# Lomihlav

**Košice, 29.4.2022**

# Úlohy

---

**Úloha 1:**

Attila si sadol do holičského kresla, ktoré bolo nastavené na výšku 20 cm. Holenie trvá 50 minút. Attila je však ťažká váha, takže za každých desať minút sa s ním kreslo prepadne o 10 cm (ak to ide). Ako vysoko bude nastavené kreslo s Attilom na konci holenia?

**Výsledok:** 0 centimetrov

**Riešenie:**

Za dvadsať minút sa Attila prepadne o 20 cm, takže jeho kreslo bude nastavené na 0 cm. Počas zvyšných 30 minút sa kreslo už nemá kam prepadnúť, a preto ostane na 0 cm.

---

**Úloha 2:**

Holiči si dali po práci preteky na nafukovačkách. Každý z nich sa najprv priplavil ku bójke, potom pri nej počkal niekoľko minút a napokon sa vrátil naspäť. Po preteku nám povedali nasledujúce tvrdenia:

- Kris: „Ja som ku bójke doplával za 10 minút a 5 minút som pri nej čakal.“
- Vincent: „Musel som pri bójke dve minúty počkať a vydýchnuť si, ale aj tak som bol cestou naspäť dvakrát rýchlejší ako Kris.“
- Reza: „Cestou k bójke mi to trvalo o dve minúty viac ako Krisovi, ale cestou naspäť som bol o dve minúty rýchlejší ako on.“

Ako dlho čakal Reza pri bójke, ak všetci traja holiči naspäť dorazili naraz?

**Výsledok:** 5 minút

**Riešenie:**

Reza prešiel cestu k bójke o dve minúty pomalšie ako Kris a cestu späť prešiel o dve minúty rýchlejšie ako Kris, čiže dokopy plávali rovnako dlho. Zo zadania vieme, že celá trasa im trvala rovnako dlho a to znamená, že aj pri bójke čakali rovnako dlho - 5 minút.

---

**Úloha 3:**

Písmená $L$, $A$, $K$, $Y$ nahraďte každé inou cifrou tak, aby platilo: $AAL + KL3 = KY27$. Určte súčin $L \cdot A \cdot K \cdot Y$.

**Výsledok:** 0

**Riešenie:**

Pri riešení tohto príkladu postupuje ako pri sčítavaní pod seba - sprava doľava:

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{A} & \mathrm{L} \\ & \mathrm{K} & \mathrm{L} & 3 \\ \hline \mathrm{K} & \mathrm{Y} & 2 & 7 \end{array}$$

Pri počítaní s ciframi máme vždy dve možnosti a to prejsť cez 10 alebo nie. A teda $L + 3 = 7$ alebo $L + 3 = 17$. Možnosť $L + 3 = 17$ nemôže nastať, lebo 14 nie je cifra, a teda $L = 4$. Teraz sme zistili, že $A + 4 = 2$ alebo $A + 4 = 12$. Keďže neexistuje záporná cifra, ostáva možnosť $A = 8$. Ďalej vieme, že sčítavame dve trojciferné čísla a teda musí platiť, že $K = 1$ (súčet dvoch trojciferných čísel nemôže byť číslo väčšie ako 2000). Po dosadení $K = 1, L = 4, A = 8$ vidíme, že tieto čísla sú 884 a 143 a teda $884 + 143 = 1027$ a teda $Y = 0$. Takže $L \cdot A \cdot K \cdot Y = 4 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 0 = 0$.

**Úloha 4:**

Vincent sa rozhodol, že o 12:00 vyrazí zo salónu na autobus, ktorý chodí každých 20 minút, začínajúc na 12:01. Problém však je, že Vincent nevie kedy autobus chodí a je netrpezlivý. Po jeho vždy 6 minútovej ceste zo salónu na zastávku je na nej vždy ochotný čakať presne 2 minúty a potom sa vráti naspäť do salónu, kde 4 minúty zametá napadané vlasy a potom sa opäť vydá na cestu na ten istý autobus. Kedy presne dorazí autobus na zastávku, do ktorého úspešne nasadne?

**Výsledok:** 13:01

**Riešenie:**

Zo zadania vieme ľahko zistiť, že autobus chodí na 01, 21, 41. Vinco sa dostane na zastávku o 12:06 a bude tam do 12:08. Potom podstúpi cestu naspäť do salónu, tam počká a vráti sa späť. Toto mu dokopy bude trvať 6+4+6=16 minút. Opäť sa teda na zastávku dostane o 12:24 a bude tam do 12:26. Potom sa opäť vráti na zastávku o 12:42 a ostane tam do 12:44. Vráti sa naspäť do salóna a objaví sa na zastávke opäť na 13:00. Počas jeho čakania príde autobus na 13:01. Zo zastávky teda odíde o 13:01.

---

**Úloha 5:**

Kris si myslí číslo od 400 do 800 s ciferným súčtom 15. Cifra na mieste desiatok je dvojnásobkom číslice na mieste stoviek. Aké číslo si Kris myslí?

**Výsledok:** 483

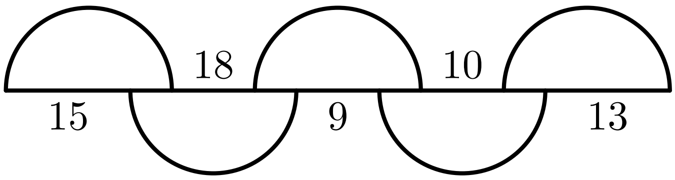
**Riešenie:**

Cifry 5, 6, 7 a 8 na mieste stoviek byť nemôžu, lebo ich dvojnásobky sú dvojciferné čísla a tie nevedia byť na mieste desiatok. Teda na mieste stoviek môže byť iba cifra 4 a na mieste desiatok cifra 8. Číslo má súčet cifier 15 a cifra na mieste jednotiek teda bude $15 - 8 - 4 = 3$.

---

**Úloha 6:**

Všetky polkruhy na obrázku majú rovnaký priemer. Čísla na obrázku znamenajú dĺžky prislúchajúcich úsekov medzi polkruhmi. Zistite aký je priemer polkruhov.




**Výsledok:** 9

**Riešenie:**

Úsečku vieme rozdeliť na dve časti: na hornú a spodnú, pričom obe tieto časti majú rovnakú dĺžku. Horná časť úsečky sa skladá z 3 polkruhov a spodná časť z dvoch. Medzery medzi hornými polkruhmi majú dokopy dĺžku 28 a medzery medzi spodnými polkruhmi majú dĺžku 37. Keď si označíme priemer polkruhu ako $P$, vieme teda povedať:

$$3P + 28 = 2P + 37$$

$$P = 9$$

Hore majú medzery dokopy o 9 centimetrov menej ako dole ale je tam o polkruh viac, čo znamená, že polkruh má priemer 9 centimetrov.

**Úloha 7:**

Laky vystavuje svoje obrazy na dvoch výstavách. Prvú z nich navštívilo 320 osôb, druhú z nich navštívilo iba 216 osôb, z ktorých 152 navštívilo iba druhú. Koľko osôb navštívilo iba prvú výstavu?

**Výsledok:** 256

**Riešenie:**

Z 216 ľudí, ktorí navštívili druhú výstavu, 152 ľudí nenavštívilo prvú výstavu. A teda obe výstavy navštívilo $216 - 152 = 64$ ľudí. To znamená, že iba prvú výstavu navštívilo $320 - 64 = 256$ ľudí.

**Úloha 8:**

Dida chce vyplniť tabuľku $3 \times 3$ číslami tak, aby každý štvorec $2 \times 2$ v nej mal súčet 10. Päť čísel už Dida stihla vyplniť. Aký je súčet zvyšných štyroch čísel?

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | 0 |
| | 2 | |
| 4 | | 3 |

**Výsledok:** 12

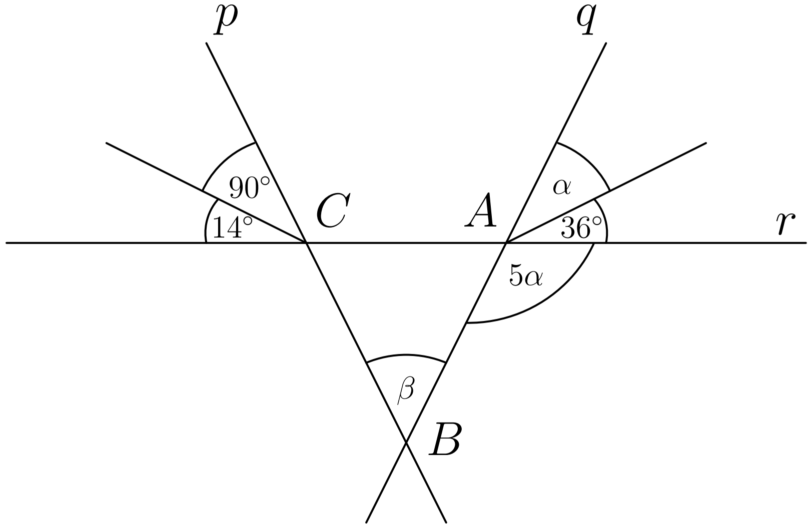
**Riešenie:**

Prázdne políčko vľavo a dole spolu s číslami 2 a 4 tvoria štvorec a teda súčet týchto dvoch prázdnych políčok je $10 - 4 - 2 = 4$. Ďalej prázdne políčko hore a vpravo spolu s číslami 2 a 0 musí dávať súčet 10. Horné a pravé prázdne políčko teda dávajú súčet $10 - 2 - 0 = 8$. Súčet všetkých prázdnych políčok je teda 12.

Vieme sa na to pozrieť aj iným spôsobom. V tabuľke sú 4 súčty menších štvorcov $2 \times 2$ ktorých súčet bude 40, pričom niektoré štvorce obsahujú rovnaké čísla, ktoré budú započítané viackrát. Rohové čísla budú započítané raz, stredná dvojka bude započítaná 4-krát a krajné nedoplnené budú každé dvakrát. Vyplnené čísla dávajú súčet 16 $(1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 16)$, a teda treba doplniť 24, ale každé číslo bude započítané 2-krát, a teda ich súčet bude 12.

**Úloha 9:**

Vypočítajte veľkosť uhla $\beta$ (obrázok je iba ilustračný - veľkosti uhlov nezodpovedajú skutočnosti).



**Výsledok:** 16

**Riešenie:**

Vieme, že uhly $\alpha$, $36°$ a $5\alpha$ majú dokopy $180°$, pretože ležia na jednej priamke. Z toho vieme vyrátať, že $\alpha = 24°$. Uhol $ACB$ je vrcholový s uhlom, ktorý má $104°$, čiže má rovnakú veľkosť. Uhol $CAB$ je vrcholový s uhlom o veľkosti $\alpha + 36$, čiže celý uhol má veľkosť $24 + 36 = 60°$. Naším cieľom je vyrátať uhol $\beta$, a to už vieme vyrátať ako $180° = 104° + 60° + \beta$ (pretože sú to vnútorné uhly trojuholníka a tie majú dokopy $180°$) a vyjde nám, že $\beta = 16°$.

---

**Úloha 10:**

Vincent nevie heslo na Wi-Fi v salóne. Kris mu však vysvetlil, že to je to najmenšie päťciferné číslo zložené z nepárnych cifier, ktoré je deliteľné 3 aj 5 zároveň a jeho ciferný súčet je deliteľný 13. Aké je heslo na Wi-Fi v salóne?

**Výsledok:** 79995

**Riešenie:**

Heslo od Wi-Fi musí byť číslo deliteľné 3, teda jeho ciferný súčet je deliteľný 3, a zároveň zadanie hovorí, že je deliteľný aj 13. Ciferný súčet je teda deliteľný 39 (najmenší spoločný násobok 3 a 13). 5-ciferné číslo s najväčším ciferným súčtom (99999) má ciferný súčet 45, čiže ciferný súčet nášho čísla musí byť 39. Číslo je tiež deliteľné 5, čiže jeho posledná cifra je 0 alebo 5. Ak by posledná cifra bola 0, nevyšiel by ciferný súčet 39 (99990). Preto posledná cifra je 5. Teraz chceme mať prvú cifru čo najmenšiu. Posledná je 5, zvyšné tri sú 9, a keďže ciferný súčet musí byť 39, prvá cifra je $39 - 9 \cdot 3 - 5 = 7$. Najmenšie možné číslo je teda 79995.

---

**Úloha 11:**

Kris sa hral s kartičkami, na ktorých boli napísané čísla 2, 2, 0, 0, 0, 3, 4, 5, 8, 9. Zostavil z nich najmenšie šesťciferné číslo deliteľné tromi. Aké číslo to bolo?

**Výsledok:** 200025

**Riešenie:**

Aby sme zostavili čo najmenšie číslo, musíme použiť najmenšie cifry na čo najvyšších miestach. Prvá číslica musí byť najmenšie nenulové číslo, teda 2. Ďalšie tri môžu byť 0, aby bolo číslo čo najmenšie. Predposledná číslica tiež bude zostávajúca dvojka, aby bolo číslo čo najmenšie. Aby bolo číslo deliteľné tromi, musí mať ciferný súčet deliteľný tromi, a teda keďže zatiaľ je ciferný súčet 4, posledná cifra musí byť 5.

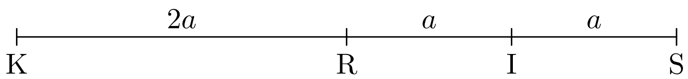
---

**Úloha 12:**

Body $R$, $I$ ležia na úšečke $KS$ o dĺžke 8, pričom bod $R$ leží bližšie pri bode $K$ ako bod $I$. Vieme, že $|KR| = 2|RI| = 2|IS|$. Aká je vzdialenosť bodu $K$ od stredu úsečky $IS$?

**Výsledok:** 7

**Riešenie:**




Označme si dĺžku $|IS|$ ako $a$. Potom vieme, že $|RI|$ je tiež rovné $a$, pretože $2|RI| = 2|IS|$, a $|KR|$ je rovné $2a$, pretože $2|IS| = |KR|$. Keďže tieto tri úsečky spolu tvoria celú úsečku $KS$, tak $2a + a + a = 4a = 8$, čiže $a = 2$.

Medzi bodom $K$ a stredom úsečky $IS$ sa nachádza celý úsek $KR$ dlhý 4, celý úsek $RI$ dlhý 2 a polovica úseku $IS$, ktorá je dlhá 1. Spolu je táto vzdialenosť tým pádom $4 + 2 + 1 = 7$

**Úloha 13:**

Laky zistil, že suma, ktorú tento mesiac minuli zákazníci v salóne je najväčšie štvorciferné číslo zložené zo štyroch rôznych cifier a je deliteľné každou z nich. Zistite, koľko peňazí minuli zákazníci v salóne.

**Výsledok:** 9864

**Riešenie:**

Začneme s cifrou 9, ktorú chceme umiestniť na miesto tisícok, aby bolo hľadané číslo čo najväčšie. Ďalej na miesto stoviek doplníme cifru 8, keďže čísla musia byť rôzne. Ak má byť číslo deliteľné 9, musí byť aj ciferný súčet deliteľný 9. Pre deliteľnosť 8 platí, že posledné trojčíslie musí byť deliteľné 8. Ak by bola tretia cifra 7, potom by bol ciferný súčet prvých troch cifier $9 + 8 + 7 = 24$, a teda pre deliteľnosť 9 by posledná číslica musela byť 3. Potom by ale číslo nebolo deliteľné 8. Keby tretia cifra bola 6, súčet prvých troch cifier by bol $9 + 8 + 6 = 23$, čiže posledná cifra by pre dosiahnutie deliteľnosti 9 musela byť 4. 9864 vyhovuje, lebo zároveň platí podmienka, že je to deliteľné 8.

Poďme si overiť ešte deliteľnosť zvyšnými dvoma ciframi, čiže 6 a 4. Podmienka pre deliteľnosť 6 je deliteľnosť 2 a 3 zároveň. Číslo je párne a ciferný súčet je 27, čo je násobok 3, takže celé číslo je deliteľné 6. Pre 4 zase platí, že číslo je ňou deliteľné vtedy, ak posledné dvojčíslie je deliteľné 4. Keďže 64 je skutočne násobok 4, splnili sme podmienky deliteľnosti pre všetky cifry nášho čísla.

**Úloha 14:**

Keby mal Reza o šesť strojčekov viac ako Balo, mali by spolu 34 strojčekov. Reza má však o šesť strojčekov menej. Koľko strojčekov má Reza?

**Výsledok:** 8

**Riešenie:**

Situáciu, keby mal Reza o 6 strojčekov viac ako Balo, si zapíšeme ako $B + 6 + B = 34$, kde B je počet Balových strojčekov. Pričom $B + 6$ vyjadruje počet strojčekov, ktoré by mal v tejto situácii Reza. Úpravou dostaneme, že Balo má 14 strojčekov ($2B = 34 - 6$, $B = 14$). Inými slovami, 34 strojčekov by sme dostali, ak by sme spočítali dvakrát Balove strojčeky a pripočítali k nim 6. Teda dvojnásobok Balových strojčekov je rovný $34 - 6 = 28$. Reza má o 6 strojčekov menej. Ak má Balo 14, Reza má 8 ($14 - 6 = 8$) strojčekov.

**Úloha 15:**

Adresa salónu je štvorciferné číslo, ktoré sa číta rovnako odpredu ako odzadu a je deliteľné 72. Nájdite číslo adresy salónu.

**Výsledok:** 6336

**Riešenie:**

Ak je číslo deliteľné 72, musí byť deliteľné 9 a 8. Číslo je deliteľné 9 vtedy, keď je jeho ciferný súčet deliteľný 9. Zároveň, aby bolo deliteľné 8 musí byť jeho posledné trojčíslie deliteľné 8. Naše číslo je zo zadania v tvare $ABBA$. Jeho ciferný súčet je teda rovný $2A+2B$, teda je párny. Maximálny ciferný súčet štvorciferného čísla je $9 + 9 + 9 + 9 = 36$, takže ciferné súčty štvorciferných čísel nadobúdajú hodnoty od 1 do 36, z ktorých párne a deliteľné 9 zároveň sú len 36 a 18. Ak by malo číslo ciferný súčet 36, tak by muselo byť jeho posledné trojčíslie 999, čo nie je deliteľné 8. Ostáva nám už iba ciferný súčet 18. Keďže je $2A + 2B = 18$ tak vieme, že $A + B = 9$. Cifra A musí byť zároveň párna, aby mohlo byť číslo $ABBA$ deliteľné 8. Možnosti pre naše číslo sú teda 2772, 4554, 6336 a 8118. Ak sa teraz pozrieme na deliteľnosť 8, tak vidíme, že iba číslo 6336 je deliteľné 8, a teda je to naše hľadané číslo.

**Úloha 16:**

Kris cestuje do salónu v Bratislave z Levíc. Cestou do salónu šiel rýchlosťou 120 km/h. Cestou naspäť ho vezie Reza, ktorý nechal zatiahnutú ručnú brzdu, takže cestou naspäť išli rýchlosťou 24 km/h. Cesta tam aj späť trvala dokopy 6 hodín. Ako ďaleko sú vzdialené Levice od Bratislavy?

**Výsledok:** 120 km

**Riešenie:**

$120 \div 24 = 5$. Kris teda cestuje 5 krát rýchlejšie ako Reza. To znamená, že cestoval 5 krát kratšie. Spolu cestovali 6 hodín, Reza teda musel ísť 5 hodín a Kris 1 hodinu. Keďže Kris cestoval hodinu rýchlosťou 120 km/h, Levice sú od Bratislavy vzdialené 120 km.

---

**Úloha 17:**

Reza s Krisom išli spolu kúpiť žlté kreslo. Cena kresla bola najväčšie také prirodzené číslo, že ak ho sčítame spolu s číslom, ktoré vznikne napísaním ceny odzadu, dostaneme 1211. Môžeme predpokladať, že cena napísaná odzadu nezačína nulou. Koľko stálo žlté kreslo?

**Výsledok:** 952

**Riešenie:**

V prvom rade si musíme uvedomiť, koľko ciferné číslo je cena kresla. Výsledok po sčítaní je 1211. Toto číslo vieme dostať len sčítaním dvoch 3-ciferných čísel. Poslednú cifru čísla 1211 môžeme dostať tak, že posledné cifry čísel, ktoré sčítavame, sú 0 a 1 alebo cifry, ktorých súčet je 11. 0 a 1 neprichádza do úvahy, keďže sčítavame číslo s jeho podobou odzadu a číslo sa nemôže začínať číslicou 0. Ďalej na mieste desiatok stojí číslica 1, pričom keď súčet posledných cifier musí byť 11, nastane prechod cez desiatku, pričom k súčtu predposledných cifier sa nám pripočíta jednotka. Keď napíšeme 3-ciferné číslo odzadu, stredná cifra je rovnaká. Vieme, že súčet stredných cifier je $11 - 1 = 10$. Z toho dostávame, že je to 5. Zas nastáva prechod cez desiatku, a teda súčet prvých cifier čísel je 11. Aké dve čísla musíme zvoliť, aby sme dostali čo najvyššie číslo? Najväčšia cifra je 9, čiže 9 a 2. Cena kresla je 952.

---

**Úloha 18:**

Priemerná výška siedmich holičov v salóne je 180 cm. Štyria najnižší majú priemernú výšku 170 cm. Štyria najvyšší majú priemernú výšku 192 cm. Ako vysoký je prostredný holič?

**Výsledok:** 188 cm

**Riešenie:**

Aritmetický priemer vypočítame ako súčet všetkých čísel vydelený ich počtom. V našom prípade je teda súčet výšok siedmich holičov vydelený siedmimi rovný 180. Ak teda tento priemer vynásobíme siedmimi, dostaneme naspäť súčet výšok holičov. $180 \cdot 7 = 1260$. To isté môžeme spraviť so súčtom najnižších štyroch $170 \cdot 4 = 680$ a najvyšších štyroch $192 \cdot 4 = 768$. Jediný, kto sa nachádza v oboch týchto štvoriciach je prostredný holič, teda číslo $768 + 680 = 1448$ je súčet výšok všetkých holičov, pričom prostredný je tam zarátaný dvakrát. Ak od tohto čísla teda odčítame súčet výšok všetkých holičov, dostaneme výšku prostredného: $1448 - 1260 = 188$.

---

**Úloha 19:**

Vo vnútri pravidelného päťuholníka $SALON$ je bod $X$ taký, že trojuholník $SAX$ je rovnostranný. Aký veľký je uhol $ALX$?

**Výsledok:** 66

**Riešenie:**

Keďže vieme, že trojuholník $SAX$ je rovnostranný, tak vieme, že uhol $SAX$ je 60°. Veľkosť vnútorného uhla v päťuholníku je 108°, preto $XAL = 108° - SAX = 108° - 60° = 48°$. Keďže je päťuholník pravidelný, tak vieme, že $SA = AL$. A keďže $SA = AX$ (trojuholník $SAX$ je rovnostranný), tak aj $AX = AL$. Trojuholník $AXL$ je teda rovnoramenný, a teda uhly $ALX$ a $AXL$ sú zhodné. Zároveň platí, že súčet týchto dvoch uhlov je $180° - 48° = 132°$, a preto vieme, že uhol $ALX$ má 66°.

---

**Úloha 20:**

Balo a Kris pretekajú proti sebe na trati rozdelenej do troch úsekov. Každý úsek má 4 metre. Balo ide na všetkých úsekoch rovnakou rýchlosťou, zatiaľ čo Kris ide na prvom 2-krát rýchlejšie ako Balo, na druhom ide rovnakou rýchlosťou ako Balo a na treťom ide polovičnou rýchlosťou akou ide Balo. Kto vyhrá a koľko metrov bude mať náskok?

**Výsledok:** Balo, 1 meter

**Riešenie:**

Nech Balo prejde 1 meter za nejakú 1 časovú jednotku. Potom 12 metrov prejde za 12 časových jednotiek.

Ak ide Kris na prvom úseku dvakrát rýchlejšie ako Balo, bude mu to trvať o polovicu menej, a teda len 2 časové jednotky. Na druhom úseku ide rovnako rýchlo, preto mu to bude trvať tiež 4 časové jednotky. Na treťom úseku už ide dvakrát pomalšie, a teda mu to bude trvať dvakrát viac ako Balovi. Preto tretí úsek prejde Kris za 8 časových jednotiek. Spolu teda Kris prejde trať za $2 + 4 + 8 = 14$ časových jednotiek.

Balo prejde celú trať za 12 časových jednotiek a Kris za 14 časových jednotiek. Balo tak vyhrá o 2 časové jednotky.

Krisovi ostávajú do cieľa 2 časové jednotky. Posledný úsek mu trvá spolu 8 časových jednotiek, 2 časové jednotky pokrývajú teda štvrtinu tretieho úseku. Keďže úsek má 4 metre, potom Kris musí za posledné 2 časové jednotky prejsť 1 meter. To je teda náskok, ktorý Balo má v cieli.

---

**Úloha 21:**

Koľko 5-ciferných čísel vieme vytvoriť z kartičiek 1, 2, 3, 4, 5, tak aby neboli pri sebe 1 a 2 ani 3 a 4?

**Výsledok:** 48

**Riešenie:**

Máme tri spôsoby, ako môžeme vzájomne umiestniť kartičky s dvojicami číslic 1;2 a 3;4. Pre jednoduchšie znázornenie umiestnenia kartičiek si označme číslice z každej dvojice rovnakým písmenom (AA a BB). Potom vieme, že vo výslednom čísle nemôžu byť pri sebe dve rovnaké písmená.

Prvý zo spôsobov je taký, že ich uložíme obkročmo, čo znamená, že jedna z dvojíc bude obklopovať tú druhú. Ich vzájomné umiestnenie bude ABBA. Máme 4 možnosti číslic, ktoré môžeme umiestniť na miesto prvého A. Potom máme len jednu možnosť číslice, ktorú uložíme na miesto druhého A, keďže musí byť z rovnakej dvojice ako prvé A. Na miesto prvého B môžeme dať ktorékoľvek číslo z tej druhej dvojice, takže máme dve možnosti. Na miesto druhého B máme zas iba jednu možnosť, umiestnime tam posledné nepoužité číslo z týchto štyroch. Dokopy máme teda $4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ možností, ako týmto spôsobom uložiť kartičky 1, 2, 3 a 4. Zostáva nám ešte uložiť kartičku 5. Pri tomto spôsobe máme len jednu možnosť, a to do stredu, pretože inak by vnútorná dvojica (BB) bola pri sebe. Takže pri tomto spôsobe ukladania máme $8 \cdot 1 = 8$ možností.

Druhý spôsob je taký, že tie dve dvojice uložíme striedavo, takže ich vzájomné umiestnenie bude ABAB. Opäť máme 8 možností ako uložiť kartičky 1, 2, 3, 4 týmto spôsobom, lebo znovu máme 4 možnosti na prvé A, jednu možnosť na druhé A, dve možnosti na prvé B a jednu možnosť na druhé B. Tentoraz však nemáme iba jednu možnosť na uloženie kartičky 5. Z rozpoloženia ABAB vidíme, že číslice z rovnakej dvojice nebudú nikdy pri sebe, nech uložíme 5 hocikam. Tým pádom máme 5 možností, ako uložiť číslicu 5. Týmto spôsobom ukladania máme teda $8 \cdot 5 = 40$ možností.

Pre úplnosť si ešte ukážeme posledný spôsob uloženia dvojíc, čo je AABB. V tomto prípade ale číslicou 5 môžeme rozdeliť maximálne jednu z nich, zatiaľ čo tá druhá bude určite pri sebe. Tento spôsob teda nebude fungovať v žiadnej možnosti.

Všetkých možností je tým pádom $8 + 40 = 48$.

---

**Úloha 22:**

Uhádnite 3-ciferný kód od pokladne, ak vám Laky povedal nasledujúce informácie:

1. V kóde 291 je jedna cifra správna aj správne umiestnená,
2. v kóde 245 je jedna cifra správna, ale nesprávne umiestnená,
3. v kóde 463 sú dve cifry správne, ale obe nesprávne umiestnené,
4. v kóde 578 nie je nič správne,
5. v kóde 569 je jedna cifra správna, ale nesprávne umiestnená.

**Výsledok:** 394

**Riešenie:**

V kóde nemôže byť cifra 2, pretože v prvých dvoch informáciach bola v obidvoch na prvom mieste, lenže nemôže byť zároveň na správnom aj nesprávnom mieste. Zo štvrtej informácie vieme, že v kóde nie je ani cifra 5. Z druhej informácie je potom jasné, že tam musí byť cifra 4. Zároveň vieme z druhej a tretej informácie, že cifra 4 je na rôznych pozíciach, ktoré sú nesprávne. Preto musí byť na tretej pozícii. Tým pádom vieme z prvej informácie, že cifra 9 je na správnom mieste, pretože už vieme, že 2 to nie je a 1 tiež nie, pretože tretiu pozíciu už máme obsadenú. Zároveň sa v kóde nemôže nachádzať cifra 6, pretože v piatej informácii je len jedna cifra správna, ale nesprávne umiestnená, čo je 9. A preto z tretej informácie vieme, že druhá nesprávne umiestnená cifra je 3, ktorá sa nachádza na prvej pozícii, ktorá zvýšila. Správny kód je 394.

---

**Úloha 23:**

Obsah pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ je 60. Aký je obsah trojuholníka $ABD$?

**Výsledok:** 20

**Riešenie:**

Pomenujme stred daného šesťuholníka $S$. Trojuholník $ABD$ potom vieme zložiť z trojuholníkov $ABS$ a $BSD$. Trojuholník $ABS$ je trojuholník tvorený susednými vrcholmi šesťuholníka a jeho stredom. Pre také trojuholníky platí, že sú rovnostranné, a zároveň ich obsah je šestina obsahu daného šesťuholníka. Teda trojuholník $ABS$ má obsah $60 : 6 = 10$. Štvoruholník $BSCD$ je rovnobežník, pretože sa skladá z dvoch rovnostranných trojuholníkov, takže dvojice susedných uhlov majú súčet $180°$. Trojuholník $BSD$ tvorí polovicu rovnobežníka $BSDC$, teda jeho obsah je $20 : 2 = 10$. Obsah $ABD$ je teda $10 + 10 = 20$.

---

**Úloha 24:**

Šesť holičov si chce spraviť spoločnú fotku. Dohodli sa, že sa postavia do dvoch radov po troch ľudí. Aby fotka vyzerala dobre, tak najvyšší človek z každého radu musí stáť v strede, a zároveň nikto z predného radu nemôže byť vyšší ako človek, čo stojí priamo za ním. Koľkými spôsobmi sa vedia rozostaviť na fotku, ak vieme, že žiadni dvaja holiči nie sú rovnako vysokí?

**Výsledok:** 16

**Riešenie:**

Očíslujme si holičov podľa výšky 1 až 6. Vieme, že 6 bude vzadu v strede, lebo od neho nie je nikto vyšší. Pred ním môže stáť 5, 4 alebo 3 (2 ani 1 nemôžu, lebo títo nemôžu byť najvyšší z radu). Rozoberme tieto tri možnosti:

1. Ak je pred ním 5, vzadu na jednom z dvoch krajov musí byť 4, pretože už niet holiča vyššieho než 4, teda nemôže byť vpredu. Po umiestnení 4 môžeme na posledné zadné miesto umiestniť iba 3 alebo 2, pretože 1 vzadu byť nemôže, lebo niet od neho nižšieho holiča. Ak sme zaplnili toto miesto holičom 3, máme dve možnosti na rozmiestnenie 2 a 1 do predného radu. Ak sme dozadu umiestnili 2, môže pred ním byť iba holič 1 a na poslednom mieste musí byť holič 3. Pre prípad, kde pred holičom 6 je holič 5 sú teda dve možnosti na umiestnenie holiča 4 a pre každé z nich 3 možné dokončenia umiestnenia, teda ich je $2 \cdot 3 = 6$.

2. Ak je pred holičom 6 holič 4, tak vieme, že holič 5 je určite v zadnom rade, lebo niet od neho vyššieho holiča. Holičov 3, 2 a 1 rozmiestňujeme rovnakým spôsobom, ako v minulom prípade, teda možností pre prípad, v ktorom je holič 4 pred holičom 6 je opäť $2 \cdot 3 = 6$.

3. Ak je pred holičom 6 holič 3, tak je v strede predného radu, a vedľa neho teda musia byť nižší ľudia. Preto holiči 1 a 2 budú vpredu a holiči 4 a 5 budú vzadu. Každú z týchto dvojíc vieme umiestniť dvoma spôsobmi, čo nám dáva dokopy $2 \cdot 2 = 4$ rôzne umiestnenia.

Dokopy je všetkých možností $6 + 6 + 4 = 16$.

---

**Úloha 25:**

Pravidelný dvanásťsten je teleso, ktoré má 12 zhodných päťuholníkových stien. Koľko má toto teleso dokopy hrán a vrcholov (čísla sčítajte) ?

**Výsledok:** 50

**Riešenie:**

V dvanásťstene je 12 stien tvaru päťuholníka. Je tam teda $12 \cdot 5 = 60$ hrán, pričom každá hrana je v dvanásťstene zdieľaná práve dvoma päťuholníkmi. Dvanásťsten má teda hrán $60 : 2 = 30$. Teraz sa pozrime na vrcholy. Vrcholov má znova päťuholník päť, lenže v dvanásťstene zdieľajú jeden vrchol až tri päťuholníky, pretože ak by ho zdieľali štyri, tak by súčet vnútorných uhlov pravidelných päťuholníkov obklopujúcich daný vrchol prevýšil 360, keďže vnútorný uhol pravidelného päťuholníka je 108 a $108 \cdot 4 > 360$. V takom prípade by ale nebolo možné útvar zložiť. Zároveň si ľahko môžeme premyslieť, že nemôžu zdielať vrchol iba dva päťuholníky. Každý vrchol je teda obsiahnutý v troch päťuholníkoch. Vrcholov teda je $60 : 3 = 20$. Hrán a vrcholov dokopy je $30 + 20 = 50$

---

**Úloha 26:**

Opava je od Bratislavy vzdialená 1200 vzdušných kilometrov. Laky ide do Opavy navštíviť svoje tetušky a cestuje súkromným lietadlom tam a späť. Toto lietadlo sa voči vzduchu hýbe rýchlosťou 100 km/h, avšak celý čas bude fúkať vietor presne v smere od Opavy na Bratislavu o rýchlosti 20 km/h. Laky však tetuškám už sľúbil, že ich navštívi, a preto letí aj v takom vetre. Koľko paliva by Laky ušetril, keby letel za bezvetria za predpokladu, že lietadlo mu za hodinu spotrebuje 15 litrov paliva?

**Výsledok:** 45 litrov

**Riešenie:**

Vypočítame si spotrebu paliva pre oba prípady. V ideálnom prípade bez vetra by Laky preletel vzdialenosť za 12 hodín (1200 km rýchlosťou 100 km/h) a spotreboval by pritom 180 l paliva ($12\,\mathrm{h} \cdot 15\,\mathrm{l/h} = 180\,\mathrm{l}$). Ak bude fúkať vietor, spomalí jeho rýchlosť na 80 km/h ($100\,\mathrm{km/h} - 20\,\mathrm{km/h} =$

80 km/h), a vzdialenosť prejde za 15 hodín. Spotrebuje pri tom 225 l paliva (15 h · 15 l/h = 225 l). Rozdiel spotreby paliva je 225 l − 180 l = 45 l. Toľko litrov by Laky ušetril.

---

**Úloha 27:**

V Lakyho teráriu sa nachádzalo 18 exemplárov z týchto troch druhov hmyzu: pavúk, ktorý má 8 nôh, vážka, ktorá má 6 nôh a dva páry krídel, a cikáda, ktorá má 6 nôh a jeden pár krídel. Spolu mali 118 nôh a 20 párov krídel. Koľko exemplárov bolo z ktorého druhu?

**Výsledok:** 5 pavúkov, 7 vážok, 6 cikád

**Riešenie:**

Najprv sa pozrime na počet nôh. Nech $x$ určuje počet pavúkov a $y$ počet vážok a cikád spolu (majú rovnaký počet nôh). Teraz zo zadania vieme:

$$8x + 6y = 118$$
$$x + y = 18$$

Z druhej rovnice vyjadríme $y = 18 - x$ a dosadíme do prvej rovnice:

$$\begin{aligned} 8x + 6 \cdot (18 - x) &= 118 \\ 8x + 108 - 6x &= 118 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \implies y = 13 \end{aligned}$$

Vieme teda, že pavúkov je 5, stačí už len zistiť počet vážok a cikád. Vieme, že spolu ich je 13 a párov krídel majú spolu 20. Dostaneme dve rovnice, kde $a$ je počet vážok a $b$ je počet cikád:

$$a + b = 13$$
$$2a + b = 20$$

Z prvej rovnice vyjadríme $b = 13 - a$ a dosadíme do druhej:

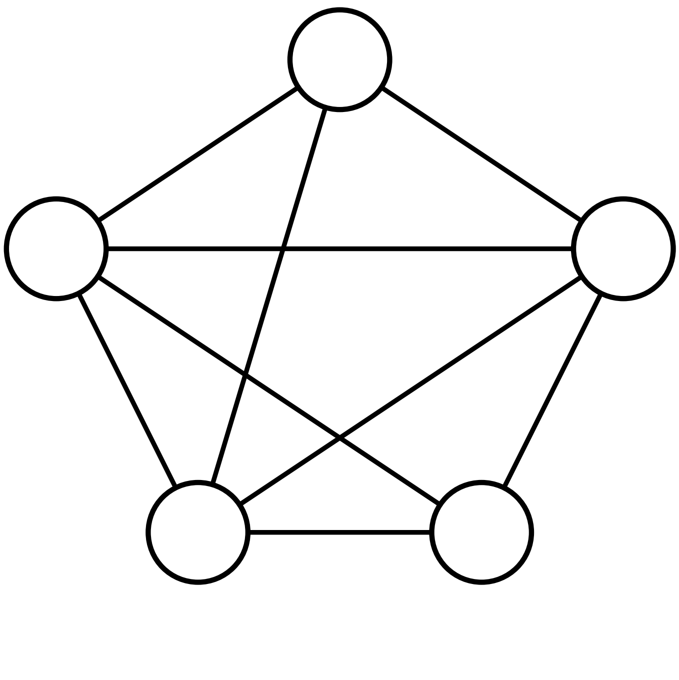
$$\begin{aligned} 2a + 13 - a &= 20 \\ a &= 7 \implies b = 6 \end{aligned}$$

Spolu je teda 5 pavúkov, 7 vážok a 6 cikád.

---

**Úloha 28:**

Koľkými spôsobmi vieme vpísať do kruhov písmená $L$, $A$, $K$, $Y$ tak, aby v žiadnych dvoch kruhoch, ktoré sú spojené čiarou, neboli rovnaké písmená?

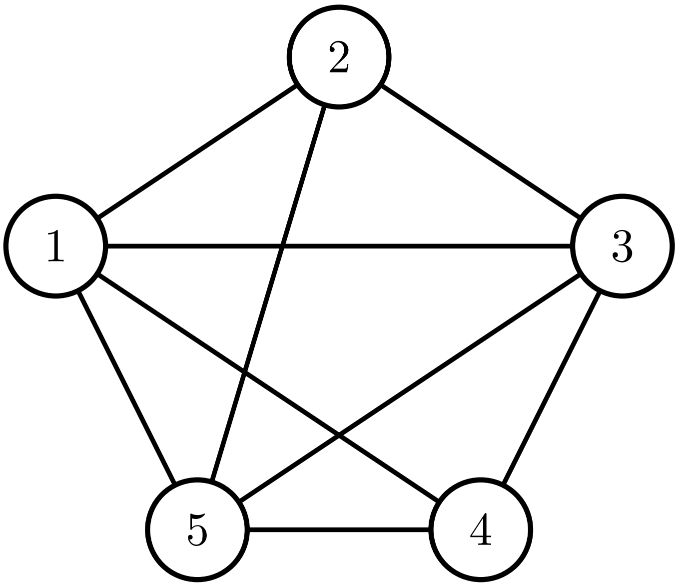


**Výsledok:**

24

**Riešenie:**

Očíslujme si políčka nasledovne:




Teraz si všimnime, že políčka 1, 2, 3 a 5 sú spojené navzájom, každé s každým, takže v nich musia byť rôzne písmená. Rovnako aj políčka 1, 3, 4 a 5. To znamená, že v políčkach 1, 3 a 5 musia byť rôzne písmená a v políčkach 2 a 4 bude to zvyšné. Je dôležité si uvedomiť, že každé takéto rozdelenie bude vyhovovať. To je ale jasné, pretože všetky písmená sú rôzne, až na tie v 2. a 4. políčku, ale tie nie sú spojené. Už len rozdelíme písmená. V políčku 1 máme 4 možnosti, v políčku 2 (a 4) máme už len 3 a potom v políčkach 3 a 5 máme 2 možnosti a 1 možnosť. Dokopy to je teda $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ možností.

---

**Úloha 29:**

Pred salónom je električková trať. Na nej premáva iba jedna linka s intervalom 2 minúty (tj. z oboch koncov vyrazí električka každé dve minúty od 8:00 do 20:00). Električkám trvá prejsť trasu 20 minút. Koľko električiek pôjde počas cesty oproti električke, ktorá vyrazí o 10:00?

**Výsledok:** 20

**Riešenie:**

Keďže električka vyráža až o 10:00, nejaké električky už budú na trati. Trasa trvá 20 minút a električky vyrážajú každé 2 minúty, čiže na trati je ich už 10 (v jednom smere) ktoré naša električka stretne. Počas jazdy našej električky v čase od 10:00 do 10:20 vyrazia ďalšie električky oproti našej a tých je tiež 10. Čiže stretne 10 už idúcich a 10, čo vyrazia za našej jazdy.

---

**Úloha 30:**

Kris spadol v strede jazera z nafukovačky. Laky sa naňho pozerá z brehu, ktorý má tvar priamky. Laky stojí 20 metrov od brehu a úsečka medzi ním a Krisom je kolmá na breh. Balo tiež stojí 20 metrov od brehu a 125 metrov od Lakyho. Krisa však nevidí, lebo mu zacláňa Dida, ktorá stojí priamo na brehu a od priesečníka úsečky od Krisa k Lakymu a brehu je vzdialená 100 metrov. Ako ďaleko je Kris od brehu?

**Výsledok:** 80 metrov

**Riešenie:**

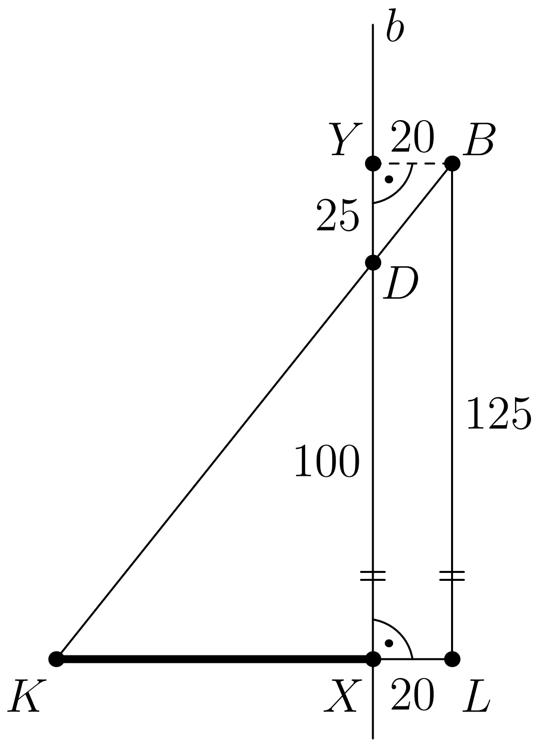
Nech breh je priamka $b$. Nech bod, na ktorom sa nachádza Laky, je $L$. Nech sa Kris nachádza na bode $K$. Vieme, že úsečka $KL$ je kolmá na priamku $b$. Priesečník priamky $b$ a úsečky $KL$ označme $X$. Laky stojí 20 metrov od brehu, a teda $|LX| = 20$ metrov. Balo stojí tiež na brehu, nech je to na bode $B$. Tento bod je rovnako vzdialený od priamky $b$ ako bod $L$, teda 20 metrov, čo teda robí z úsečky $LB$ rovnobežnú úsečku s priamkou $b$. Úsečka $LB$ je dlhá 125 metrov. Veďme kolmicu z bodu $B$ na priamku $b$ a priesečník označme $Y$. Vieme teda, že $|BY| = 20$ metrov. Keďže uhly $LXY$ a $BYX$ sú pravé a $|XL| = |YB|$, tak vieme, že $XYBL$ je obdĺžnik, z čoho plynie, že aj $|XY| = 125$ metrov.

Spravme úsečku $BK$. Dida sa nachádza na tejto úsečke, keďže Balo cez ňu na Krisa nevidí. Stojí priamo na brehu, a teda sa musí nachádzať na priesečníku priamky $b$ a úsečky $BK$, tento bod značme $D$. Potom platí, že $|XD| = 100$ metrov. Keďže $|XY| = 125$ metrov, potom vieme, že $|DY| = 25$ metrov.

Uhly $KDX$ a $BDY$ sú zhodné, keďže sú vrcholové. Potom vidíme, že trojuholníky $KDX$ a $BDY$ sú podobné podľa vety $uu$ (zhodný uhol pri vrchole $D$ a pravý uhol pri $X$, resp. $Y$). Potom platí, že vzájomné dvojice navzájom si priliehajúcich strán v trojuholníkoch majú rovnaký pomer. Nech vzdialenosť $|KX|$ je $x$. Potom platí, že $|DY| : |XD| = |BY| : |XK|$. Po prepísaní a dosadení dostávame:

$$\frac{|DY|}{|DX|} = \frac{|BY|}{|KX|}$$
$$\frac{25}{100} = \frac{20}{x}$$
$$x = 80$$

Dĺžka strany $XK$, a teda vzdialenosť Krisa od brehu je 80 metrov.




**Úloha 31:**

Kris nakreslil na papier štvorcovú sieť, kde každý štvorček mal stranu dlhú 1 cm. Štvorcová sieť mala 216 vrcholov a 175 štvorčekov. Aký je súčet dĺžok čiar, ktoré nakreslil?

**Výsledok:** 390 cm

**Riešenie:**

Najprv si treba uvedomiť, aký je vzťah medzi vrcholmi a štvorčekmi v štvorcovej sieti. Zoberme si jeden riadok. Prvé dva vrcholy ohraničujú prvý štvorček a potom každý ďalší vrchol vytvorí ďalší štvorček. To isté platí aj pre stĺpce. To znamená, že na ohraničenie štvorčekov v oboch rozmeroch potrebujeme o jeden vrchol viac, ako je tam štvorčekov. Inými slovami ak je v štvorcovej sieti $a \times b$ štvorčekov, tak vrcholov je $(a + 1) \times (b + 1)$.

Štvorčekov máme 175. Rozkladom na prvočísla zistíme, že $175 = 5 \cdot 5 \cdot 7$. Takže si toto číslo môžeme ako súčin dvoch deliteľov, čiže rozmerov $a \times b$, zapísať troma spôsobmi, a to $1 \times 175$, $5 \times 35$ a $7 \times 25$. Ku každému si vieme vypočítať počet vrcholov. Keby štvorčekov bolo $1 \times 175$, vrcholov by bolo $2 \cdot 176 = 352$. Keby štvorčekov bolo $5 \times 35$, vrcholov by bolo $6 \cdot 36 = 216$. Keby štvorčekov bolo $7 \times 25$, vrcholov by bolo $8 \cdot 26 = 208$. Vidíme, že jediná vyhovujúca možnosť rozmerov siete (v štvorčekoch) je $5 \times 35$.

V tom prípade Kris nakreslil 6 čiar dlhých 35 cm v jednom rozmere a 36 čiar dlhých 5 cm v druhom rozmere. To je dokopy $6 \cdot 35 + 36 \cdot 5 = 390\,\text{cm}$.

---

**Úloha 32:**

Kris nakreslil na papier pravidelný deväťuholník. Potom v ňom vyznačil všetky uhlopriečky. Koľko je na papieri rôznych dvojíc úsečiek, ktoré spájajú dva vrcholy deväťuholníka a nemajú žiaden spoločný bod?

**Výsledok:** 252

**Riešenie:**

Pokiaľ vyberieme štyri z deviatich vrcholov devätuholníka, tieto vrcholy nám jasne definujú štvoruholník. V tomto štvoruholníku budú dve dvojice protiľahlých strán, ktoré budú uhlopriečkami v deväťuholníku (pretože spájajú dva z jeho vrcholov) a nepretnú sa (pretože sú to protiľahlé strany v štvoruholníku). Potrebujeme teda zistiť, koľko rôznych štvoruholníkov sa nachádza v deväťuholníku.

Máme $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ možností, ako vybrať 4 vrcholy štvoruholníka z vrcholov deväťuholníka. Lenže toto sú možnosti, kde sú jednotlivé štvorice zarátané viackrát, pretože sme ich vrcholy vybrali v rôznom poradí. Počet možností, koľkými sme vybrali jednu štvoricu bodov je $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. To znamená, že počet možností, koľko štvoruholníkov existuje bez ohľadu na to, v akom poradí sme vyberali body, je $3024 : 24 = 126$. Toto je teda počet rôznych štvoruholníkov, ktoré sa nachádzajú v deväťuholníku. A tým, že každý štvoruholník je tvorený dvoma dvojicami protiľahlých strán, ktoré nemajú žiaden spoločný bod, tak takých dvojíc bude $126 \cdot 2 = 252$.

Tí z vás, ktorí už poznajú kombinačné čísla, si určite všimli, že počet rôznych štvoruholníkov odpovedá kombinačnému číslu $\binom{9}{4}$.

---

**Úloha 33:**

Diamant na Rezovej náušničke je pravidelný dvadsaťsten (teleso, ktoré má 20 zhodných stien v tvare rovnostranného trojuholníka). V strede každej steny vyznačíme bod a každé dva body, ktoré ležia na stenách so spoločnou hranou spojíme. Takto vzniknuté hrany budú tvoriť hrany nového telesa. Koľko má nové teleso stien?

**Výsledok:** 12

**Riešenie:**

Najprv poďme zistiť, aký tvar budú mať steny nového telesa. V dvadsaťstene sa v každom vrchole stretáva 5 trojuholníkových stien. Keby sa v každom vrchole stretávali tri trojuholníky, bol by to pravidelný štvorsten, keby sa stretávali 4, bol by to pravidelný osemsten a keby sa ich tam stretávalo 6, bol by to už rovinný útvar. A keďže sa ich tam stretáva 5, steny nového telesa budú päťuholníky.

Teraz sa pozrime na počet hrán nového telesa. Keďže trojuholník má tri strany, každá stena susedí s ďalšími troma, s ktorými ju spojíme hranou. Keď toto spravíme s každou stenou dvadsaťstena, vytvoríme $20 \cdot 3 = 60$ hrán. Takto sme však každú hranu zarátali dvakrát (z oboch smerov), takže to ešte musíme vydeliť dvoma. Nové teleso teda bude mať $60 \div 2 = 30$ hrán.

Každý päťuholník používa 5 hrán, ale každá hrana sa používa v dvoch päťuholníkoch. Preto ak počet hrán vynásobíme dvoma a vydelíme piatimi dostaneme počet stien. A teda nové teleso bude mať $30 \cdot 2 \div 5 = 12$ stien.

---

**Úloha 34:**

Kris hovorí Vincentovi o tom, koľko ho čaká budúci týždeň zákazníkov. Kris: „Mám menej ako 100 zákazníkov. Ak by som mal o dvoch zákazníkov menej, vedel by som ich rovnomerne rozdeliť na skupiny po troch aj na skupiny po piatich. Ak by som mal o troch zákazníkov viac, vedel by som ich rovnomerne rozdeliť na skupiny po desiatich.“ Vincent: „Stále neviem zistiť, koľko máš zákazníkov.“ Kris: „Zákazníkov viem rozdeliť na rovnomerné skupiny iba $n$ spôsobmi.“ Vincent: „Teraz už viem, koľko máš zákazníkov.“ Aké číslo povedal Kris namiesto $n$?

**Výsledok:** 4

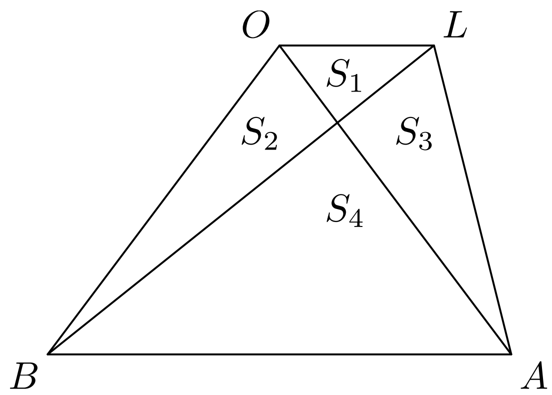
**Riešenie:**

Označme si počet zákazníkov $a$. Potom vieme, že $a+3$ je násobok desiatich, takže $a$ sa končí na cifru 7. $a - 2$ sa potom končí na cifru 5 a navyše je deliteľné tromi. Také čísla (menšie ako 100) sú iba 15, 45 a 75. To znamená, že $a$ môže byť už len 17, 47, alebo 77. Avšak 17 a 47 sú prvočísla a teda sa dajú rozdeliť iba dvoma spôsobmi, na kôpky po celom počte a po 1. Avšak 77 sa dá rozdeliť štyrmi spôsobmi - na skupiny po 77, 11, 7 a po 1. Takže ak by Kris povedal 2, tak by to Vincent nevedel jednoznačne určiť. Kris teda musel povedať číslo 4.

---

**Úloha 35:**

Lichobežník $BALO$ je rozdelený uhlopriečkami ako vidíme na obrázku. Vieme, že plocha $S_1$ je štyrikrát menšia ako plocha $S_2$. Koľkokrát je $S_4$ väčší ako $S_1$?




**Výsledok:** 16-krát

**Riešenie:**

Priesečník uhlopriečok $BL$ a $OA$ si označme $X$. Trojuholníky $BXO$ a $XLO$ sú súčasťou trojuholníka $BLO$ a teda ich výška na stranu $BL$ je rovnaká. Keďže pomer ich obsahov je $1 : 4$, tak to znamená, že úsečky $LX$ a $XB$, z ktorých sa skladá uhlopriečka $BL$, majú dĺžky v pomere $1 : 4$. Trojuholníky $LXO$ a $BAX$ sú podobné, lebo dvojice uhlov $LOA, BAO$ a $BLO, LBA$ sú striedavé. V podobnosti trojuholníkov $BAX$ a $LXO$ si strany $BX$ a $LX$ prislúchajú, a keďže ich dĺžky sú v pomere $4 : 1$, všetky strany (a výšky) trojuholníka $BAX$ sú štyrikrát dlhšie ako prislúchajúce strany trojuholníka $LOX$. Tým pádom teda obsah $S_4$ musí byť 16-krát väčší ako obsah $S_1$.

**Úloha 36:**

„Strojčekom“ čísla nazývame také číslo, ktoré keď rozdelíme na rôzne neprekrývajúce sa dvojice cifier, tak v každej dvojici prvá z cifier znamená počet výskytov druhej cifry z dvojice v pôvodnom čísle. Príklad: 2415 a 1524 sú „strojčekom“ 445, ale 141514 alebo 241524 nie sú. Nájdite najväčšie osemciferné číslo, ktoré je „strojčekom“ samého seba.

**Výsledok:** 33311918

**Riešenie:**

Všimnime si, že cifry na párnych pozíciách popisujú počty výskytov cifier v čísle, takže musia mať súčet osem. Na poradí dvojíc v čísle nezáleží, keďže ale hľadáme najväčšie možné čísla, usporiadame ich v nerastúcom poradí podľa prvej cifry. Číslo 8 vieme na súčet štyroch nerastúcich sčítancov rozdeliť nasledujúcimi spôsobmi: $5+1+1+1$, $4+2+1+1$, $3+3+1+1$, $3+2+2+1$, $2+2+2+2$. Prvý zo spôsobov môžeme vylúčiť, pretože cifry 1 a 5 sa vyskytnú na nepárnych pozíciách, čo znamená, že sa budú musieť vyskytnúť každá práve raz aj na niektorej párnej pozícii. Tým pádom by sme ale jednu z nich museli umiestniť do dvojice za jednotku, čo nemôžeme spraviť, lebo sa v čísle budú nachádzať viac ako raz. V druhom prípade musíme ešte do čísla na párne pozície umiestniť cifry 1, 2 a 4 a opäť by na jednu z nich pripadla jednotka v dvojici. V treťom prípade môžeme cifry 1 a 3 umiestniť do dvojice s trojkou. Na zvyšné dve miesta už môžeme umiestniť ľubovoľné iné cifry, zvolíme si cifry 9 a 8 aby sme našli čo najväčšie číslo. Výsledkom je teda číslo 33311918.

---

**Úloha 37:**

Laky našiel 2021 po sebe idúcich čísel, ktoré majú rovnaký súčet ako ďalších 2020 po sebe idúcich čísel. Aké je najmenšie z týchto čísel?

**Výsledok:** $2020^2 = 4080400$

**Riešenie:**

Hľadané číslo si označme $a$. Potom súčet prvých 2021 čísel je:

$$\begin{aligned} a+(a+1)+(a+2)+...+(a+2020) &= \\ 2021a+(1+2+3+2020) &= \\ 2021a+\frac{(2021\cdot 2020)}{2} & \end{aligned}$$

Súčet ďalších 2020 čísel je:

$$\begin{aligned} (a+2021)+(a+2022)+...+(a+4040) &= \\ 2020(a+2021)+\frac{2020\cdot 2019}{2} &= \\ 2020a+2021\cdot 2020+\frac{2020\cdot 2019}{2} & \end{aligned}$$

Teraz vieme, že tieto dve hodnoty sa rovnajú. Tak poďme upravovať:

$$\begin{aligned} 2021a+\frac{2020\cdot 2021}{2} &= 2020a+2021\cdot 2020+\frac{2020\cdot 2019}{2} \\ a &= \frac{2021\cdot 2020}{2}+\frac{2020\cdot 2019}{2} \\ a &= 2020\cdot\frac{2019+2021}{2} \\ a &= 2020\cdot 2020 \\ a &= 4080400 \end{aligned}$$

---

**Úloha 38:**

V salóne tvaru pologule je umiestnená skriňa tvaru kocky. Stred spodnej steny skrine a stred podlahy miestnosti sa prekrývajú. Horné vrcholy skrine sa dotýkajú povrchu pologule. Polomer pologule je 10. Je zostrojená úsečka od spodného rohu skrine po stred vrchnej steny skrine. Aká je dlhá táto úsečka?

**Výsledok:** 10

**Riešenie:**

Označme si spodný roh skrine, od ktorého ide zostrojená úsečka, ako bod A. Bod na vrchnej strane skrine priamo nad bodom A si označme B. Stred vrchnej steny skrine si označme C a stred spodnej steny skrine si označme D.

Zostrojená úsečka, ktorej dĺžku sa snažíme zistiť, teda AC, je uhlopriečkou obdĺžnika ABCD. Pozrime sa teraz na druhú uhlopriečku tohto obdĺžnika. Bod D je stred podlahy, čiže stred kruhu, ktorý je podstavou pologule. Bod B je horný roh skrine, takže leží na povrchu pologule. Uhlopriečka BD je tým pádom polomerom pologule, takže je dlhá 10. A keďže vieme, že uhlopriečky v obdĺžniku sú rovnako dlhé, tak aj úsečka AC, ktorej dĺžku chceme zistiť, je dlhá 10.

---

**Úloha 39:**

Nech $S_n$ je súčinom nenulových cifier čísla $n$. Zistite hodnotu výrazu $S_1 + S_2 + \cdots + S_{998} + S_{999}$.

**Výsledok:** $46^3 - 1$

**Riešenie:**

Všetky nuly si môžeme zameniť za jednotky a žiadna hodnota sa nezmení. Navyše si definujme $s_0 = s_1 = 1$. Teraz $s_0 + s_1 + ... + s_9 = 1 + 1 + 2 + 3 + ... + 9 = 46$. Teraz platí, že ak $s_a = x$, tak ak pred $a$ pripíšeme cifru $k$ a nové číslo označíme $b$, tak $s_b = k \cdot s_a$. Príklad: $s_{36} = 18$ a potom $s_{736} = 7 \cdot 18 = 126$. Takže keď poznáme súčet čísel $s_0$ až $s_9$, tak napríklad súčet čísel $s_{40}$ až $s_{49}$ vieme vypočítať jednoducho ako $4 \cdot 46$. Takto vieme vypočítať vlastne aj súčet čísel $s_0$ až $s_{99}$: $46 \cdot (1 + 1 + 2 + 3 + ... + 9) = 46 \cdot 46$. No a podobne vieme vypočítať aj súčet čísel $s_0$ až $s_{999}$: $46^2 \cdot (1 + 1 + 2 + 3 + ... + 9) = 46^3 = 97336$. No ešte musíme odčítať $s_0$, takže výsledok je 97335 ($46^3 - 1$).

---

**Úloha 40:**

Manažér salónu sa rozhodol zistiť, koľko zákazníkov ostrihajú za mesiac. Poradové čísla zákazníkov písal na papier, pričom všetky prvočísla, ktoré napísal, vzápätí preškrtol. Keď sa potom pozrel na čísla na papieri, všimol si 6 za sebou idúcich nepreškrtnutých čísel. Prvé z nich bolo deliteľné siedmimi a posledné z nich bolo deliteľné trinástimi. Koľko najmenej čísel mohol manažér napísať na papier?

**Výsledok:** 208

**Riešenie:**

Označme si prvé zo 6 za sebou idúcich čísel ako $x$. Potom vieme, že $x$ je deliteľné siedmimi. Ak je prvé číslo $x$, potom je šieste číslo $x + 5$. O čísle $x + 5$ vieme, že je deliteľné číslom 13. Uvedomme si jednu vec, a to takú, že keď od násobku čísla 7 odčítame alebo k nemu pričítame iný násobok čísla 7, dostaneme opäť násobok čísla 7. Rovnako to platí pre číslo 13. To znamená, že ak $x$ je násobkom čísla 7, potom ním je aj $x - 7$, $x + 7$, $x - 14$, $x + 14$, .... Podobne to bude fungovať aj pri čísle 13, a teda ak je $x + 5$ deliteľné číslom 13, tak ním bude deliteľné aj $(x + 5) - 13 = x - 8$, $(x + 5) + 13 = x + 18$, $(x + 5) - 26 = x - 21$, $(x + 5) + 26 = x + 31$, ....

Po tejto ukážke vidíme, že číslo $x - 21$ je deliteľné trinástimi. Keďže $x$ je deliteľné siedmimi a aj 21 je deliteľné siedmimi, aj číslo $x - 21$ bude deliteľné siedmimi. Z toho vyplýva, že číslo $x - 21$ je deliteľné aj siedmimi, aj trinástimi. Keďže 7 a 13 sú nesúdeliteľné čísla, $x - 21$ bude násobkom ich súčinu, a teda násobkom čísla $7 \cdot 13 = 91$.

Chceme zistiť, koľko najmenej čísel manažér napísal. Preto hľadáme najmenšie možné $x + 5$. Z toho plynie, že hľadáme čo najmenšie možné $x$. Chceme, aby $x - 21$ bolo násobkom 91. Najmenším násobkom tohoto čísla je 0. Ak $x - 21 = 0$, potom $x = 21$. Teraz potrebujeme overiť reťaz ďalších piatich čísel. Potrebujeme, aby to neboli prvočísla, keďže ani jedno z nich nie je preškrtnuté. Ak $x$ je 21, potom celá reťaz je 21, 22, 23, 24, 25, 26. Avšak číslo 23 je prvočíslom, a teda táto reťaz nie je tou, ktorú hľadáme.

Ďalším násobkom čísla 91 je 91. Ak $x - 21 = 91$, potom $x = 112$. Ak $x = 112$, potom reťaz 6 čísel je 112, 113, 114, 115, 116, 117. Po preskúšaní deliteľov čísla 113 prídeme na to, že aj 113 je prvočíslo. Táto reťaz teda tiež nie je tou, ktorú hľadáme.

Ďalším násobkom čísla 91 je 182. Ak $x - 21 = 182$, potom $x = 203$. Ak $x = 203$, potom reťaz 6 čísel je 203, 204, 205, 206, 207, 208. Po preskúšaní deliteľov všetkých čísel prídeme na to, že ani jedno z týchto čísel nie je prvočíslom ($203 = 7 \cdot 29$, $204 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17$, $205 = 5 \cdot 41$, $206 = 2 \cdot 103$, $207 = 3 \cdot 3 \cdot 23$, $208 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$). To znamená, že sme našli reťaz najmenších šiestich vyhovujúcich čísel. Keďže posledné číslo je 208, manažér musel napísať aspoň toľko čísel, a teda riešením je 208.

---

# Hádanky

---

**Hádanka 1:**

Lietam no nemám krídla, plačem no nemám oči, vidím keď sa stmieva, vidím keď sa brieždi.

**Výsledok:** Oblak, mrak

---

**Hádanka 2:**

Kto hovorí všetkými jazykmi, hoci sa ich neučil?

**Výsledok:** Ozvena

---

**Hádanka 3:**

Čo je čierne keď to dostanete, červené keď to používate a biele keď ste s tým hotoví?

**Výsledok:** Uhlie

---

**Hádanka 4:**

Po čiernej lúke biely kôň cvála,
na malé deti poslušne máva.
Beží rýchlo, dlho, ledva dych popadne,
až kým sa pomaly na prach nerozpadne.

**Výsledok:** Krieda

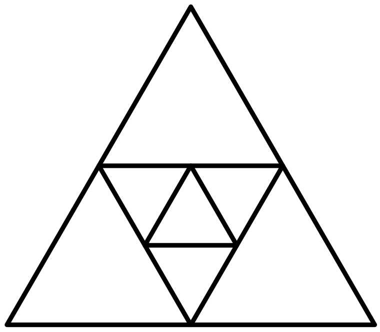
---

# Hlavolamy

**Hlavolam 1:**

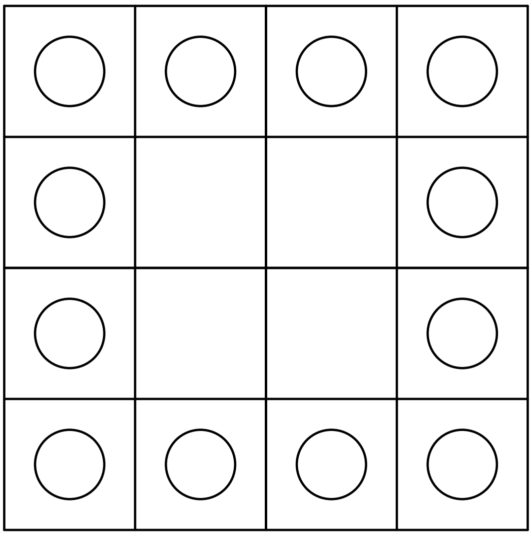
Rozdeľte rovnostranný trojuholník na 7 rovnostranných (nie nutne rovnako veľkých) trojuholníkov.

**Riešenie:**

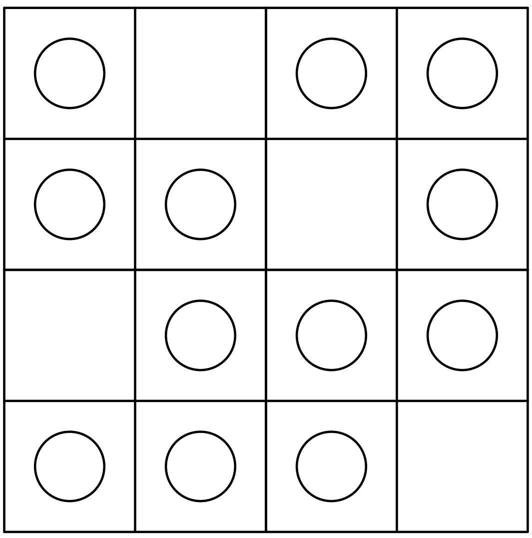


**Hlavolam 2:**

Vo štvorcovom poli je rozložených 12 krúžkov. Premiestnite 3 z nich na prázdne políčka tak, aby v každom riadku, stĺpci a uhlopriečkach boli práve 3 krúžky.

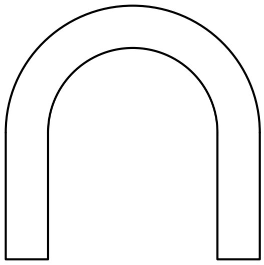


**Riešenie:**

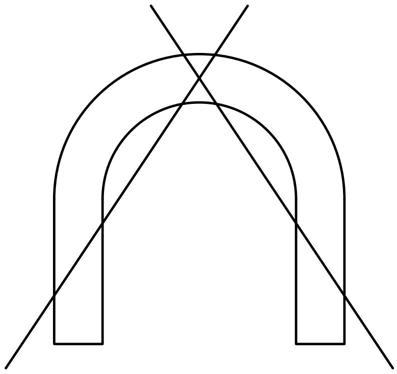


**Hlavolam 3:**

Rozdeľte podkovu dvoma rovnými rezmi na 6 častí.

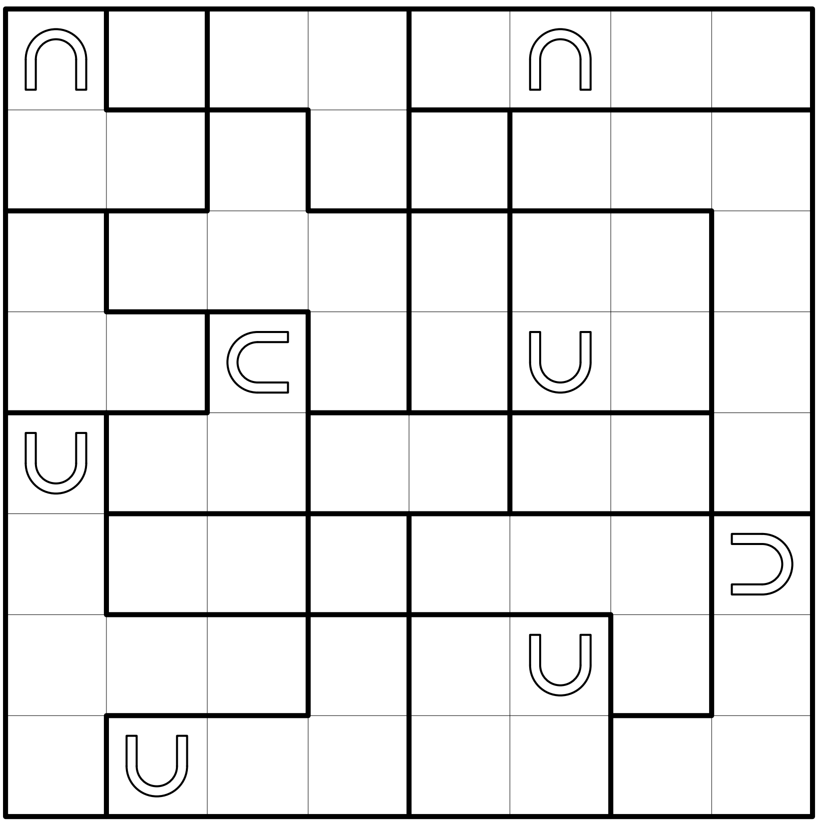


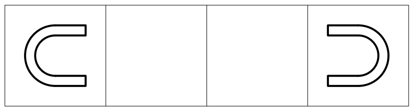
**Riešenie:**



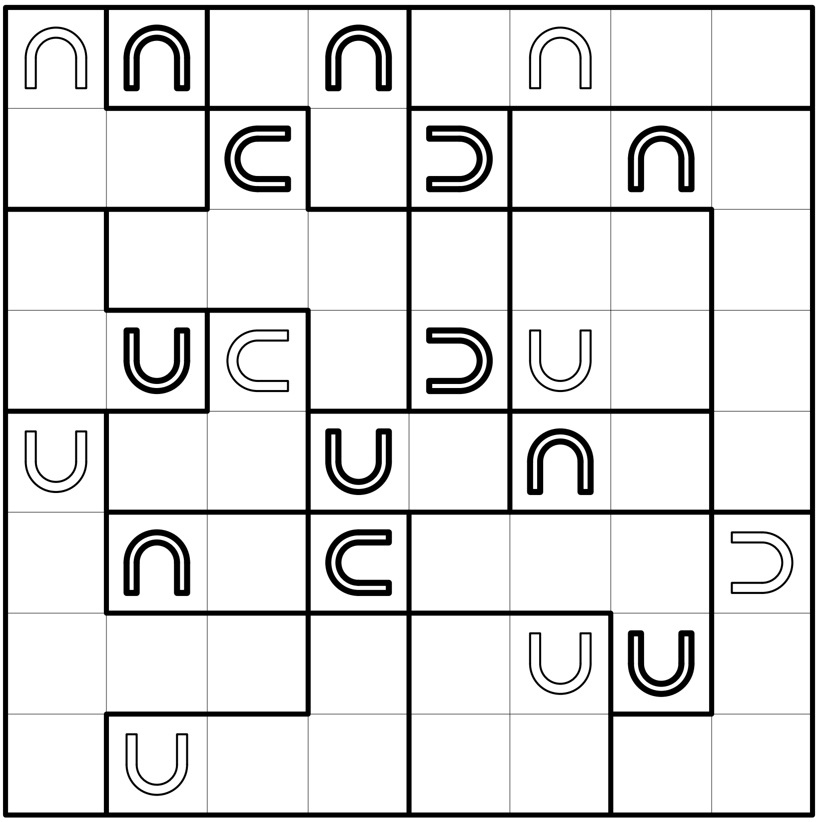
**Hlavolam 4:**

Do tabuľky doplňte magnety tak, aby v každej oblasti bol práve jeden magnet. Každý magnet musí byť súčasťou páru, čo znamená, že ku každému magnetu existuje iný magnet, ktorý ho priťahuje, čiže póly mieria oproti sebe. Medzi každými dvoma magnetmi páru musí byť aspoň jedno voľné políčko a medzi magnetmi nesmie byť žiaden iný magnet (viď druhý obrázok).





**Riešenie:**



# Lomihlav

Lomihlav je matematická súťaž organizovaná Združením STROM a Prírodovedeckou fakultou Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach pre žiakov základných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií. V roku 2019 sa koná už 19. ročník tejto súťaže.

Trvanie súťaže je magických 99 minút. Na začiatku každý tím dostane 6 matematických úloh a 1 bonus (vo forme hlavolamu alebo hádanky). Po úspešnom vyrátaní úlohy vymení tím úlohu za novú. Po každej pätici správne vyriešených úloh tím dostane jeden bonus (vo forme hlavolamu alebo hádanky). Bonus sa odovzdáva rovnako ako úloha, ale už zaň tím nedostáva novú úlohu, iba sa mu zarátavajú body.

Tímy získavajú body podľa ročníkov súťažiacich v tíme, a to podľa nasledovnej tabuľky:

| Ročník | | | | Správny výsledok | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. žiak | 2. žiak | 3. žiak | 4. žiak | úloha | bonus |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 3,80 | 2 |
| 7 | 7 | 7 | 8 | 3,70 | 2 |
| 7 | 7 | 7 | 9 | 3,60 | 2 |
| 7 | 7 | 8 | 8 | 3,60 | 2 |
| 7 | 7 | 8 | 9 | 3,50 | 2 |
| 7 | 7 | 9 | 9 | 3,40 | 2 |
| 7 | 8 | 8 | 8 | 3,50 | 2 |
| 7 | 8 | 8 | 9 | 3,40 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 9 | 3,30 | 2 |
| 7 | 9 | 9 | 9 | 3,20 | 2 |
| 8 | 8 | 8 | 8 | 3,40 | 2 |
| 8 | 8 | 8 | 9 | 3,30 | 2 |
| 8 | 8 | 9 | 9 | 3,20 | 2 |
| 8 | 9 | 9 | 9 | 3,10 | 2 |
| 9 | 9 | 9 | 9 | 3,00 | 2 |

Zadania starších ročníkov nájdete na `matik.strom.sk/lomihlav`.


| | |
|---|---|
| autori a recenzia: | Viktória Brezinová, Miriam Horvátová, Peter Kovács, Matúš Masrna, Lujza Milotová, Kristína Mišlanová, Daniel Onduš, Ján Richnavský, Martin Spišák, Timea Szöllősová |
| názov: | **Lomihlav – 29.4.2022** |
| vydávatelia: | Združenie STROM<br>Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta |
| web: | `matik.strom.sk/lomihlav`<br>`https://www.upjs.sk/prirodovedecka-fakulta/` |