníka je 29 centimetrov?



Výsledok: 116

Riešenie: Vidíme, že každá strana trojuholníka sa v obvode nachádza štyrikrát. To znamená, že obvod celého útvaru je rovný štvornásobku obvodu jedného trojuholníka. Takže celkový obvod je $29 \cdot 4 = 116$ centimetrov.

Ľahké 10. Na 2 stromoch sedelo 25 vrabcov. Ak z prvého stromu na druhý preletelo päť vrabcov a z druhého odletelo sedem vrabcov, ostalo na prvom strome dvakrát toľko vrabcov ako na druhom. Koľko vrabcov bolo pôvodne na každom strome?

Výsledok: Na prvom strome 17, na druhom strome 8

Riešenie: Po prelete piatich vrabcov z jedného na druhý strom sa ich počet nezmenil, a teda vrabcov aj bolo stále 25. Potom z druhého odletelo 7 vrabcov, a preto ich spolu na oboch stromoch ostalo $25 - 7 = 18$. Keďže na konci bolo na prvom strome dvakrát viac vrabcov ako na druhom, tak si

ich počet rozdelíme na tri rovnaké diely. Jeden diel je $18 : 3 = 6$. Na strome, kde ich bolo dvakrát viac budú dva diely a na druhom jeden diel. Preto je na konci na prvom strome $2 \cdot 6 = 12$ vrabcov a na druhom iba 6 vrabcov.
Teraz potrebujeme zistiť, koľko vrabcov bolo na stromoch pôvodne. Vieme, že na konci z druhého stromu odletelo 7 vrabcov, preto muselo byť na druhom strome predtým ako odleteli $6 + 7 = 13$ vrabcov. Na začiatku preletelo z prvého stromu na druhý 5 vrabcov, čiže pred tým, ako preleteli, bolo na prvom strome o 5 vrabcov viac a na druhom o 5 vrabcov menej. Preto bolo na začiatku na prvom strome $12 + 5 = 17$ vrabcov a na druhom $13 - 5 = 8$ vrabcov.

Ľahké 11. Janči sčítal 4 prirodzené čísla a dostal číslo 407. Tri najmenšie z Jančiho čísel sú po sebe idúce a dve najväčšie z jeho čísel sú párne po sebe idúce. Aký je súčin najmenšieho a najväčšieho z Jančiho čísel?

Výsledok: 10400

Riešenie: Zoraďme si Jančiho čísla podľa ich veľkosti. Teraz sa pozrime na to, o koľko sú všetky čísla väčšie od najmenšieho. Vieme, že prvé (najmenšie) je väčšie o 0, druhé o 1 a tretie o 2. O štvrtom (najväčšom) čísle vieme, že je párne a tretie číslo a štvrté číslo sú párne po sebe idúce čísla, čo znamená, že štvrté číslo je o 2 väčšie ako tretie číslo – o 4 väčšie ako prvé číslo. Keď poznáme všetky rozdiely, môžeme ich sčítať: $0 + 1 + 2 + 4 = 7$. Tento súčet odčítame od súčtu Jančiho čísel a dostaneme $407 - 7 = 400$, čo je štvornásobok prvého čísla. Keďže už vieme, že prvé číslo je $400 \div 4 = 100$, tak štvrté číslo musí byť $100+4 = 104$. Súčin najväčšieho a najmenšieho čísla teda bude $100 \cdot 104 = 10400$.

Ľahké 12. Roman má menej ako 30 kamienkov. Vie ich presne rozdeliť na kôpky po 3 kamienky. Keď ich chce rozdeliť na kôpky po 2 kamienky, nepodarí sa mu to – jeden kamienok zvýši. To isté sa stane, keď ich skúsi rozdeliť do kôpok po 5 kamienkov. Koľko kamienkov má Roman?

Výsledok: 21

Riešenie: Môžeme si vypísať násobky čísla 3, menšie ako 30. Z tých vyškrtneme všetky párne čísla, pretože keď ich Roman delí na kôpky po 2 kamienky, jeden mu zvýši a teda ich nie je párny počet. Máme len tieto možnosti $3, 9, 15, 21, 27$. Potrebujeme už len zistiť, v ktorom z týchto prípadov dáva počet kamienkov po delení piatimi zvyšok 1. Vidíme, že jediná vyhovujúca možnosť je 21, pretože v ostatných prípadoch dostaneme iný zvyšok.

Ľahké 13. Kristín mala mriežku 5×5. Do každého jej políčka chce napísať nejaké celé číslo. Zároveň pre každý riadok, stĺpec a obe diagonály samostatne platí, že rozdiel medzi dvoma za sebou idúcimi číslami je rovnaký (rozdiel je rovnaký medzi číslami v prvom riadku, no nie je rovnaký ako medzi číslami v druhom riadku). Aké číslo má Kristín dopísať do políčka označeného písmenom x, ak zatiaľ napísala iba tri čísla ako na obrázku?

				21
	16			
		27		
				x

Výsledok: 42

Riešenie: Pozrime sa na uhlopriečku, ktorá ide z ľavého horného rohu do pravého dolného. Máme v nej už napísané dve za sebou idúce čísla, z čoho vieme vypočítať, že rozdiel medzi každými dvoma číslami v tejto uhlopriečke je $27 - 16 = 11$. Takže nasledujúce číslo po 27 bude $27 + 11 = 38$, a číslo v pravom dolnom rohu bude $38 + 11 = 49$. Keď sa teraz pozrieme na stĺpec úplne vpravo, vidíme, že v ňom máme prvé a posledné číslo, ktoré sú od seba vzdialené 4 políčka, teda rozdiel medzi dvoma za sebou idúcimi číslami v tomto stĺpci je $(49 - 21) \div 4 = 28 \div 4 = 7$. V tomto stĺpci teda budú za radom čísla $21, 28, 35, 42$ a 49. Kristín má teda do políčka označeného písmenom x doplniť číslo 42

Ľahké 14. Vežové hodiny odbijú každú celú hodinu príslušný počet úderov (napr. o desiatej 10 úderov) a ešte každú polhodinu jeden ďalší úder. Koľko úderov hodiny odbijú za 24 hodín? (Predpokladajte, že hodiny sú od 0 do 23)

Výsledok: 300

Riešenie: Hodiny odbijú polhodinu každú hodinu práve raz, teda za celý deň 24-krát. K tomu pripočítame odbitia na celú hodinu, čiže súčet všetkých čísel od 0 po 23. To znamená, že počet odbití hodín za jeden deň je súčet všetkých čísel od 0 do 24. Tento súčet vieme spočítať jednoducho pomocou nasledujúcej finty: $0+1+2+3+\cdots+23+24 = 0+(1+24)+(2+23)+(3+22)+\cdots+(11+14)+(12+13) = 0+12\cdot 25 = 300$.

Ľahké 15. Obchodník Peťo môže do krabice umiestniť buď 8 veľkých vriec alebo 10 malých vriec. Pri poslednej objednávke predal dokopy 96 vriec. Koľko krabíc mohol predať pri poslednej objednávke, ak vieme, že tam bolo viac veľkých vriec ako malých vriec?

Výsledok: 11 alebo 12

Riešenie: Veľkých vriec bolo viac ako malých, teda ich muselo byť viac ako $96 \div 2 = 48$.Veľké vrecia sú v škatuliach po 8, takže ich počet musel byť zároveň deliteľný 8. Veľkých vriec teda mohlo byť $56, 64, 72, 80, 88$ alebo 96. Zvyšok vriec museli byť malé vrecia, tie sú v škatuliach po 10, čiže zvyšok vriec musí byť deliteľný 10. Pre 56 veľkých vriec, čo je 7 škatúľ, by bolo malých vriec $96 - 56 = 40$, to sú 4 škatule. Spolu je to $7 + 4 = 11$ škatúľ. To je prvé vyhovujúce riešenie. Pre 64 veľkých vriec by malých muselo byť $96 - 64 = 32$, čo nie je deliteľné 10. Pre 72 veľkých vriec by malých muselo byť $96 - 72 = 24$, čo tiež nie je deliteľné 10. Pre 80 veľkých vriec by malých muselo byť $96 - 80 = 16$, čo taktiež nie je deliteľné 10. Pre 88 veľkých vriec by malých muselo byť $96 - 88 = 8$, čo opäť nie je deliteľné 10. Takže žiadna z týchto možností nevyhovuje. Napokon, ak je všetkých 96 vriec veľkých, sú v $96 \div 8 = 12$ škatuliach. To je druhé riešenie.

Ľahké 16. Martin, Michal a Matúš sú bratia. Každý z nich vlastní jeden kabát a jednu čiapku. V jedno ráno odišli v rýchlosti tak, že každý si na seba dal náhodnú čiapku a náhodný kabát. Vieme len, že Martin mal Michalovu čiapku a Matúšov kabát. Koľko rôznych možností ako mohli mať kabáty a čiapky existuje?

Výsledok: 4

Riešenie: Keďže vieme, čo mal na sebe Martin, stačí len zistiť, čo na sebe mohli mať Matúš a Michal. Ostávajú Martinova a Matúšova čiapka a Martinov a Michalov kabát. Každý z nich si mohol obliecť náhodnú z týchto dvoch čiapok a ta druhá ostala druhému z chlapcov. Pre kabáty platí to isté. Chlapci mali teda 2 možnosti, ako si obliecť čiapky a ku každej z nich 2 možnosti ako si obliecť kabáty, čiže spolu mali $2 \cdot 2 = 4$ možností ako sa mohli obliecť.

Ľahké 17. Mišo rozdelil obdĺžnik s dĺžkami strán 42 mm a 70 mm na rovnaké štvorce. Koľko je týchto štvorcov, ak Mišo kreslil čo najväčšie možné štvorce?

Výsledok: 15

Riešenie: Ak chceme stranu obdĺžnika rozdeliť na strany niekoľkých rovnakých štvorcov, musí byť jej dĺžka deliteľná dĺžkou strany štvorca. Keďže štvorec má obe strany rovnako dlhé, hľadáme číslo, ktoré delí aj 42 aj 70. Mišo kreslil čo najväčšie štvorce, takže hľadáme najväčšie takéto číslo. Pozrime sa na delitele 42. Sú to $1, 2, 3, 6, 7, 14, 21$ a 42. Delitele 70 sú $1, 2, 5, 7, 10, 14, 35$ a 70. Vidíme, že najväčšie číslo, ktoré delí aj 42 aj 70 je 14. Kratšia strana by teda bola rozdelená na $42 \div 14 = 3$ štvorce a dlhšia na $70 \div 14 = 5$ štvorcov. Spolu by ich teda bolo $3 \cdot 5 = 15$.

Ľahké 18. Janka delila lentilky sebe a sestre Danke. Sebe dala 11 lentiliek, Danke 2. Potom sebe 10 a Danke 4. Nakoniec sebe 9 a Danke 6.... Týmto spôsobom sebe dala vždy o 1 menej a Danke o 2 viac ako predtým. V delení pokračovala, až kým nemali obe dievčatá rovnako veľa lentiliek. Koľko lentiliek si rozdelili?

Výsledok: 112

Riešenie: V každom kole dá Janka sebe o 1 lentilku menej a Danke o 2 viac ako v predošlom. Rozdiel medzi jej a Dankinými lentilkami sa teda v danom kole oproti minulému kolu zmenší dokopy o 3.

Celkový rozdiel (rozdiel medzi všetkými lentilkami, ktoré dievčatá už majú), ktorý je po prvom kole $11 - 2 = 9$, bude po druhom kole $9 + (9 - 3) = 9 + 6 = 15$, po treťom kole $15 + (6 - 3) = 15 + 3 = 18$ a po štvrtom $18 + (3 - 3) = 18 + 0 = 18$. Celkový rozdiel sa odteraz bude už iba zmenšovať, pretože Danka bude dostávať viac lentiliek ako Janka, pričom sa vždy zväčší o 3. Preto bude celkový rozdiel po piatom kole $18 - (0 + 3) = 18 - 3 = 15$, po šiestom $15 - (3 + 3) = 15 - 6 = 9$ a po siedmom $9 - (6 + 3) = 9 - 9 = 0$, takže po siedmom kole majú už obe rovnako veľa lentiliek. Konkrétne, Janka má $11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 56$ a Danka má $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14$, čiže tiež 56. Spolu teda majú $56 + 56 = 112$ lentiliek.

Ľahké 19. V prvom z dvoch po sebe idúcich rokov bolo viac štvrtkov ako utorkov. Ktorých dní v týždni bolo v druhom roku najviac za predpokladu, že ani jeden zo spomínaných rokov nebol priestupný?

Výsledok: Piatkov

Riešenie: Nepriestupný rok má 365 dní. To znamená, že týždňov bude $365 \div 2 = 52$ zv. 1. Z toho vidíme, že v prvých 364 dňoch bude každý zo siedmich dní 52-krát. Posledný deň bude ten, ktorým rok začal a dokopy bude 53-krát. Takže prvý rok začal aj skončil štvrtkom, preto druhý rok začne piatkom. Z toho vyplýva, že v ňom bude najviac piatkov.

Ľahké 20. V triede je 28 detí. 13 hrá futbal, 11 hrá basketbal a 7 deti hrá futbal aj basketbal. Koľko deti nehrá ani futbal ani basketbal?

Výsledok: 11

Riešenie: Ak chceme zistiť, koľko detí sa nevenuje ani jednému zo športov, tak potrebujeme vedieť koľko detí hrá iba futbal, koľko iba basketbal a koľko oba športy. Vieme síce, že 13 detí hrá futbal, no keďže do toho počítame aj tých, ktorí hrajú aj basketbal, tak od toho musíme odrátať deti, ktoré sa venujú obom športom. To znamená, že detí, ktoré hrajú iba futbal bude $13 - 7 = 6$. Rovnako zistíme, že iba basketbal hrá $11 - 7 = 4$ deti. Teraz už vieme spočítať, že v triede sa nachádza $6 + 4 + 7 = 17$ detí, ktoré hrajú aspoň jeden zo športov, ktoré sú v zadaní. Počet detí, ktoré nehrajú ani jeden z týchto športov už zistíme jednoduchým odčítaním športovcov od celkového počtu detí v triede. Takýchto detí je $28 - 6 - 4 - 7 = 11$.

Ľahké 21. Polícia zadržala Matúša, Miša a Martina ako podozrivých z vykradnutia banky. Pri výsluchu povedali nasledovné výroky. Matúš: "Som nevinný.", Mišo: "Som nevinný.", Martin: "Mišo je vinný". Vieme, že iba jeden z nich povedal pravdu a jeden z nich vylúpil banku. Kto vylúpil banku? Kto hovoril pravdu?

Výsledok: Matúš vylúpil banku a Mišo hovorí pravdu.

Riešenie: Vidíme, že Mišo a Martin si navzájom odporujú, keďže jeden tvrdí, že Mišo je nevinný a druhý, že Mišo je vinný. To znamená, že nemôžu obaja klamať ani obaja vravieť pravdu, inak by bol Mišo naraz vinný aj nevinný. Teda ten, ktorý vraví pravdu musí byť buď Mišo alebo Martin. Ak by pravdu vravel Martin, tak by bol vinný Mišo, avšak bol by vinný aj Matúš, lebo on tvrdí, že je nevinný, no v tomto prípade by klamal. Preto musí pravdu vravieť Mišo. Potom vieme, že Mišo je nevinný, podľa neho aj podľa Martina a zároveň vieme, že Matúš klame, takže je vinný.

Ľahké 22. Višne v miske môžu byť rozdelené rovnakým dielom medzi 6 alebo 12 alebo 15 detí. Koľko najmenej môže byt v miske višní ak vieme, že tam určite nejaké sú?

Výsledok: 60

Riešenie: Hľadáme čo najmenšie číslo, ktoré je bezo zvyšku deliteľné $6, 12$ aj 15. Vieme, že každé číslo, ktoré je deliteľné 12, je deliteľné aj 6, lebo 12 je násobok 6. To znamená, že hľadáme len najmenšie číslo, ktoré je naraz deliteľné 12 aj 15. Pozrime sa na najmenšie násobky čísla 15. Vieme, že 15 ani 30 nie je deliteľné 12, takisto ani 45. Ďalší násobok 15, čo je 60 už však môžeme vydeliť 12 bezo zvyšku, čo znamená, že sme našli riešenie.

Ľahké 23. Kubo si lepí nálepky do rohov pohľadnice. Koľkými spôsobmi môže nalepiť nálepky stromu, hradu, rytiera a slnka ak chce mať nálepky hradu a rytiera v dvoch susedných rohoch a v každom rohu bude iba jedna nálepka?

Výsledok: 16

Riešenie: Poďme postupne umiestňovať nálepky podľa zadania. Začneme nálepkou hradu, tú môžme nalepiť do hociktorého zo štyroch rohov. Teraz chceme nalepiť rytiera. S každým rohom susedia dva rohy, a teda pre každú zo štyroch možností máme ďalšie dve možnosti. To je dokopy zatiaľ $4 \cdot 2 = 8$ možností. Ostali nám dva voľné rohy a dve nálepky, a teda pre každú z 8 možností máme ďalšie dve. To je dokopy $8 \cdot 2 = 16$ celkových možností, ako nalepiť nálepky podľa zadania.

Ľahké 24. Miestnosť s rozmermi 5×5 je šachovnicovo vydláždená tmavými a svetlými dlaždicami. Erik sa postavil do ľavého horného rohu a prechádzal sa popri stenách (po obvode) tak, že stúpil na každú tmavú dlaždicu. Spolu stúpil na 8 tmavých dlaždíc. Potom sa prešiel popri stenách väčšej miestnosti s rovnakou dlažbou a prešiel 148 tmavých dlaždíc. Aké sú rozmery väčšej miestnosti?

Výsledok: 75×75

Riešenie: Obvod miestnosti 5×5 tvorí 16 dlaždíc - 8 tmavých a 8 svetlých. Ak na obvode väčšej miestnosti je 148 tmavých dlaždíc, tak celý obvod bude tvoriť $148 + 148 = 296$ dlaždíc. Počet dlaždíc na obvode bez rohových dlaždíc bude $296 - 4 = 292$. Potom počet dlaždíc na jednej strane (bez rohových dlaždíc) bude $292 \div 4 = 73$. Teraz k tejto dĺžke ešte späť pripočítame dve rohové dlaždice a zistíme, že rozmer väčšej miestnosti je $73 + 2 = 75$.

Ľahké 25. V krabici je 7 kartičiek, na každej je iné číslo od 1 do 7. Dano si zoberie 3 kartičky z krabice a Gabča si zoberie 2 ďalšie kartičky. Dano sa pozrie na svoje kartičky a povie Gabči: „Viem, že súčet čísel na tvojich kartičkách je párny." Aký je súčet čísel na Danových kartičkách, ak ani jeden z nich nevidí, ktoré kartičky si vytiahol ten druhý?

Výsledok: 12

Riešenie: Dve čísla majú párny súčet len vtedy, ak sú obe párne, alebo sú obe nepárne. Dano teda vie, že obe čísla, ktoré si Gabča vytiahla, majú rovnakú paritu (čiže sú obe párne alebo nepárne). Tým si môže byť istý jedine v prípade, že po tom, ako si vytiahol 3 karty, ostali v krabici už len čísla s rovnakou paritou. Keďže v krabici sa nachádzajú štyri nepárne čísla $(1, 3, 5, 7)$ a tri párne $(2, 4, 6)$, vytiahnutím žiadnych troch nevie dosiahnuť, aby si Gabča vytiahla určite dve párne. Čo však vie dosiahnuť je, že ak si vytiahne všetky tri párne čísla, Gabča si s istotou vytiahne dve nepárne a jej súčet teda bude párny. Dano si preto vytiahol všetky tri párne čísla, súčet jeho kariet teda je $2 + 4 + 6 = 12$.

Ľahké 26. Ak by sme z písmen A, K, P, R vytvorili všetky možné štvorpísmenové „slová" (bez opakovania písmen) a zoradili ich podľa abecedy, koľké v poradí by bolo slovo PRAK?

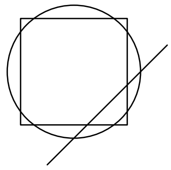
Výsledok: 17

Riešenie: Keďže sa písmená nemôžu opakovať, tak na prvom mieste v slove môžu byť 4 písmená, na druhom už len 3, na treťom 2 a na štvrtom 1. Všetkých slov je teda $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, pričom prvých 6 sa začína na A, ďalších 6 sa začína na K, ďalších 6 sa začína na P a posledných 6 sa začína na R. Potom vrámci šiestich slov, ktoré sa začínajú na P, majú prvé 2 na druhom mieste A, ďalšie 2 majú na druhom mieste K a posledné 2 majú na druhom mieste R. Potom v rámci tých dvoch slov, ktoré začínajú na P a na druhom mieste majú R, je prvé slovo PRAK (čo je hľadané slovo) a druhé PRKA. Slovo PRAK je teda v tretej šestici všetkých slov, čiže v slovách začínajúcich na P a v rámci nich je v tretej dvojici slov, čo sú slová, ktoré začínajú na PR. Medzi nimi je prvé, takže celkovo je v poradí na 17. mieste.

Ľahké 27. Matúš si rád kreslí do piesku rôzne útvary. Tentoraz si dal výzvu a rozhodol sa, že nakreslí štvorec, kružnicu a priamku tak, aby sa pretli v čo najviac bodoch. Koľko najviac priesečníkov mohlo takto vzniknúť, ak strana štvorca neleží na priamke?

Výsledok: 12

Riešenie: Kružnica a priamka (a teda aj úsečka) môže mať najviac 2 priesečníky, takže štvorec (čo sú vlastne iba 4 úsečky) a kružnica ich nemôže mať viac než 8 (každú stranu štvorca pretne kružnica maximálne dvakrát). Štvorec a priamka zjavne nemôžu mať viac ako 2 priesečníky. Potom určite nemôžeme mať viac než $8 + 2 + 2 = 12$ priesečníkov (8 priesečníkov štvorca a kružnice, 2 priesečníky kružnice a priamky a 2 priesečníky štvorca a priamky).

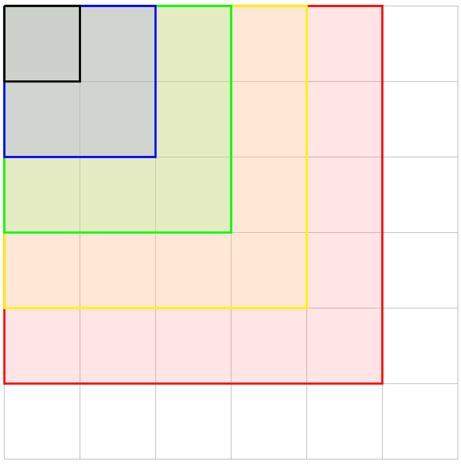


Aby sme si ale mohli byť istí, že 12 priesečníkov Matúšovi vzniknúť mohlo, musíme nájsť nejaký prípad, kedy to tak bude. Je to napríklad ten na obrázku.

Ľahké 28. Koľko štvorcov je na šachovnici 6×6?

Výsledok: 91

Riešenie: Na šachovnicu sa nám vojdú štvorce 1×1 až 6×6. Pre jeden rozmer štvorca vieme, že štvorec je zakaždým iný, ak má ľavý horný vrchol vždy v inom mrežovom bode šachovnice (mrežovým bodom budeme nazývať vrchol nejakého z políčok šachovnice). Avšak, ak sa má celý štvorec vojsť na šachovnicu, jeho ľavý horný vrchol nemôže byť v ktoromkoľvek mrežovom bode, ale iba v tom, ktorý je od spodnej a pravej strany šachovnice vzdialený aspoň o veľkosť strany štvorca (ináč by tento štvorec pretŕčal).



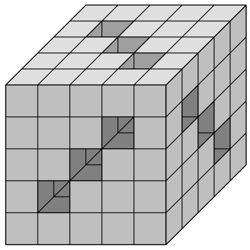
Štvorec so stranou 1 teda môže mať ľavý horný vrchol iba v červenej oblasti, kde je $6 \cdot 6 = 36$ mrežových bodov, štvorec so stranou 2 iba v žltej oblasti, kde je $5 \cdot 5 = 25$ mrežových bodov, atď. Spolu máme na šachovnici $36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 91$ rôznych štvorcov.

Ľahké 29. Deti stoja v kruhu a každé z nich má postupne pridelené číslo $1, 2, 3, 4 \ldots$. Vieme, že dieťa s číslom 12 stojí oproti dieťaťu s číslom 30. Koľko detí stojí v kruhu?

Výsledok: 36

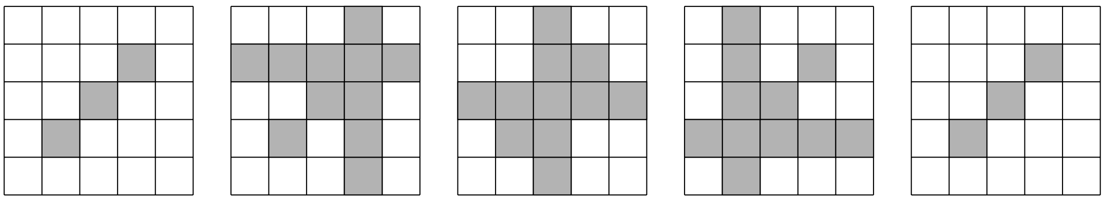
Riešenie: Keďže ide o kruh, tak vieme, že ak dieťa s číslom 12 sedí oproti dieťaťu s číslom 30, tak potom dieťa s číslom 1 sedí oproti dieťaťu s číslom 19, lebo dieťa s číslom 1 sedí od dieťaťa s číslom 12 o 11 miest naľavo, tak isto ako dieťa s číslom 19 od dieťaťa s číslom 30. Medzi deťmi s číslami 1 a 19 je 17 iných čísel, teda 17 detí. 17 detí teda musí byť aj medzi deťmi s číslami 19 a 1 (v druhom smere). To platí, lebo v oboch polkruhoch kruhu stojí rovnako veľa detí. Preto vieme, že dokopy je v kruhu $19 + 17 = 36$ detí.

Ľahké 30. Samo má 125 kociek. Niektoré z nich zlepil dokopy tak, aby vytvorili veľkú kocku s deviatimi tunelmi, pričom každý z nich prechádza z jednej strany kocky priamo na náprotivnú stranu, ako je ukázané na obrázku. Koľko zo svojich kociek nepoužil?



Výsledok: 39

Riešenie: Kocka $5 \times 5 \times 5$ sa skladá zo 125 kociek. Pozrime sa na kocku spredu a rozoberme si ju po vrstvách. V prvej vrstve (prednej stene) chýbajú 3 kocky. V druhej, tretej aj štvrtej chýba po 11 kociek. V každej z týchto vrstiev chýba jeden riadok a jeden stĺpec a prechádzajú ňou 3 tunely vedúce z prednej steny. Takto by dokopy v jednej takejto stene malo chýbať $5+5+3 = 13$ kociek, ale chýbajúci riadok, stĺpec a jeden z tunelov majú spoločnú jednu kocku, čiže táto kocka bola započítaná trikrát. Musíme ju započítať iba raz, a teda chýbajúcich kociek bude 11. V piatej vrstve (zadnej stene) chýbajú, rovnako ako v prvej, 3 kocky. To je dokopy $3 + 11 + 11 + 11 + 3 = 39$ chýbajúcich kociek. Pre úplnosť pridávame aj obrázky jednotlivých vrstiev:

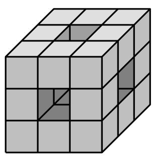


Stredné 1. Kapitán trhal mapu k pokladu. Každú minútu zobral ľubovoľný kúsok mapy a roztrhal ho na 5 menších častí. Koľko častí mohol mať po 10 minútach?

Výsledok: 41

Riešenie: Na začiatku mal jeden kúsok. Ten po prvej minúte roztrhal na 5 menších kúskov, a teda celkový počet sa navýšil o 4. Každou minútou sa nám počet kúskov zvýši o štyri, pretože vznikne 5 nových, ale ten, ktorý sme trhali, „zanikne“. Preto v priebehu 10 minút budeme trhať 10-krát, z čoho vyplýva, že počet kúskov nám vzrastie o $4 \cdot 10 = 40$, teda na konci bude mať kapitán 41 kúskov.

Stredné 2. Kubo mal 100 samolepiek tvaru štvorca so stranou 3 cm. Koľko samolepiek mu zostalo, ak nimi oblepil steny deravej kocky ako je na obrázku (stredná kocka chýba tiež a pri pohľade na ľubovoľné steny vyzerá kocka rovnako)? Vieme, že deravá kocka je postavená z 20-tich rovnakých kociek so stranou 3 cm.



Výsledok: 28

Riešenie: Deravá kocka je zložená z 20 kociek, z ktorých je 8 rohových a zvyšných 12 v strede hrán. Každá z rohových kociek sa stenou dotýka s ďalšími tromi kockami, vďaka čomu na jej oblepenie sú potrebné iba 3 samolepky. Každá z kociek, ktoré sú v strede hrán, sa stenou dotýka s dvomi ďalšími kockami, preto na jej oblepenie sú potrebné 4 samolepky. Dokopy tým pádom treba na oblepenie celej deravej kocky použiť $8 \cdot 3 + 12 \cdot 4 = 72$ samolepiek, a teda Kubovi zvýši $100 - 72 = 28$ samolepiek.

Stredné 3. Myslím na štvorciferné číslo. Súčet prvých dvoch číslic je 3, súčet posledných dvoch číslic je 7 a stredné dve číslice tvoria číslo, ktoré je deliteľné 4. Taktiež vieme, že druhá cifra nie je 0. Na aké číslo myslím? Určite všetky možnosti.

Výsledok: 1207, 1243, 2125, 2161

Riešenie: Súčet prvých dvoch číslic má byť 3. To spĺňajú dvojice $(1,2)$, $(2,1)$, $(0,3)$ a $(3,0)$. $0,3$ nevyhovuje, lebo štvorciferné čísla nemôžu začínať 0. Vieme však, že druhá cifra nesmie byť 0, teda berieme do úvahy len možnosti $1,2$ a $2,1$.
V prvom prípade je dvojica cifier na začiatku $1,2$. Stredné dve číslice majú tvoriť číslo deliteľné 4, čo znamená, že po 2 musí byť 0, 4 alebo 8, pretože $20, 24$ a 28 sú deliteľné 4. Ak by tam bola 0, tak posledná cifra musí byť 7, lebo $0 + 7 = 7$. Tým sme našli číslo 1207. Ak by tam bola 4, posledná cifra musí byť 3, lebo $4 + 3 = 7$. Odtiaľ ako druhé spĺňa podmienky číslo 1243. Ak by na treťom mieste bola cifra 8, tak číslo by nespĺňalo podmienky, lebo $8 > 7$, čo by znamenalo, že by sme nevedeli doplniť vhodnú štvrtú cifru.
Pozrime sa aj na druhý prípad, keď je dvojica cifier na začiatku $2,1$. Stredné dve číslice majú tvoriť číslo deliteľné 4, takže po 1 môže nasledovať 2 alebo 6, pretože 12 a 16 sú deliteľné 4. Ak by tam bola 2, posledná cifra musí byť 5, lebo $2 + 5 = 7$. Preto ako ďalšie spĺňa podmienky číslo 2125. Ak by tam bola 6, posledná cifra musí byť 1, lebo $6 + 1 = 7$, čo vedie k výsledku 2161.

Stredné 4. Do jedálne, ktorá bola strážená troma vedúcimi sa vkradol zlodej a ukradol niekoľko jabĺk. Na ceste späť však týchto troch vedúcich stretol jedného po druhom a každému dal za to, že ho pustí ďalej, polovicu jabĺk, čo mal pri sebe, a k tomu potom ešte dve navyše. Vďaka tomu ušiel zo skladu s jedným jablkom. Koľko jabĺk ukradol pôvodne?

Výsledok: 36

Riešenie: Na úlohu sa pozrieme odzadu. Keďže po tom, čo stretol vedúceho, mu dal polovicu a potom ešte dve jablká, pred tým, ako ho stretol, mal postupne o dve jablká viac a ešte dvakrát viac. Preto pred tým, ako stretol posledného vedúceho, mal $(1 + 2) \cdot 2 = 6$ jabĺk. Pred tým, ako stretol druhého vedúceho, mal $(6 + 2) \cdot 2 = 16$ jabĺk. Napokon pred tým, ako stretol tretieho vedúceho, mal práve $(16 + 2) \cdot 2 = 36$ jabĺk.

Stredné 5. Žanetka si pomyslela jedno číslo z nasledujúcej tabuľky. Timka hádala, potom povedala, že hľadané číslo:

1	2	3
9	5	6
7	4	8

- je v prvom riadku,
- nie je v druhom stĺpci,
- je párne,
- je väčšie ako 3.

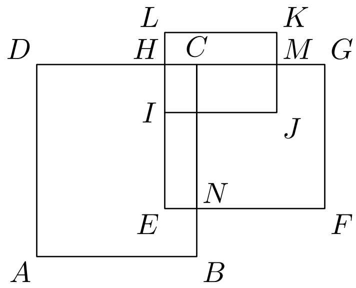
Žanetka jej potom povedala, že iba jedna zo štyroch výpovedí je pravdivá a tri zvyšné sú nepravdivé. Ktoré číslo si Žanetka myslela?

Výsledok: 5

Riešenie: Rozoberme si pre každú z možností, čo by znamenalo, ak by bola pravdivá, a teda zvyšné 3 nepravdivé (číslo zodpovedá číslu pravdivej výpovede):

- Dané číslo by muselo byť v prvom riadku, ale zároveň aj byť v druhom stĺpci na základe druhej výpovede. Tam je však len číslo 2, ktoré je párne, a teda by platil aj tretí výrok, čiže prvá výpoveď nemôže byť jediná pravdivá.
- Dané číslo by nebolo v druhom stĺpci, ani prvom riadku, čiže ostávajú čísla 6, 7, 8 a 9. Všetky z týchto čísel sú však väčšie ako 3, čiže splnená je aj posledná výpoveď, a teda druhá výpoveď nemôže byť jediná pravdivá.
- Dané číslo by muselo byť párne a zároveň byť v druhom stĺpci a nebyť v prvom riadku. Číslo spĺňajúce tieto podmienky je len 4, ale je to číslo väčšie ako 3, čiže spĺňa sa aj posledná výpoveď, a teda tretia výpoveď nemôže byť jediná pravdivá.
- Dané číslo by muselo byť väčšie ako 3 a zároveň v druhom stĺpci a nie v prvom riadku. Také čísla sú 4 a 5 a iba 5 nie je párne, čiže pre číslo 5 je pravdivá len štvrtá výpoveď a ostatné nie. 5 je teda Žanetkino myslené číslo.

Stredné 6. Na obrázku sú tri prekrývajúce sa obdĺžniky ($ABCD$, $EFGH$, $IJKL$). Vieme, že obsah obdĺžnika $ABCD$ je o 16 väčší ako obsah útvaru $EFGMKL$ a poznáme dĺžky týchto strán: $|HC| = 2, |MJ| = |MG| = |BN| = 3, |JK| = 5, |LK| = 7, |GF| = 9$. Akú dĺžku má strana AB?



Výsledok: 10

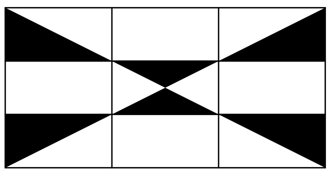
Riešenie: Na to, aby sme mohli vypočítať dĺžku strany AB, sa nám zíde poznať obsah obdĺžnika $ABCD$. Ten zistíme tak, že spočítame obsah útvaru $EFGMKL$, ktorý sa skladá z obdĺžnikov $EFGH$ a $HMKL$. Jednoducho zistíme, že obdĺžnik $EFGH$ má obsah 90, pretože $|GH| = |HM| + |MG| = |LK| + |MG| = 7 + 3 = 10$ a $|GF|$ máme zadanú. Teraz už potrebujeme zistiť iba obsah obdĺžnika $HMKL$. Ten vieme zistiť, pretože poznáme dĺžku strany LK a dĺžku strany MK vypočítame ako $|JK| - |MJ| = 2$. To znamená, že obsah obdĺžnika $HMKL$ je 14. Takto dostávame, že obsah útvaru $EFGMKL$ je $90 + 14 = 104$, a teda obsah obdĺžnika $ABCD$ je $104 + 16 = 120$. Keďže vieme, že $|BC| = |BN| + |NC| = |BN| + |GF| = 12$, tak potom dostávame, že $|AB| = 120/12 = 10$.

Stredné 7. Aké je najväčšie číslo, ktoré môžeme získať ako súčet niekoľkých dvojciferných čísel tak, že každú cifru použijeme dokopy najviac raz?

Výsledok: 360

Riešenie: Spolu máme 10 cifier, vieme teda vytvoriť najviac 5 dvojciferných čísel. Keď chceme dostať vo výsledku čo najväčší súčet a hodnota na mieste desiatok sa počíta 10-násobne, 5 najväčších cifier chceme mať na miestach desiatok a 5 najmenších na miestach jednotiek. Potom už nezáleží na tom, ako dáme cifry do dvojíc. V súčte bude mať 5 najmenších cifier na mieste jednotiek spolu hodnotu $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ a 5 najväčších na mieste desiatok $10 \cdot (5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 10 \cdot 35 = 350$. Súčet čísel potom bude $10 + 350 = 360$, čo je zároveň aj odpoveďou.

Stredné 8. Na obrázku máme čokoládu rozdelenú na 9 rovnako ťažkých dielikov, tvorenú tmavou a bielou čokoládou (dielik tmavej a bielej čokolády váži rovnako veľa). Celá čokoláda má hmotnosť 144 gramov. Koľko váži biela časť? Koľko váži tmavá časť?



Výsledok: Svetlá časť 104 gramov a tmavá 40 gramov

Riešenie: Vidíme, že celé biele dieliky máme 4. Pozrime sa na rohové dieliky. Vieme, že uhlopriečka rozdelí obdĺžnik na dva rovnaké trojuholníky a rohové dieliky sú rozdelené uhlopriečkou, teda všetky sú z polovice biele a z polovice tmavé.
Zostáva nám stredný dielik. Tmavé trojuholníky v ňom si rozlomme, každý na 2 rovnaké menšie pravouhlé trojuholníčky. Keď tie 2 trojuholníčky spojíme najdlhšou stranou k sebe, tak dostaneme obdĺžnik, ktorý tvorí štvrtinu jedného nenalámaného dielika. Keďže sme mali tie tmavé trojuholníky dva (a teda 4 trojuholníčky), dokopy tvoria polovicu stredného dielika.
Keď si to zhrnieme, máme 4 celé a 5 z polovice bielych dielikov a 5 z polovice tmavých dielikov. Môžeme spočítať, že hmotnosť jedného dielika je $144 \div 9 = 16$ gramov, čo znamená, že jeho polovica

bude vážiť iba 8 gramov. Teda bielej čokolády je $(4 \cdot 16 + 5 \cdot 8) = 64 + 40 = 104$ gramov a tmavej $5 \cdot 8 = 40$ gramov.

Stredné 9. Koľko je trojciferných čísel takých, že každé dve susedné cifry čísla sa líšia práve o jedna?

Výsledok: 32

Riešenie: Prvá cifra ľubovoľného trojciferného čísla môže byť číslo od 1 do 9, ostatné dve cifry môžu byť od 0 do 9. Keďže každé dve susedné cifry sa majú líšiť práve o 1, keď si určíme prvú cifru, druhá cifra bude musieť byť o 1 väčšia alebo menšia ako prvá a tretia cifra o 1 väčšia alebo menšia ako druhá. To znamená, že na určenie druhej cifry máme dve možnosti a pre každú z týchto dvoch možností máme ďalšie dve možnosti na určenie tretej cifry. Čiže pre každú prvú cifru máme 4 možnosti, ako môžu vyzerať zvyšné dve cifry. Toto naozaj platí, ak si ako prvú cifru zoberieme číslo od 2 do 7, lebo posledná cifra sa od prvej musí líšiť maximálne o 2. A teda ak je prvá cifra od 2 do 7 (vrátane), tak posledná cifra bude medzi 0 a 9, čo je v poriadku. Cifier od 2 do 7 je 6 a pre každú z nich máme 4 možnosti, ako môžu vyzerať zvyšné 2 cifry. To je dokopy $6 \cdot 4 = 24$ možností.
Pri číslach 1, 8, 9 však narazíme na problém, že v niektorej z možností by sme dostali cifru menšiu ako 0 alebo väčšiu ako 9, čo, pravdaže, nie je správna možnosť. Ak je prvá cifra 1, tak druhá cifra je 0 alebo 2. Ale ak je druhá cifra 0, tak tretia cifra musí byť 1. Ak je druhá cifra 2, tak tretia cifra je 1 alebo 3, čiže dokopy máme 3 možnosti. Podobne, ak je prvá cifra 8, tak druhá cifra musí byť 7 alebo 9. Ak je druhá cifra 9, tak tretia musí byť 8, čiže opäť máme dokopy len 3 možnosti. Ak je prvá cifra 9, tak druhá cifra musí byť 8 a na výber tretej cifry máme 2 možnosti. Teraz nám stačí spočítať možnosti pre všetky rôzne prvé cifry: $3 + 6 \cdot 4 + 3 + 2 = 32$.

Stredné 10. Lujza a Viki hádžu kockami, každá dvoma naraz. Súčet čísel na kockách dáva počet bodov. Po troch kolách vyhráva Viki o 29 bodov. Koľko dokopy padlo jednotiek, ak vieme že to bolo nepárne číslo?

Výsledok: 5

Riešenie: Najmenší možný počet bodov po troch kolách získame, ak hodíme 6 jednotiek, najväčší možný počet bodov získame, ak hodíme 6 šestiek. Preto Lujza mala aspoň 6 bodov a Viki maximálne 36 bodov. Takto by ich rozdiel bodov bol $36 - 6 = 30$. Aby sme dostali rozdiel 29 bodov, tak buď Lujze pridáme bod, alebo Viki odoberieme bod. Ak by sme Viki odobrali bod, znamenalo by to, že Viki hodila 1-krát päťku a 5-krát šestku a Lujza 6-krát jednotku. Počet hodených jednotiek musí byť nepárne číslo, čo v tomto prípade neplatí. Preto musíme Lujze pridať bod, čo znamená, že Lujza hodila 1-krát dvojku a 5-krát jednotku a Viki samé šestky. Jednotka padla 5-krát.

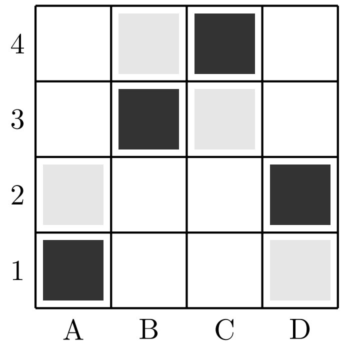
Stredné 11. Dano si myslí číslo. Prezradil nám, že súčin jeho cifier je 9 a súčet cifier je 7. Koľko pokusov potrebujeme, aby sme číslo určite uhádli?

Výsledok: 3

Riešenie: Nakoľko súčet cifier je 7, každá cifra musí byť menšia ako 8. Číslo 9 vieme násobením cifier väčších ako 1 a menších ako 8 dostať len jedným spôsobom – ako $3 \cdot 3$. Danovo číslo preto bude obsahovať dvakrát cifru 3 a niekoľkokrát cifru 1, keďže 1 na súčine nič nemení. My ale vieme, že súčet cifier je 7, preto musí obsahovať práve jednu cifru 1, keďže $3 + 3 + 1 = 7$. Danovo číslo je preto trojciferné číslo zložené z cifier $1, 3, 3$ a také čísla existujú iba tri: $133, 313, 331$. Na uhádnutie nám preto stačia 3 pokusy.

Stredné 12. Položte štyroch bielych a štyroch čiernych pešiakov na šachovnicu 4×4 tak, aby v každom riadku, stĺpci a na každej hlavnej uhlopriečke bol práve jeden pešiak z každej farby.

Výsledok:



Riešenie: Pri riešení tejto úlohy si môžeme zobrať inšpiráciu zo šachových figúrok. Pešiakov tej istej farby budeme ukladať tak, ako skáče jazdec (dve vpred, jedno do strany), aby neležali viacerí v tom istom stĺpci, riadku či uhlopriečke (jazdec je jediná šachová figúrka, pre ktorú toto platí). Začneme čiernym pešiakom na políčku A1 a umiestnime druhého čierneho pešiaka na B3. Vidíme, že odtiaľ môžeme ďalšieho umiestniť na 3 miesta – D4, C1 a D2. D4 je ale na uhlopriečke a C1 na riadku, kde už leží pešiak danej farby, čiže dáme ho na tretie možné políčko (D2). Ostáva nám už len položiť posledného čierneho pešiaka, ktorého ľahko rovnakým postupom umiestnime na C4. Bielych pešiakov umiestňujeme rovnakým spôsobom, ale začneme v inom rohu a dávame pozor, či na danom políčku už nie je čierny pešiak. Samozrejme, úloha má viac riešení ako to, ktoré sme našli, no to nie je v rozpore so zadaním.

Stredné 13. Na tabuli bolo napísané dvojciferné číslo. Keď sa Kristín pýtala, aké číslo to bolo, tak jej vedúci povedali:

- Matúš: To číslo bolo deliteľné 7.
- Peťo: To číslo dávalo zvyšok 5 po delení šiestimi.
- Dano: To číslo bolo párne.
- Mihál: To číslo dávalo zvyšok 3 po delení štyrmi.

Filip potom Kristín prezradil, že jeden z nich nehovoril pravdu, ostatní však áno. Aké číslo je na tabuli?

Výsledok: 35

Riešenie: Informácia, ktorú nám povedali Peťo a Mihál, nám vraví, že číslo je nepárne. To je však v rozpore s tvrdením Dana o tom, že číslo je párne. Keďže však klame len jeden, nemôžu to byť Peťo a Mihál, ale je to Dano. Všetci ostatní okrem Dana tým pádom hovoria pravdu. Hľadáme teda nepárne číslo. Vieme, že bolo deliteľné 7. Teda do úvahy prichádzajú čísla $7, 21, 35, 49, 63, 77, 91$. Z nich dávajú zvyšok 5 po delení 6 len 35 a 77. 77 dáva po delení 4 zvyšok 1, zakiaľ 35 má po delení 4 zvyšok 3, čo súhlasí s Mihálovým tvrdením.

Stredné 14. Heslo sa skladá z troch rôznych písmen. Dobre sa vyslovuje, pretože v ňom nie sú dve spoluhlásky vedľa seba. Všetky písmená hesla nájdeme v slove jablko. Koľko najmenej pokusov potrebujeme, aby sme si boli stopercentne istí, že sme vyskúšali aj správne heslo?

Výsledok: 48

Riešenie: Keďže dve spoluhlásky nemôžu byť vedľa seba, v trojmiestnom hesle sa môžu nachádzať maximálne dve – ak by boli tri, určite by boli susedné. Nakoľko budú najviac dve, rozdelíme si úlohu na tri prípady podľa počtu spoluhlások:

- Spoluhlásky budú dve. Vtedy musia byť určite na prvom a treťom mieste, pretože inak by boli vedľa seba. V strede potom určite bude samohláska. Samohlásky sú v slove jablko len dve: a, o. Na prvom mieste tým pádom môže byť jedna zo spoluhlások. Spoluhlásky sú v slove jablko iba štyri: j, b, l, k. Na prvom mieste môže byť ktorákoľvek z nich, avšak na poslednom mieste už len jedna z troch, ktoré sme nepoužili na prvom mieste (lebo písmená sa v hesle nesmú opakovať).

Na prvom mieste máme 4 možnosti, ku každej z týchto možností máme na druhé miesto v hesle dve možnosti (a alebo o) – teda $4 \cdot 2 = 8$ – a ku každej kombinácii prvého a druhého miesta máme ešte 3 možnosti posledného miesta. Aby sme získali každú možnú kombináciu, tieto možnosti vynásobíme. Preto, ak sú spoluhlásky dve, máme $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ možností.

- Spoluhláska bude jedna. Keďže máme dve samohlásky, aj takéto heslá môžu existovať. Spoluhláska sa môže v tomto prípade nachádzať na ktoromkoľvek mieste. Na zvyšných dvoch miestach budú samohlásky a existujú len 2 možnosti, v akom poradí budú nasledovať za sebou, buď (a, o), alebo (o, a). Spoluhláska môže byť na troch miestach, čiže máme tri možnosti, pričom ku každej máme dve možnosti usporiadania samohlások. Takéto usporiadania vieme nájsť pre každú zo 4 spoluhlások, preto tento počet vynásobíme počtom spoluhlások – číslom 4. Možností, kde je spoluhláska práve jedna, je teda $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.
- Spoluhláska nebude ani jedna. Samohlásky v slove jablko sú však len dve, a preto takéto heslá nebudú existovať.

Postupne sme rozobrali všetky možnosti podľa počtu spoluhlások. Po sčítaní možností v jednotlivých prípadoch prichádzame na to, že potrebujeme $24 + 24 = 48$ pokusov na uhádnutie hesla, aby sme si boli stopercentne istí, že sme vyskúšali aj to správne.

Stredné 15. Vo vreci je 18 malých oranžových, 19 malých modrých, 13 veľkých modrých a 15 veľkých oranžových tričiek. Koľko najmenej tričiek musím vytiahnuť z vreca (bez pozerania sa na ne), aby som si bol stopercentne istý, že mám dve tričká, ktoré sa líšia buď iba farbou, alebo iba veľkosťou?

Výsledok: 35

Riešenie: Máme 4 rôzne druhy tričiek. Pre každý druh trička existuje práve jeden iný druh, ktorý sa od neho odlišuje v oboch vlastnostiach. Preto môžeme vytiahnuť tričká z maximálne dvoch rôznych druhov a nemať tam také dve, ktoré sa líšia v práve jednej vlastnosti. Keďže si chceme byť stopercentne istí tým, čo vytiahneme, tak sa musíme pozrieť na najhorší možný prípad. To znamená, že potrebujeme zistiť, koľko najviac tričiek vieme vytiahnuť tak, aby sa žiadne dve nelíšili v práve jednej vlastnosti. Ak vytiahneme všetky tričká z dvoch rôznych druhov, ktoré sa líšia aj vo farbe, aj vo veľkosti, pre čo máme dve možnosti – malé modré a veľké oranžové a veľké modré a malé oranžové – tak ich vytiahneme buď $19 + 15 = 34$, alebo $13 + 18 = 31$, čiže maximálne 34 tričiek. Potom už musíme vytiahnuť tričko tretieho druhu, a teda už tam budú dve, ktoré sa líšia v práve jednej vlastnosti. Preto ak vytiahneme 35 tričiek, tak už tam určite budú tričká z dvoch druhov, ktoré sa odlišujú práve v jednej vlastnosti.

Stredné 16. Koľkými spôsobmi môžeme zapísať 6 ako súčet prirodzených čísel? Na poradí sčítancov záleží.

Výsledok: 32

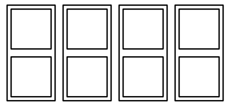
Riešenie: Urobíme si tabuľku, kde zapíšeme, koľkými spôsobmi vieme zapísať číslo 6 podľa počtu sčítancov:

Počet sčítancov	1	2	3	4	5	6
Spôsoby zápisu	6	5+1 1+5 4+2 2+4 3+3	4+1+1 1+4+1 1+1+4 3+2+1 3+1+2 2+3+1 2+1+3 1+3+2 1+2+3 2+2+2	3+1+1+1 1+3+1+1 1+1+3+1 1+1+1+3 2+2+1+1 2+1+2+1 2+1+1+2 1+2+2+1 1+2+1+2 1+1+2+2	2+1+1+1+1 1+2+1+1+1 1+1+2+1+1 1+1+1+2+1 1+1+1+1+2	1+1+1+1+1+1
Počet spôsobov	1	5	10	10	5	1

Dokopy je teda $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$ spôsobov, ako zapísať 6 ako súčet prirodzených čísel.

Stredné 17. Na obrázku sú 4 prázdne kocky domina. Vieme, že každá kocka domina má na každej polovici najviac 6 bodiek. Vašou úlohou je umiestniť na tieto kocky 18 bodiek podľa nasledovných pravidiel:

1. Celkový počet bodiek na horných poloviciach musí byť rovnaký ako celkový počet bodiek na dolných poloviciach.
2. Na prvej kocke musí byť dvakrát viac bodiek ako na poslednej.
3. Na jednej kocke je iba jedna bodka a inej ďalšej je v hornej polovici rovnaký počet bodiek ako v dolnej.
4. Tri kocky majú rovnaký počet bodiek na horných poloviciach a dve majú rovnaký počet bodiek na dolných poloviciach.



Výsledok:

6	1	1	1
4	0	1	4

6	1	1	1
4	1	0	4

1	6	1	1
1	4	4	0

1	1	6	1
1	4	4	0

Riešenie: Pre označenie počtu bodov na jednej domino kocke budeme používať zápis x|y, pričom x je počet bodiek na hornej polovici a y je počet bodiek na dolnej polovici kocky.

Z prvej podmienky vieme, že súčet bodiek na horných poloviciach kociek bude 9 a zároveň aj súčet bodiek na dolných poloviciach bude 9. Potom počty bodiek na horných poloviciach môžu byť $3, 3, 3, 0$ alebo $2, 2, 2, 3$ alebo $1, 1, 1, 6$ (nie nutne v týchto poradiach). Možnosť $2, 2, 2, 3$ môžeme hneď vylúčiť, pretože to by neplatilo, že na jednej z kociek je iba 1 bodka.

Najprv rozoberme možnosť $3, 3, 3, 0$. Jediná kocka, ktorá môže splniť prvú časť tretej podmienky, je kocka, ktorá má na hornej polovici počet bodiek 0. Na jej spodnej polovici bude 1 bodka. Potom jedna z kociek, ktoré majú na horných poloviciach 3 bodky, bude kocka 3|3, aby platila aj druhá polovica tretej podmienky. Teraz si tento prípad rozdelíme na 3 situácie, ktoré môžu nastať:

1. Ak je kocka 0|1 prvá, tak posledná kocka nemôže splniť druhú podmienku. Táto situácia nemôže nastať.
2. Ak je kocka 0|1 posledná, tak prvá kocka musí mať 2 bodky. My však vieme, že táto kocka je 3|y, čiže určite bude mať viac ako 2 bodky. Kocka 0|1 nemôže byť ani posledná.
3. Ak je kocka 0|1 druhá alebo tretia, tak na kraji budú kocky po troch bodkách v horných poloviciach. Môžeme skúsiť dávať bodky do dolnej polovice poslednej kocky a uvidíme, či dostaneme riešenie. Zároveň budeme pri tom dodržiavať prvú a druhú podmienku.
   (a) Posledná kocka je 3|0. V takom prípade by boli kocky postupne 3|3, 3|5, 0|1, 3|0. To nevyhovuje štvrtej podmienke.
   (b) Posledná kocka je 3|1. V takom prípade by boli kocky 3|5, 3|2, 0|1, 3|1, čo nevyhovuje tretej podmienke.
   (c) Posledná kocka by v dolnej polovici mala viac ako jednu bodku. V takom prípade už nedokážeme splniť druhú podmienku, pretože prvá kocka má v hornej polovici 3 bodky.

Teraz sa pozrime na možnosť $1, 1, 1, 6$. V tomto prípade kocka, ktorá má mať rovnaký počet bodov na hornej a spodnej polovici, môže byť kocka 6|6 alebo 1|1. Rozoberieme najprv prípad, keď to bude kocka 6|6:

1. Ak je kocka 6|6 prvá alebo posledná, tak na kockách budeme mať viac ako 18 bodiek (ak chceme dodržať druhú podmienku).
2. Ak je kocka 6|6 druhá alebo tretia, tak jedna z kociek 1|y musí byť 1|0. Rozdeľme si to znovu na 3 prípady:
   (a) Ak je kocka 1|0 prvá, tak porušíme druhú podmienku.

(b) Ak je kocka 1|0 posledná, tak prvá kocka musí byť 1|1. Posledná kocka by musela byť 1|2, aby sme splnili prvú podmienku. Potom ale nie je splnená štvrtá podmienka, takže kocka 1|0 nemôže byť ani posledná.
(c) Ak je kocka 1|0 druhá alebo tretia, tak v strede máme kocky 1|0 a 6|6. Pozrime sa na prvú a poslednú kocku. Ak by posledná kocka mala na spodnej polovici 0 bodiek, 1 alebo 2, tak prvá by mala 1 bodku, 3 alebo 5 a to by nevyhovovalo prvej podmienke. Ak by posledná kocka mala na spodnej polovici viac ako 2 bodky, tak by prvá kocka na spodnej polovici už mala viac ako 6 bodiek.

Pre kocku 6|6 sme nenašli žiadne správne riešenie. Pozrime sa na možnosť s kockou 1|1, ktorú si opäť rozdelíme na 3 prípady podľa kocky 6|y:

1. Ak je kocka 6|y prvá, tak posledná kocka musí mať na spodnej polovici aspoň 2 bodky (prvá kocka bude 6|0). Najviac ich však môže mať 5 (pri šiestich by sme porušili druhú podmienku). To znamená, že v strede sú kocky 1|0 a 1|1. Rýchlym prejdením všetkých štyroch možností zistíme, že pre prípad, že bude posledná kocka 1|4, dostávame riešenia 6|4, 1|0, 1|1, 1|4 a 6|4, 1|1, 1|0, 1|4.
2. Ak je kocka 6|y posledná, tak nemôžeme splniť druhú podmienku, pretože prvá kocka musí mať dokopy maximálne 7 bodiek. Kocka 6|y nemôže byť posledná.
3. Ak je kocka 6|y druhá alebo tretia, pozrieme sa na umiestnenie kocky 1|1.
   (a) Ak je kocka 1|1 prvá, tak posledná kocka je 1|0. Zvyšné 2 kocky musia mať dokopy na ich spodných poloviciach 8 bodiek. Ak chceme splniť štvrtú podmienku, obe kocky musia mať na dolných poloviciach po štyroch bodkách, pretože ináč by niektorá kocka mala na spodnej polovici viac ako 6 bodiek. Našli sme ďalšie dve riešenia: 1|1, 6|4, 1|4, 1|0 a 1|1, 1|4, 6|4, 1|0.
   (b) Ak je kocka 1|1 posledná, tak prvá kocka je 1|3. Aby sme vyhoveli prvej a tretej podmienke, tak zvyšné kocky sú 1|0 a 6|5. Takto však nedodržíme štvrtú podmienku.
   (c) Ak je kocka 1|1 druhá alebo tretia, tak posledná kocka musí byť 1|0 (prvá byť nemôže). V takom prípade bude prvá kocka 1|1. Potom zvyšná kocka bude mať na spodnej polovici 7 bodiek, čo nemôže.

Našli sme 4 riešenia. Môžete ich nájsť na obrázkoch vyššie.

Stredné 18. Matúš, Peťo, Roman, Tomáš a Janči idú do kina. Matúš a Tomáš sú veľkí kamaráti, a preto musia sedieť vedľa seba. Janči chce sedieť na kraji. Koľko existuje rôznych možností rozsadenia, keď všetci sedia vedľa seba v jednom rade, v ktorom je presne 5 sedadiel?

Výsledok: 24

Riešenie: Povedzme, že Janči sedí úplne vľavo. Matúš a Tomáš chcú byť vedľa seba, preto ich môžeme dočasne brať ako jedného človeka, ktorý zaberie dve miesta. Ostáva nám teda usadiť 3 ľudí. To sa dá $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ spôsobmi (vedľa Jančiho môžu ísť traja ľudia, do stredu potom dvaja a na druhý kraj ostane už iba jeden). Nezabudnime, že Matúša a Tomáša sme doteraz brali ako jedného človeka, ktorý sedí na dvoch sedadlách. Je však rozdiel, či sedí Matúš naľavo od Tomáša, alebo naopak. Pre každú zo 6 možností existujú teda 2 možné rozsadenia Matúša a Tomáša, čo je dokopy $6 \cdot 2 = 12$ možností. Rovnako veľa možností je, keď Janči sedí úplne vpravo (pre každú možnosť môžeme zvyšných štyroch posunúť o jedno sedadlo doľava a Jančiho posadiť na pravý kraj). Dokopy je teda $12 + 12 = 24$ možností rozsadenia podľa podmienok zo zadania.

Stredné 19. Koľkými spôsobmi môžeme rozdeliť štyri rôznofarebné guľôčky do vrecúšok? Vrecúšok máme, koľko len chceme, vrecúška sú nerozlíšiteľné a nezoradené.

Výsledok: 15

Riešenie: Poďme systematicky rozobrať možnosti, ako vieme guľôčky rozdeliť. Spôsobov rozdelenia máme 5 a sú to nasledujúce možnosti:

- V každom vrecúšku bude 1 guľôčka. Keďže vrecúška sú nerozpoznateľné, tak je iba **1 možnosť** ako tieto guľôčky rozdeliť.
- V jednom vrecúšku budú 2 guľôčky a v ďalších dvoch po 1. Takýchto rozložení je toľko, koľko je spôsobov na vybratie jednej dvojice zo 4 guľôčok. Vieme, že počet možností, ako vybrať prvú

guľôčku, je 4. Ďalej vyberám zo zvyšných troch druhú, na čo mám tri možnosti. Dostávame 12 možností, avšak uvedomme si, že sme započítali každú dvojicu dvakrát (najprv dvojicu 1 a 2 a potom 2 a 1 atď.). Takto dostávame **6 možností**.

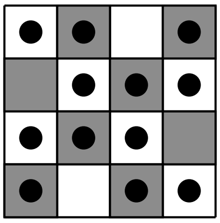
- V dvoch vrecúškach budú dvojice guľôčok. Uvedomme si, že stačí spočítať, koľko máme možností, ako vytvoriť dvojicu z guľôčky číslo 1 a nejakej inej. Zvyšné guľôčky potom dáme do druhého vrecúška. Ku guľôčke číslo 1 môžeme vybrať jednu z troch zvyšných. Dostávame teda **3 možnosti**.
- V jednom vrecúšku sú tri guľôčky a v druhom je zvyšná. Takéto rozloženia sú 4, pretože máme **4 možnosti**, ako vybrať guľôčku, ktorá bude vo vrecúšku sama.
- Všetky guľôčky sú v rovnakom vrecúšku. To je **1 možnosť**.

Spolu máme 15 možností.

Stredné 20. Klára chce na niektoré políčka šachovnice 4×4 položiť figúrky. Chce to urobiť tak, aby každé políčko s figúrkou malo aspoň jednu stranu spoločnú s políčkom bez figúrky, a zároveň tak, aby každé políčko bez figúrky malo aspoň jednu stranu spoločnú s políčkom s figúrkou. Koľko najviac figúrok môže na šachovnicu položiť?

Výsledok: 12

Riešenie: Ak by Klára položila viac než 12 figúrok, zostali by maximálne tri políčka bez figúrok. Z toho vyplýva, že v niektorom zo štyroch štvorcov 2×2, na ktoré sa dá tabuľka rozdeliť, by nebolo ani jedno políčko bez figúrky. Avšak ak by všetky štyri boli obsadené figúrkou, tak rohové políčko by nesusedilo s políčkom bez figúrky, takže také rozmiestnenie by nemohlo spĺňať podmienky zadania. 12 figúrok je však možné na šachovnicu postaviť, vyhovejúc zadaniu – ako vidno na obrázku (figúrky sú vyznačené čiernymi krúžkami). Preto je 12 maximálny počet, pri ktorom sa to dá.



Stredné 21. Čarovné číslo je také číslo, ktoré by malo rovnaký počet cifier aj, keby sme ho vynásobili trojkou, aj, keby sme ho vydelili trojkou. Práve jedna číslica čarovného čísla je trojka, no všetky číslice sú deliteľné trojkou. Koľko existuje takých čarovných čísel, ktoré majú všetky cifry rôzne?

Výsledok: 6

Riešenie: Vieme, že číslo sa môže skladať iba z cifier $0, 3, 6, 9$, pretože iba tieto cifry sú deliteľné tromi. Nula na začiatku čísla určite nebude. Zo zvyšných čísel môže byť iba trojka na začiatku, pretože ak by tam bola číslica 6 alebo 9, tak by sa číslu po vynásobení tromi zvýšil počet cifier. Ďalej si uvedomme, že čarovné číslo musí byť najviac štvorciferné, aby sme žiadnu cifru nezopakovali. Poďme teda postupne.

- Jednociferné čarovné číslo je iba jedno, a to číslo 3, keďže vieme, že práve jedna trojka v čísle musí byť.
- Dvojciferné číslo by mohlo byť 30, 36 alebo 39. Iba číslo 30 bude po vynásobení troma mať rovnaký počet cifier. Preto dvojciferné čarovné číslo je iba jedno.
- Pri trojciferných číslach sa zamyslime, aké číslo môže byť na mieste desiatok, aby po vynásobení tromi nebolo číslo štvorciferné. Ak je na mieste stoviek číslica 3, znamená to, že po vynásobení tromi bude číslo určite väčšie ako 900. Na mieste desiatok teda musí byť taká cifra, aby po vynásobení tromi nevyrobila ďalšiu stovku. Taká cifra je iba 0. To znamená, že trojciferné čarovné čísla vieme vytvoriť dve, a to 306 a 309.
- Pri štvorciferných číslach si môžeme opäť uvedomiť, že na mieste stoviek môže byť iba číslica 0, inak by po vynásobení tromi mal výsledok viac cifier. Štvorciferné čarovné čísla sú teda 3069 a 3096.

Dokopy dostávame 6 čarovných čísel, ktoré už spĺňajú všetky podmienky.

Stredné 22. V kráľovskom žrebčíne sú kone rozdelené do troch ohrád. V prvej je sedem čried, v druhej šesť čried a v tretej sú len štyri čriedy koní, pričom každú čriedu tvorí rovnaký počet koní. V niektorých dvoch ohradách je spolu 187 koní. Koľko koní je v každej z ohrád?

Výsledok: 119 v prvej, 102 v druhej a 68 v tretej

Riešenie: Dokopy vo všetkých 3 žrebčínoch je 17 čried. Pre každú dvojicu žrebčínov vieme spočítať, koľko je v nich dokopy čried.

Žrebčíny	Počet čried
1. a 2.	13
2. a 3.	10
1. a 3.	11

Teraz skúsme pre každý variant vypočítať, koľko koní by bolo v jednej čriede. Napríklad pre prvý variant vieme, že v 13-tich čriedach má byť 187 koní. Ak sa pokúsime vydeliť 187 trinástimi, dostaneme zvyšok väčší ako 0. Preto toto riešenie nevyhovuje (keďže v čriede nemôže byť iba časť koňa). Rovnako v druhom prípade 187 nie je deliteľné 10, a preto táto možnosť tiež nevyhovuje. Nakoniec tretia možnosť s prvým a tretím žrebčínom má 11 čried. Dostávame teda, že jedna črieda má $187 : 11 = 17$ koní.
Ostáva nám dopočítať, koľko koní je v ktorej ohrade, čo je jednoduché, keď poznáme počet koní v čriede.

Žrebčín	Počet čried	Počet koní
1.	7	$7 \cdot 17 = 119$
2.	6	$6 \cdot 17 = 102$
3.	4	$4 \cdot 17 = 68$

Stredné 23. Koľko existuje takých štvorciferných prirodzených čísel, pre ktoré platí, že ktorékoľvek dve cifry z nich vyškrtneme, dostaneme dvojciferné prirodzené číslo deliteľné piatimi?

Výsledok: 18

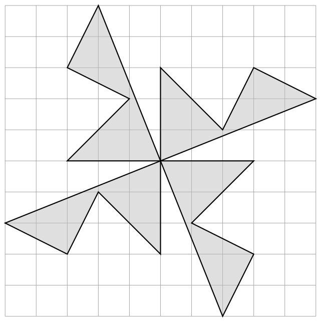
Riešenie: O číslach deliteľných piatimi vieme, že končia buď na 0 alebo na 5. Ak vyškrtneme ľubovoľné dve číslice, tak na konci dvojciferného čísla bude číslica, ktorá bola pôvodne na druhom, treťom alebo štvrtom mieste. Číslica z prvého miesta bude buď škrtnutá, alebo ostane na prvom mieste. Vieme teda, že posledné tri číslice môžu byť iba 0 alebo 5.
Ďalej si podobne uvedomme, že po vyškrtnutí ľubovoľných dvoch cifier, sa môže na prvé miesto dvojciferného čísla dostať číslo, ktoré bolo pred tým na prvej, druhej alebo tretej pozícii. Po vyškrtaní ale na prvej pozícii nemôže ostať 0, pretože by sme nedostali dvojciferné číslo.
Zhrňme si, aké máme obmedzenia. Na prvom mieste môže byť čokoľvek okrem 0. Na druhom a treťom mieste musí byť číslica 5 a na poslednom mieste si môžeme vybrať medzi 5 a 0. Na prvé miesto teda máme 9 možností ako vybrať číslo a pre každý výber vieme vyrobiť dve štvorciferné čísla (jedno s 0 a jedno s 5 na konci). Takýchto čísel teda existuje $9 \cdot 2 = 18$.

Stredné 24. Koľko najviac cifier môžeme vymazať z 1000-ciferného čísla $20192019\ldots2019$ tak, že súčet nevymazaných cifier bude 2019?

Výsledok: 774

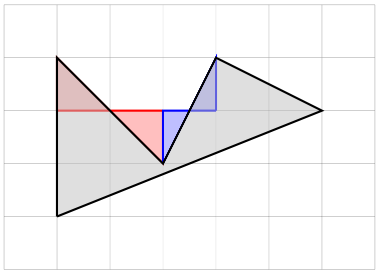
Riešenie: Keďže máme číslo 2019, ktoré má 4 cifry opakujúce sa v našom čísle, tak v 1000 cifrách je každá z cifier $2, 0, 1, 9$ práve 250-krát. Keďže chceme škrtať čo najviac cifier, chceme v čísle ponechať tie najväčšie cifry (teda cifry 9), pretože veľkých cifier stačí menej na dosiahnutie súčtu 2019. Naneštastie deviatky sa nedajú sčítať na číslo 2019, pretože 2019 nie je deliteľné 9. Pomocou 224 deviatok ($2019 \div 9 = 224$ zvyšok 3) vieme dosiahnuť súčet najviac 2016. Musíme si teda pomôcť ešte jednou cifrou 1 a jednou cifrou 2. Dokopy teda potrebujeme, aby nám ostalo 226 cifier a všetky zvyšné môžeme vyškrtnúť. Môžeme ich teda vyškrtnúť $1000 - 226 = 774$

Stredné 25. Aký je obsah útvaru na obrázku ak strana štvorčeka má dĺžku 1?

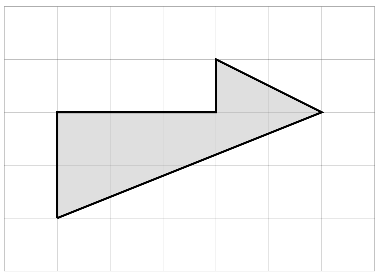


Výsledok: 24

Riešenie: Vidíme, že všetky 4 „ramená“ útvaru sú rovnaké a stačí sa nám teda pozrieť na 1 z nich.



Keď sa pozrieme na červené trojuholníky, tak vidíme, že oba majú rovnako dlhé tie strany, ktoré zvierajú pravý uhol, pretože sú to rozmery štvorca na mriežke – ich dĺžka je 1. Ich tretia strana musí byť tiež rovnako dlhá, pretože je to iba uhlopriečka štvorca 1×1. Z toho vieme, že oba trojuholníky sú rovnaké. Keď sa takto pozrieme aj na modré trojuholníky, zistíme, že sú rovnaké z tých istých dôvodov, a že dĺžky strán, ktoré zvierajú prvý uhol sú 1 a 0,5. Potom si útvar na obrázku vieme preskladať na nový útvar.

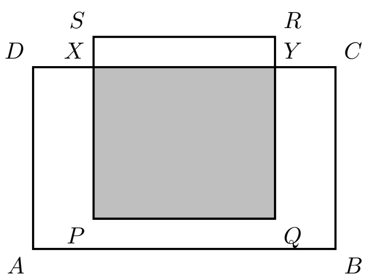


Tento útvar pozostáva už len z 2 spojených trojuholníkov. Oba tieto trojuholníky vieme doplniť do obdĺžnika, v ktorom budú polovicou. Obsah obdĺžnika vyrátame ako súčin dĺžok jeho susedných strán (čo je 2 a 5 pre väčší trojuholník a 1 a 2 pre menší trojuholník), takže obsah trojuholníkov bude

$$(2 \cdot 5) \div 2 + (1 \cdot 2) \div 2 = 5 + 1 = 6$$

Keďže útvar zo zadania pozostáva zo 4 „ramien“, ktorých obsah sme zistili, celkový obsah bude $4 \cdot 6 = 24$.

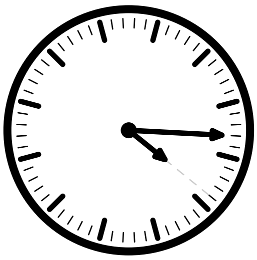
Ťažké 1. Na obrázku je obdĺžnik $ABCD$ a štvorec $PQRS$. Platí, že $|AB| = 10$, $|BC| = 6$ a $|PQ| = 6$. Sivá plocha má oproti obdĺžniku $ABCD$ polovičný obsah. Aká je dĺžka úsečky SX?



Výsledok: 1

Riešenie: Pre obsah obdĺžnika $ABCD$ teda platí: $S = |AB| \cdot |BC|$, teda $S = 10 \cdot 6$, čo je 60. Obsah sivej plochy je polovičný oproti obdĺžniku $ABCD$, teda $60 : 2 = 30$. Ide o obdĺžnik, takže opäť platí, že súčin strán je jeho obsah. Poznáme len jednu jeho stranu, ale poznáme aj obsah, preto vieme vypočítať druhú stranu, ktorú dostaneme vydelením obsahu stranou, ktorú poznáme: $S : |PQ| = |QY|$, teda $30 : 6 = |QY|$, takže $|QY| = 5$. Keďže je $PQYX$ obdĺžnik, vieme, že $|PX| = |QY| = 5$. $PQRS$ je štvorec, preto vieme, že všetky jeho strany sú rovnako dlhé, teda $|PQ| = |PS|$. Zo zadania vieme, že $|PQ| = 6$, teda aj $|PS| = 6$. Úsečka PS je rozdelená na úsečky PX a SX, ktoré musia dávať spolu súčet 6. Zistili sme, že $|PX| = 5$, a na to, aby bol ich súčet 6, musí byť $|SX| = 1$.

Ťažké 2. Šaliho hodinky ukazujú čas presne, tak ako bežné 12-hodinové hodiny. Nemajú však čísla a boli nejakým spôsobom otočené. Koľko je hodín, ak sa ručičky nachádzajú v tejto polohe? (Hodinová ručička ukazuje čas presne na minúty)



Výsledok: 10:48

Riešenie: Vieme, že dlhšie čiary na ciferníku reprezentujú hodiny, ak by k nim boli priradené čísla. Hodinovej ručičke trvá hodinu prejsť medzi dvoma číslami. Prejsť jeden z piatich dielikov medzi číslami jej teda trvá $60/5 = 12$ minút. Vidíme, že hodinová ručička na Šaliho hodinkách už prešla presne štyri dieliky od poslednej celej hodiny a jeden dielik ešte ostáva, čiže prešlo $4 \cdot 12 = 48$ minút od poslednej celej hodiny. To znamená, že minútová ručička musí ukazovať na tretiu čiarku medzi 9-tkou a 10-tkou (aby ukazovala správny počet minút). Teraz vieme doplniť čísla do ciferníka podľa týchto dvoch údajov. Z toho vidíme, že hodinová ručička je medzi 10-tkou a 11-tkou, a teda aktuálny čas je 10:48.

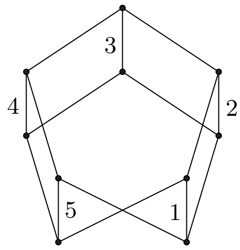
Ťažké 3. Žanetka chcela na sústredenie kúpiť ceruzky a perá. Odkladala ich do peračníkov, pričom do jedného obalu sa jej vošlo 8 ceruziek a 7 pier. Keď však prišla do papiernictva, zistila, že mali už iba dve rôzne balenia. V prvom balení bola 1 ceruzka a 2 perá a v druhom 4 ceruzky a 3 perá. Koľko ktorých balení musela kúpiť, aby naplnila čo najmenej obalov a všetky obaly boli úplne plné?

Výsledok: 4 balenia prvého typu a 9 druhého

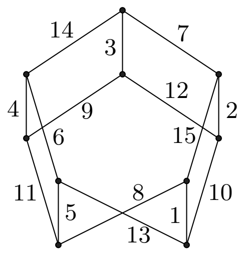
Riešenie: Všimnime si, že na konci nákupu mala Žanetka nejaký celý počet plných peračníkov ceruziek a pier, čo znamená, že na každých 8 ceruziek jej pripadalo 7 pier, teda ceruziek mala viac ako pier. Nakoľko balenie prvého druhu obsahovalo o jedno pero viac než ceruziek a balenie druhého druhu naopak, celkovo musela Žanetka kúpiť viac balení druhého typu, než balení prvého typu.
Ak by Žanetke stačilo kúpiť jedno balenie prvého typu, spolu s dvomi baleniami druhého typu by mala $1 + 2 \cdot 4 = 9$ ceruziek a $2 + 2 \cdot 3 = 8$ pier. S ďalším takým balením by mala 13 ceruziek a 11 pier. Keď na 13 ceruziek pripadalo 11 pier, je to to isté, ako $8 \cdot 11 = 88$ pier na $8 \cdot 13 = 104$ ceruziek, ale to by na každých 8 ceruziek pripadalo iba $88 \div 13 < 7$ (dostaneme podiel 6 a zvyšok 10) pier, pričom s ďalšími baleniami tento počet mohol iba klesnúť (lebo v baleniach druhého typu pripadá na 8 ceruziek dokonca iba 6 pier).
Predstavme si, že Žanetka kúpila dve balenia prvého typu. Keď by k tomu pridala tri balenia druhého typu, mala by $2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 14$ ceruziek a $2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$ pier. So štvrtým balením 18 ceruziek a 16 pier, čo tiež nie je 7 pier na 8 ceruziek. Po kúpe piateho rovnakého balenia by však už Žanetka mala 22 ceruziek a 19 pier, čo je na 8 ceruziek (použijeme rovnaký výpočet ako v predchádzajúcom prípade) $8 \cdot 19 \div 22 = 152 \div 22$ (popri 6 ešte 20 by sa zvýšilo) pier, čo by bolo opäť menej než 7.
Ak by kúpila tri balenia prvého typu (a teda na začiatok štyri druhého), mala by 19 ceruziek a 18 pier.

S ďalším balením 23 ceruziek a 21 pier, potom 27 ceruziek a 24 pier, následne 31 ceruziek a 27 pier. Z týchto počtov by sme ani u jedného nemali 7 pier na každých 8 ceruziek a v poslednom prípade by ich bolo už menej než 7 (mali by sme šesť pier na každých osem ceruziek, a ešte by sa zvýšilo tridsať pier na všetky osmice ceruziek), čo sa ďalšími kúpami isto nemohlo zlepšiť.
Keby Žanetka začala so štyrmi baleniami prvého typu (a piatimi druhého), začínala by s 24 ceruzkami a 23 perami. Pokračovala by kúpou ďalších balení druhého typu, aby mala 28 ceruziek a 26 pier, potom 32 ceruziek a 29 pier, 36 ceruziek a 32 pier, 40 ceruziek a 35 pier. To je ale počet potrebný na zaplnenie presne piatich celých obalov, a teda príslušný nákup (4 balenia prvého typu a 9 druhého) vyhovuje podmienkam úlohy. Menší vhodný nákup existovať nemohol, pretože sme už vylúčili všetky možnosti s nižšími počtami balení prvého typu a tiež všetky možnosti so štyrmi takými baleniami a menej než deviatimi baleniami druhého typu.

Ťažké 4. Doplňte čísla od 6 do 15 na hrany tak, aby bol súčet čísel na hranách vychádzajúcich z každého vrcholu 24.



Výsledok:



Riešenie: Na hrany píšeme čísla od 6 do 15 pričom čísla od 1 do 5 už zapísané sú. Z každého vrcholu vychádzajú práve 3 hrany, čiže 24 bude vždy súčet nejakých troch čísel. Pozrime sa na najväčšie číslo, ktoré máme napísať, čiže 15. Vieme, že $24 - 15 = 9$, čiže ak 15 je jedno z troch čísel zo súčtu 24, tak zvyšné 2 čísla dávajú dokopy súčet 9. Súčet dvoch čísel bude rovný 9 v týchto 4 možnostiach: $1 + 8, 2 + 7, 3 + 6$ a $4 + 5$. Súčet $4 + 5$ však môžem hneď vylúčiť, lebo obe tieto čísla už napísané sú a sú na hranách, ktoré nevychádzajú zo spoločného bodu.
Máme teda 3 možnosti, ako dosiahnuť súčet 24 použitím čísla 15. Jedna hrana vychádza z práve dvoch bodov, čiže číslo na hrane bude sčítavané dvakrát. Preto číslo 15 musí byť použité v práve dvoch z troch spomínaných súčtov. Keďže čísla $1, 2$ a 3 už na hranách zapísané sú tak, ako vidíme na obrázku, tak číslo 15 môžeme napísať len na hranu medzi čísla 1 a 2 alebo na hranu medzi čísla 2 a 3. V prvom prípade budú súčty s číslom 15: $1 + 15 + 8 = 24$ a $2 + 15 + 7 = 24$ a ďalej doplníme čísla na hrany tak, ako na obrázku (susedné vrcholy budú mať už dve hrany s číslami, takže tretie číslo ľahko dopočítame – napr. $24 - 7 - 3 = 14$).
V druhom prípade tieto súčty budú: $2+15+7 = 24$ a $3+15+6 = 24$, ale číslo 7 (zo súčtu $2+15+7$) je napísané na hrane medzi hranami s číslami 1 a 2. Potom čísla 7 a 1 budú v jednom spoločnom súčte, lebo majú jede spoločný bod. Ale $24 - 7 - 1 = 16$ a také číslo na hranu napísať nemôžeme. Preto existuje iba jedno riešenie.

Ťažké 5. Pravidelný mnohouholník má päťkrát viac uhlopriečok ako strán. Koľko má vrcholov? (Za uhlopriečku pravidelného mnohouholníka považujeme úsečku, ktorá spája dva z jeho vrcholov, ktoré spolu nesusedia.)

Výsledok: 13

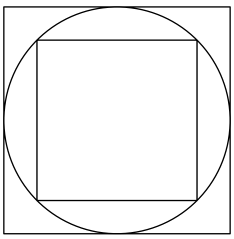
Riešenie: Skúsme prísť na to, koľko uhlopriečok vychádza z jedného vrcholu mnohouholníka s n vrcholmi. Tak ako je napísané v zadaní, vrchol spojíme s každým ďalším okrem susedných. Teda z každého vrcholu pôjde $n-3$ spojení (jedno do každého vrcholu okrem samého seba a dvoch susedov). Keď by sme takto spočítali všetky uhlopriečky, teda pre každý vrchol by sme započítali $n-3$ uhlopriečok, tak by sme každú uhlopriečku započítali dvakrát (raz pri jej prvom vrchole a raz pri druhom). Preto pre každý vrchol započítajme iba polovicu z $n-3$ uhlopriečok, teda $(n-3) \div 2$. Keďže vrcholov je rovnako veľa ako strán, tak uhlopriečok bude presne $((n-3) \div 2)$-krát viac ako strán. My chceme aby to bolo päťkrát viac, teda nájsť taký počet vrcholov n, aby platilo $5 = (n-3) \div 2$. Ak vezmeme 13-uholník ($n = 13$), dostaneme presne $(13-3) \div 2 = 5$ krát viac uhlopriečok.

Ťažké 6. Koľko prirodzených čísel menších ako 100 nemá spoločného deliteľa väčšieho ako 1 s číslami 15 alebo 24?

Výsledok: 26

Riešenie: Pozrime sa na všetkých deliteľov pätnástky väčších ako 1. Sú to $3, 5$ a 15. Takže na to, aby číslo malo spoločného deliteľa iného než 1 s číslom 15, musí byť násobkom $3, 5$ alebo 15. Keďže však každý násobok čísla 15 je deliteľný aj tromi, sú to práve tie čísla, ktoré sú deliteľné 3 alebo 5.
Podobne naložíme s 24. Jej delitele okrem čísla 1 sú $2, 3, 4, 6, 8, 12$ a 24. Opäť však všetky násobky čísla 12 a 24, ktoré by sme našli, by boli už započítané medzi násobkami 2. Rovnako aj násobky $4, 6$ a 8. Preto s číslom 24 zdieľa číslo spoločného deliteľa prevyšujúceho 1 práve vtedy, keď je deliteľné 2 alebo 3. To znamená, že hľadáme čísla, ktoré nie sú deliteľné dvomi, tromi ani piatimi.
Prirodzených čísel menších ako 100 je spolu 99. Z nich 49 je párnych. 33 je deliteľných tromi a 19 piatimi.
Keby sme teraz tieto počty odčítali od celkového počtu, dostali by sme počet čísel, ktoré nie sú deliteľné $2, 3$ ani 5. Avšak všetky násobky šiestich by sme odčítali dvakrát - medzi násobkami dvoch aj násobkami troch. Rovnako dvakrát by sme odčítali aj násobky desiatich (pri násobkoch 2 a 5) a pätnástich (pri násobkoch 3 a 5). Preto, aby tieto čísla vo výsledku boli započítané len raz, musíme ich pripočítať naspäť. Takže pripočítame ešte 16 násobkov šiestich, 9 násobkov desiatich a 6 násobkov pätnástich.
Napokon si uvedomme, že násobky tridsiatich (násobok $2, 3$ a 5 zároveň) sme najprv trikrát odčítali a teraz trikrát pripočítali, čiže zostali neodčítané. Keďže ony nie sú medzi hľadanými číslami, ešte ich musíme odčítať (sú iba 3).
Tak dostaneme, že medzi prvými 99 prirodzenými číslami je nedeliteľných dvomi, tromi ani piatimi $99 - 49 - 33 - 19 + 16 + 9 + 6 - 3 = 26$.

Ťažké 7. Roman si nakreslil útvar ako na obrázku. Najprv nakreslil štvorec. Okolo neho nakreslil kružnicu tak, aby jeho vrcholy ležali na kružnici. Okolo tejto kružnice (so štvorcom vo vnútri) potom nakreslil ďalší štvorec, pričom stred každej strany nového štvorca bol na kružnici. Aký je súčet obsahov oboch štvorcov, ak má kružnica polomer 5 centimetrov?



Výsledok: 150

Riešenie: Najprv vypočítame obsah väčšieho štvorca. Ak spojíme stred dvoch protiľahlých strán (takých, ktoré spolu nesusedia), máme úsečku rovnako dlhú ako strana štvorca, ktorá je zároveň priemerom kružnice (pretože stredy strán tohto štvorca ležia na kružnici). To znamená, že jeho obsah bude $(2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 100\ \mathrm{cm}^2$. Teraz nám zostáva zistiť obsah štvorca, ktorý sa nachádza vnútri kružnice. Ak si doňho dokreslíme jeho uhlopriečky, vidíme, že ho rozdeľujú na 4 rovnaké trojuholníky. Keď si zoberieme dva z nich a „zlepíme“ ich najdlhšou stranou k sebe, tak môžeme vyrobiť „zlepený“

štvorec. Stranou tohto „zlepeného“ štvorca je polovica uhlopriečky štvorca, ktorý Roman nakreslil do kružnice. Vieme, že polovica uhlopriečky štvorca, ktorý je v kružnici, je polomerom kružnice (pretože na kružnici ležia vrcholy tohto štvorca), čo znamená, že vieme vypočítať obsah „zlepeného“ štvorca. Nesmieme však zabudnúť na to, že pri konštrukcii „zlepeného“ štvorca sme použili iba dva trojuholníky zo štyroch, a preto musíme jeho obsah ešte vynásobiť dvoma ak chceme dostať obsah štvorca, ktorý je v kružnici. To znamená, že obsah druhého štvorca, ktorý si Roman nakreslil je $5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$ cm^2. Súčet obsahov oboch nakreslených štvorcov bude $100 + 50 = 150$ cm^2.

Ťažké 8. Mám dvakrát viac rokov ako si mal ty, keď ja som mal toľko, koľko ty máš teraz. Keď ty budeš mať toľko, koľko ja mám teraz, tak budeme mať spolu 63 rokov. Koľko má každý z nás rokov?

Výsledok: Ja 28, ty 21

Riešenie: Tvoj vek si označme ako t a rozdiel našich vekov (čiže o koľko rokov som ja starší od teba) si označme ako r. To znamená, že ja mám $t + r$ rokov. Pozrime sa na prvú vetu. Potrebujeme zistiť, koľko rokov si mal ty, keď ja som mal toľko, koľko ty máš teraz. Keďže ja mám o r rokov viac ako ty, tak toľko rokov, koľko máš ty teraz, som mal pred r rokmi. Pred r rokmi si aj ty mal o r rokov menej, teda vtedy si mal $t - r$ rokov. Ja mám teraz $t + r$ rokov a to má byť dvakrát viac ako si mal ty vtedy. Teda vieme, že $t + r$ je dvakrát viac ako $t - r$. Zároveň $t + r$ je o $2 \cdot r$ väčšie ako $t - r$, čo znamená, že ak ku $t - r$ pripočítame $2 \cdot r$, tak by sme mali dostať dvakrát väčšie číslo. Preto sú tieto čísla rovnaké, teda $t - r = 2 \cdot r$. Z toho vidíme, že t je o r väčšie ako $2 \cdot r$, teda $t = 3 \cdot r$. Tvoj vek je trikrát väčší ako rozdiel našich vekov.

Pozrime sa na druhú vetu. Ja mám teraz $t + r$ rokov, takže ty budeš mať toľko rokov o r rokov. Ja vtedy budem mať o r rokov viac ako mám teraz, čiže budem mať $t + 2 \cdot r$ rokov. Spolu budeme mať $t + r + t + 2 \cdot r = 2 \cdot t + 3 \cdot r$. Vieme, že $3 \cdot r = t$, takže $2 \cdot t + 3 \cdot r = 3 \cdot t$. Náš súčet rokov vtedy, čo je podľa vety 63, bude trojnásobok tvojho veku teraz. Preto ty máš teraz $t = 21$ rokov. Keďže $3 \cdot r = t$, tak náš rozdiel vekov je $r = 7$. Ja mám $t + r = 21 + 7 = 28$ rokov.

Ťažké 9. Peťo musí cestou do školy prejsť 8 schodov. Pri každej ceste chce dodržať nasledovné podmienky:

1. Vždy musí stúpiť na prvý schod a skončiť na ôsmom schode.
2. Z každého schodu môže stúpiť buď na nasledujúci schod, alebo jeden preskočiť a stúpiť hneď na ten ďalší, alebo preskočiť dva a stúpiť hneď na ten ďalší.

Koľkými rôznymi spôsobmi môže prejsť po schodoch do školy?

Výsledok: 44

Riešenie: Peťo môže vždy stúpiť na nasledujúci schod, preskočiť jeden alebo dva. To znamená, že napríklad na štvrtý schod sa môže dostať jedným „krokom“ iba z prvého, druhého alebo tretieho schodu. Na piaty schod sa zas môže dostať jedným „krokom“ iba z druhého, tretieho alebo štvrtého schodu. To znamená, že ak zistíme koľkými spôsobmi sa môže dostať na prvé tri schody, tak potom počet možností ako sa môže dostať na ten štvrtý je ich súčet. Podobne to dostaneme aj pre ďalšie schody (iba sčítame počet možností ako sa dostať na 3 predchádzajúce schody).

Keďže Peťo musí najprv vystúpiť na prvý schod, tak má iba 1 spôsob ako sa naňho dostať. Na druhom schode sa môže ocitnúť opäť iba jedným spôsobom – stúpi naňho z prvého (na ten musí stúpiť). Na treťom schode môže skončiť už dvomi spôsobmi. Buď tam prejde z druhého schodu alebo priamo z prvého, preskočiac druhý.

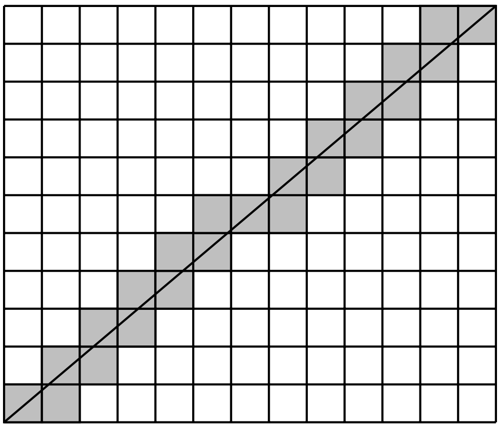
Dostať sa na štvrtý môže toľkými spôsobmi, ako na troch predchádzajúcich dokopy – má na to $1 + 1 + 2 = 4$ spôsoby. Rovnako vypočítame aj počty možností pre ďalšie schody. Na piaty schod sa dostane jedným zo $1 + 2 + 4 = 7$ spôsobov (z druhého, tretieho alebo štvrtého schodu), na šiesty má $2 + 4 + 7 = 13$ spôsobov (z tretieho, štvrtého alebo piateho schodu), na siedmy $4 + 7 + 13 = 24$ a na ôsmy, kde svoju cestu po schodoch ukončí, $7 + 13 + 24 = 44$.

Ťažké 10. Máme štvorcovú mriežku rozmeru 11×13. Koľkými jednotkovými štvorčekmi mriežky prechádza uhlopriečka mriežky?

Výsledok: 23

Riešenie: Ak sledujeme uhlopriečku z ľavého dolného do pravého horného rohu, vždy sa musíme zo štvorca, v ktorom sa nachádzame, presunúť do štvorca vpravo alebo hore. Spolu sa do pravého

horného rohu musíme presunúť o 12 stĺpcov doprava a 10 riadkov nahor, čiže spravíme 22 takýchto krokov, pri ktorých uhlopriečka vstúpi do nového štvorčeka, čo spolu s východiskovým štvorčekom je 23 štvorčekov, ktorými prechádza uhlopriečka. Väčšie číslo už nedostaneme, no stále to môže byť menej, ak uhlopriečka prechádza rohom niektorého štvorčeka.
Táto situácia nastane však iba v prípade, že si viem tabuľku rozdeliť na rovnaké obdĺžniky (pri tomto delení obdĺžniky 2×5 a 5×2 považujeme za rôzne). V takom prípade bude uhlopriečka prechádzať medzi obdĺžnikmi iba v niektorom z ich rohov, pretože rozmer tabuľky bude iba násobkom rozmerov jedného obdĺžnika. Keďže táto situácia v našom prípade nenastáva, pretože 11 a 13 nemajú spoločného deliteľa väčšieho ako 1 (iba v takom prípade je možné rozdeliť mriežku na obdĺžniky), tak uhlopriečka bude prechádzať cez práve 23 štvorčekov.



autori:	Jakub Genči, Florián Hatala, Peter Kovács, Martin Masrna, Kristína Mišlanová, Daniel Onduš, Zuzana Ontkovičová, Žaneta Semanišinová, Roman Staňo
recenzia a úprava:	Jana Baranová, Erik Berta, Viktória Brezinová, Martin Albert Gbúr, Jakub Genči, Matej Hanus, Matúš Hlaváčik, Klára Hricová, Róberta Juríková, Tomáš Kocák, Matúš Masrna, Michal Masrna, Lujza Milotová, Erik Novák, Patrik Paľovčík, Ján Richnavský, Róbert Sabovčík, Martin Spišák, Roman Staňo, Timea Szöllősová, Martin Števko
názov:	**MAMUT – 31. 5. 2019**
vydavatelia:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta Združenie STROM
www:	https://malynar.strom.sk/sk/mamut/ http://itakademia.sk/

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk