



Lomihlav

Košice, 1.12.2023

Úlohy

Úloha 1:

Predavačka Nina má dĺžku kroku 3 a predavačka Katka má dĺžku kroku 2. Nina k pokladni prešla 40 krokov. Koľko krokov bude potrebovať Katka na to, aby prešla rovnakú vzdialenosť?

Výsledok: 60

Riešenie:

Ak má Nina dĺžku kroku 3, tak jej 40 krokov bude merať $40 \cdot 3 = 120$. Katka má prejsť dĺžku 120 krokom dĺžky 2, teda potrebuje $120/2 = 60$ krokov.

Úloha 2:

Vedúci prevádzky Peter si v utorok ráno odmeral rastlinku, ktorú má v kancelárii, a mala 5 cm. Cez deň vyrastie rastlinka o 3 cm a cez noc o 1 cm. V ktorý deň bude mať rastlinka 26 cm?

Výsledok: v nedeľu

Riešenie:

Cez deň narastie rastlinka 3 cm a počas noci narastie ešte 1 cm. Za celých 24 hodín teda narastie 4 cm. V utorok ráno má 5 cm, do 26 cm jej chýba 21 cm. 20 centimetrov narastie za 5 celých dní, teda v nedeľu ráno bude mať 25 cm a bude jej chýbať iba 1 cm do 26. Ten 1 cm narastie už počas nedele.

Úloha 3:

Počet jogurtov v chladiacom boxe je neznáme dvojciferné číslo s ciferným súčtom 10. Ak v tomto čísle vymeníme cifry na mieste desiatok a jednotiek, dostaneme číslo o 54 menšie. Koľko jogurtov je v chladiacom boxe?

Výsledok: 82

Riešenie:

Dvojciferné číslo tvoria desiatky a jednotky. Celkovo má dvojciferné číslo hodnotu súčtu číslice na mieste jednotiek a desaťnásobku číslice na mieste desiatok. Teda číslo zo zadania vieme zapísať ako $10a + b$. Ak vymeníme desiatky a jednotky, dostaneme $10b + a$, ktoré má byť o 54 menšie. Zapišeme si rovnicu, v ktorej od väčšieho čísla, čiže $10a + b$, odčítame $10b + a$, a vydelíme deviatimi:

$$(10a + b) - (10b + a) = 54$$

$$9a - 9b = 54$$

$$a - b = 6$$

Zároveň zo zadania vieme, že súčet $a + b$ je rovný 10. Takže hľadáme také dve cifry, ktorých súčet je 10 a rozdiel 6. Taká možnosť je len jedna, a to $a = 8$ a $b = 2$. V chladiacom boxe bolo teda 82 jogurtov.

Úloha 4:

Skladník Lubo má na sklade kukuricové, fazuľové a hrachové konzervy. Konzervy všetkých druhov môžu byť malé alebo veľké. Koľko možností na postavenie veže z konzerv má Lubo, ak chce, aby vežu tvorili práve 4 konzervy a všetky boli rôzne?

Výsledok: 360

Riešenie:

Máme dokopy 6 konzerv, ktoré chceme uložiť na 4 miesta vo veži. Na prvé miesto môže Lubo uložiť hociktorú zo šiestich konzerv, má teda 6 možností. Na druhé miesto už môže uložiť len jednu zo zvyšných 5 konzerv, pre tento výber má 5 možností. Na tretie miesto môže uložiť len jednu zo zostávajúcich 4 konzerv, má 4 možnosti. Pri poslednom mieste zostali 3 konzervy, preto má 3 možnosti. Možností na postavenie veže z konzerv má Lubo teda $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Úloha 5:

Mäsiar Mihál označil 4 nátierky 4 rôznymi farbami – oranžovou, zelenou, bielou a modrou. Na každej nátierke je napísaná jedna cifra. Keď Mihál vynásobí cifru na zelenej nátierke s cifrou na bielej nátierke, tak dostane cifru, ktorá je na zelenej nátierke. Na modrej nátierke je tá istá cifra ako na oranžovej nátierke. Keď Mihál vynásobí cifru na oranžovej nátierke s cifrou na modrej nátierke, tak dostane dvojciferné číslo, ktoré je zložené z cifier na zelenej a bielej nátierke v tomto poradí. Aká cifra je na ktorej nátierke?

Výsledok: oranžová 9, modrá 9, zelená 8, biela 1

Riešenie:

Najskôr si označíme cifry na nátierkach písmenkami o, z, b, m . Teraz si prepíšeme zadanie do týchto tvarov. Ako prvé $z \cdot b = z$ a $z > 0$, lebo číslo zložené zo z a b v tomto poradí je dvojciferné. Z tohto vyplýva, že $b = 1$ (keďže z sa nezmenilo a nenulové číslo sa nezmení iba v prípade, ak sa vynásobí číslom 1). Z ďalšej vety vyplýva, že $m = o$. A posledný zápis $o \cdot m = \overline{zb}$ (zápis s nadčiarknutím znamená, že je to dvojciferné číslo, v ktorom z je na mieste desiatok a b na mieste jednotiek, teda písmenká predstavujú jednotlivé cifry) si vieme upraviť podľa predošlých zistení na $o \cdot o = \overline{z1}$ a teraz si postupne skontrolujeme súčin rovnakých cifier $1 \cdot 1, 2 \cdot 2, \dots, 9 \cdot 9$ a zistíme, že taký súčin dáva jedine $9 \cdot 9 = 81$. A o (aj m) je teda 9. To znamená, že čísla na nátierkach sú $o = 9, m = 9, z = 8, b = 1$.

Úloha 6:

Do supermarketu Lomoš dnes ráno dorazili syry. Tie majú tvar pravouhlého trojuholníka, v ktorom je súčet veľkosti najväčšieho vnútorného uhla s veľkosťou najmenšieho vnútorného uhla o 50° väčší než veľkosť zvyšného vnútorného uhla. Akú veľkosť má najmenší vnútorný uhol v tomto trojuholníku?

Výsledok: 25°

Riešenie:

Vieme, že veľkosť najväčšieho uhla v pravouhlom trojuholníku je určite 90 stupňov. Ak by to tak nebolo, tak by neplatilo, že súčet uhlov v trojuholníku je 180 stupňov, pretože $90 + \text{niečo väčšie ako } 90$ už dokopy dáva viac ako 180 .

Rozdelme si uhly v trojuholníku na dve skupiny podľa zadania. Prvú skupinu bude tvoriť najväčší a najmenší uhol v trojuholníku a druhú skupinu bude tvoriť zvyšný uhol v trojuholníku. Vieme, že súčet uhlov v trojuholníku je 180 stupňov, teda aj súčet uhlov týchto skupín bude 180 . Vieme, že súčet uhlov prvej skupiny je o 50 stupňov väčší ako súčet uhlov druhej skupiny. To znamená, že ak od ich spoločného súčtu, 180 stupňov, odrátame 50 stupňov, dostaneme zvyšok, ktorý je medzi skupinami rozdelený rovnomerne. Dostaneme $130/2 = 65$ ako veľkosť druhej skupiny, a tak veľkosť prvej skupiny je $65 + 50 = 115$ stupňov.

Veľkosť najmenšieho uhla v trojuholníku už dorátame jednoducho odčítaním najväčšieho uhla od prvej skupiny. Je to $115 - 90 = 25$ stupňov.

Úloha 7:

V supermarkete Lomoš stojí 16 lízaniek toľko eur, koľko lízaniek možno kúpiť za jedno euro. Koľko eur stojí jedna lízanka?

Výsledok: 1/4 eura

Riešenie:

Označme si cenu za 16 lízaniek ako x . Potom vieme, že za 1 € vieme kúpiť x lízaniek. To znamená, že za 2 € dostaneme $2 \cdot x$ lízaniek, za 3 € dostaneme $3 \cdot x$ lízaniek, ..., za x € dostaneme $x \cdot x$ lízaniek. Vieme však, že sme si označili, že za x € vieme dostať 16 lízaniek, a preto $16 = x \cdot x$. Z toho už vieme určiť, že x musí byť 4 (iné číslo nám po vynásobení samým sebou nedá 16). 4 € je cena za 16 lízaniek, preto cena za jednu lízanku bude $4/16 = 1/4$ eura alebo 0,25 €.

Úloha 8:

Predavačka Janka hodila trikrát po sebe spravodlivou mincou (to je taká minca, ktorá na obe svoje strany padne s rovnakou pravdepodobnosťou). Aká je pravdepodobnosť, že aspoň dva po sebe idúce hody boli hlava?

Výsledok: 3/8

Riešenie:

Pravdepodobnosť vypočítame ako počet vyhovujúcich možností vydelený počtom všetkých možností. Keďže hádzeme trikrát a na každý hod máme 2 rovnako pravdepodobné možnosti, ako môže dopadnúť, celkovo je $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ rôznych hodov a každý z nich je rovnako pravdepodobný. Konkrétne sú to tieto hody: HHH, HHZ, HZH, HZZ, ZHH, ZHZ, ZZH, ZZZ. Vidíme, že dve po sebe idúce hlavy sú iba v troch: HHH, HHZ, ZHH. Výsledná pravdepodobnosť je preto 3/8.

Úloha 9:

Palindróm je číslo, ktoré sa číta rovnako spredu i zozadu. Suma, ktorú za nákup zaplatil Šmili, mala hodnotu najmenšieho palindrómu väčšieho ako 2023202, a suma, ktorú zaplatil Tomáš, mala hodnotu najväčšieho palindrómu menšieho ako 2023202. Koľko spolu zaplatili za nákupy?

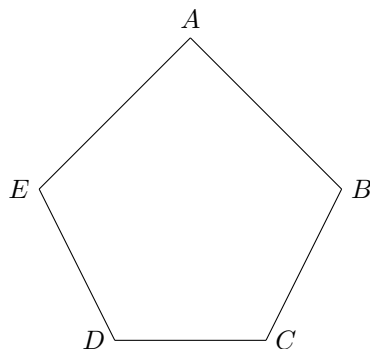
Výsledok: 4046404

Riešenie:

Pozrime sa na Šmiliho zaplatenú sumu. Potrebujeme zväčšiť číslo 2023202 o čo najmenej. Všimnime si, že ak ho zväčšíme o 1, tak zväčšíme poslednú cifru o 1, a teda musíme zväčšiť aj prvú cifru o 1, aby to stále bol palindróm. Teda by sme ho museli zväčšili o 1000001 (alebo o násobok 1000001, keby sme poslednú cifru nezväčšili o 1, ale o viac). Rovnako to funguje aj keď zväčšíme desiatkovú alebo stovkovú cifru, zväčšili by sme číslo o 100010 alebo 10100. Keď zväčšíme prostrednú cifru, teda cifru na mieste tisícok, tak už nemusíme meniť nič na to, aby číslo ostalo palindrómom. Teda takto by sme číslo zväčšili o 1000, čo je teda aj najmenej, ako vieme. Teraz sa pozrime na Tomášov nákup. Platí to isté, čo predtým, a teda aj tu je 1000 to najmenej, o čo to môžeme zmenšiť, aby číslo ostalo palindrómom. Teda súčet týchto dvoch čísel je $2023202 \cdot 2 + 1000 - 1000 = 4046404$, čo je zároveň výsledná cena zaplatená v súčte za nákupy.

Úloha 10:

Na ovocnom oddelení dnes ráno vyložili zvlášť ananásy tvaru päťuholníka $ABCDE$ (ako na obrázku), pričom platí, že veľkosť uhla EAB je 40° a dvojice uhlov ABC , AED a BCD , EDC sú rovnako veľké. Vypočítaj súčet veľkostí uhlov ABC a BCD .



Výsledok: 250°

Riešenie:

Súčet vnútorných uhlov v konvexnom n -uholníku je $180 \cdot (n - 2)^\circ$, kde n predstavuje počet vrcholov n -uholníka. Súčet vnútorných uhlov v konvexnom 5-uholníku je preto 540° . Piaty uhol poznáme, $|\sphericalangle EAB| = 40^\circ$, súčet zvyšných štyroch uhlov bude $540^\circ - 40^\circ = 500^\circ$.

Zo zadania vieme, že $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle AED|$ a $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle EDC|$. Všimnime si, že keď ich rozdelíme na dvojice $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD$ a $\sphericalangle AED + \sphericalangle EDC$, tak tieto dvojice uhlov budú mať zhodnú veľkosť. Súčet uhlov v každej nami vytvorenej dvojici bude teda polovica z celkového súčtu týchto zvyšných štyroch uhlov, $500^\circ / 2 = 250^\circ$. Keďže jedna z vytvorených dvojíc predstavuje hľadanú dvojicu uhlov zo zadania, súčet veľkostí uhlov $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle BCD$ je 250° .

Úloha 11:

Supermarket Lomoš usporiadal kvíz pre svojich zákazníkov. Na konci dostal každý svoje skóre v tvare zlomku, kde v čitateli bol počet správne zodpovedaných otázok a v menovateli počet všetkých otázok. Zákazník Šmili svoj zlomok nedostal. Ale vie, že správne zodpovedal o 3 otázky menej ako zákazník Tomáš a že Tomáš sám mal zle iba 3 otázky. Šmili neskôr v rebríčku na stránke zistil, že jeho zlomok bol rovný $1/2$. Čomu bol rovný Tomášov zlomok?

Výsledok: $3/4$

Riešenie:

Vieme, že Tomáš zle zodpovedal iba 3 otázky a Šmili mal o 3 nesprávne odpovede viac. Teda spolu mal Šmili 6 otázok nesprávne, čo ale musí byť polovica, aby jeho zlomok bol rovný $1/2$. Z toho vyplýva, že otázok je 12. A ak mal Tomáš 3 zle zodpovedané otázky, tak jeho zlomok bude rovný $9/12$. To sa ešte dá zjednodušiť na $3/4$.

Úloha 12:

Počas špeciálneho týždňa sa v supermarkete Lomoš dajú zakúpiť aj korytnačky a papagáje. Pozreli sa na nich SBSkár Štefi a skladník Ľubo. Štefi vraví: „Je tu 16 zvieracích hláv. Taktiež tu je 58 zvieracích nôh.“ Ľubo odpovedá: „Je tu 14 zvieracích hláv. Taktiež tu je 44 zvieracích nôh.“ Vieme, že každý z nich povedal v svojom výroku práve jednu pravdu a práve jednu lož. Koľko je v supermarkete papagájov a koľko korytnačiek?

Výsledok: 10 papagájov, 6 korytnačiek

Riešenie:

Označme si počet korytnačiek ako k a počet papagájov ako p . Potom počet nôh korytnačiek bude $4k$ a počet nôh papagájov $2p$. Keďže každý z nich povedal práve jednu pravdu a práve jednu lož, existujú dve možnosti, koľko nôh a koľko hláv majú zvieratká. Prvou je 16 hláv a 44 nôh a druhou 14 hláv a 58 nôh. Pozrime sa najprv na prvú možnosť. Zostavíme si 2 rovnice, prvú na počet hláv a druhú na počet nôh zvieratiek:

$$\begin{aligned}k + p &= 16 \\4k + 2p &= 44\end{aligned}$$

Prvú rovnicu vynásobíme dvomi:

$$2k + 2p = 32$$

$$4k + 2p = 44$$

Vidíme, že môžeme odčítať prvú rovnicu od druhej:

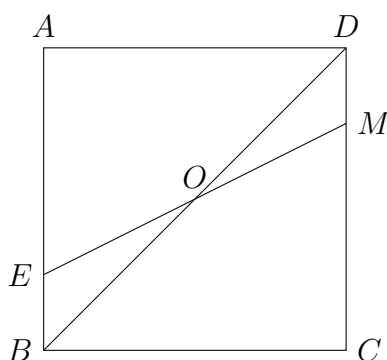
$$4k - 2k + 2p - 2p = 44 - 32$$

$$2k = 12$$

Zistili sme, že korytnačiek je 6, teda papagájov je 10. Dokopy majú $6 + 10 = 16$ hláv a $6 \cdot 4 + 10 \cdot 2 = 44$ nôh. Táto možnosť vyhovuje. Pozrime sa teraz na druhú možnosť. Maximálny počet nôh pri 14 hlávach, čiže 14 zvieratkách je $14 \cdot 4$, čo je 52, ale my potrebujeme dostať 58 nôh. Druhá možnosť preto nevyhovuje. Úloha má teda len jedno riešenie, a to, že v supermarkete je 6 korytnačiek a 10 papagájov.

Úloha 13:

Krabica bonboniéry v akcii má tvar štvorca $ABCD$ ako na obrázku, pričom platí, že veľkosť uhla OEA je 60° a bod O leží na priesečníku uhlopriečky BD a úsečky EM . Akú veľkosť má uhol DOM ?



Výsledok: 15°

Riešenie:

Najskôr sa pozrime na štvoruholník $OEAD$, v ktorom poznáme veľkosti troch uhlov zo štyroch ($OEA = 60^\circ$ zo zadania, $EAD = 90^\circ$, pretože je to jeden z vnútorných uhlov štvorca, a uhol $ADO = 45^\circ$, pretože uhlopriečka rozdeľuje uhol v štvorci na polovicu). Teraz si dopočítajme posledný uhol štvoruholníka ako $EOD = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 165^\circ$. Keďže uhol EOD je susedný k uhlu DOM , tak uhol DOM si môžeme vypočítať ako $180^\circ - 165^\circ = 15^\circ$.

Úloha 14:

Počas obednej prestávky povedala predavačka Katka pekárovi Michalovi o svojej rodine toto: „Členovia mojej rodiny majú spolu 73 rokov. Platí, že otec je o 3 roky starší od mamy, dcéra je od syna staršia o 2 roky a zároveň pred 4 rokmi bol súčet vekov členov rodiny 58 rokov.“ Koľko rokov majú jednotliví členovia Katkinej rodiny?

Výsledok: otec 34, mama 31, dcéra 5, syn 3

Riešenie:

Najskôr sa pozrime na rozdiel súčtu vekov členov rodiny teraz a pred 4 rokmi. Zistíme, že rozdiel je $73 - 58 = 15$ rokov, čo si vieme zapísať aj ako $3 \cdot 4 + 1 \cdot 3$, čo ukazuje, že 3 členovia rodiny zostarli o 4 roky, ale jeden iba o 3 roky. To znamená, že najmladší člen rodiny sa narodil až po zadanom súčte spred 4 rokov. Keďže dcéra je od syna staršia, najmladší člen je syn, a teda má 3 roky. Dcéra má

tým pádom $3 + 2 = 5$ rokov. Rodičia majú dokopy $73 - (5 + 3) = 65$ rokov. Keďže otec je o tri roky starší ako mama, mama bude mať $(65 - 3)/2 = 31$ rokov, a teda otec má $31 + 3 = 34$ rokov.

Úloha 15:

SBSkár Štefi chcel na noc zamknúť supermarket Lomoš, ale zabudol bezpečnostný kód. Pamätá si ale, že je to najmenšie trojciferné číslo také, že ak ho napíšeme odzadu a sčítame s pôvodným číslom, budú všetky cifry výsledného čísla nepárne. Aký je v Lomoši bezpečnostný kód?

Výsledok: 209

Riešenie:

Označme cifry hľadaného trojciferného čísla a , b a c . Keďže cifra a označuje cifru na mieste stovák, cifra b cifru na mieste desiatok a cifra c na mieste jednotiek, vieme toto trojciferné číslo napísať ako $100a + 10b + c$, kým napísané odzadu má hodnotu $100c + 10b + a$. Ich súčet je teda $100a + 10b + c + 100c + 10b + a$, čo nám po úprave dáva $100(a + c) + 20b + a + c$.

Uvedomme si, že súčet $a + c$ musí byť dvojciferný, pretože ak by nebol, jediný sčítanec, ktorý by mal efekt na pozíciu desiatok, by bol $20b$, teda by na mieste desiatok bolo párne číslo.

Zároveň $a + c$ je jediný sčítanec ovplyvňujúci jednotkovú cifru súčtu, teda musí byť nepárny. Naše možnosti pre tento súčet sú teda nepárne dvojciferné čísla menšie ako 18, teda 11, 13, 15 a 17. Chceme, aby v pôvodnom kóde bola cifra na mieste stovák čo najmenšia, keďže tá najviac ovplyvňuje veľkosť tohto kódu a my hľadáme najmenší možný kód.

Číslo 11 sa dá ako súčet cifier zapísať ako $2 + 9$, $3 + 8$, $4 + 7$ alebo $5 + 6$. Číslo 13 sa dá ako súčet cifier zapísať ako $4 + 9$, $5 + 8$ alebo $6 + 7$. Číslo 15 sa dá ako súčet cifier zapísať ako $6 + 9$ alebo $7 + 8$. Číslo 17 sa dá zapísať iba ako $8 + 9$. Z nich zjavne zvolíme $2 + 9$, keďže to nám ako jediné ponúka najmenšiu cifru na miesto stovák (žiaden zo súčtov nám neponúka cifru 1). Teda $a = 2$, $c = 9$.

Najmenšiu hodnotu, akú môže cifra b nadobudnúť, je 0, pre ktorú súčet $209 + 902 = 1111$ spĺňa podmienky zo zadania. Bezpečnostný kód v Lomoši je preto 209.

Úloha 16:

Pekár Michal má na rúre digitálne hodiny. Vždy, keď cifry na týchto hodinách vytvoria uzatvorené oblasti (štvorce a obdĺžniky), ktoré majú dokopy súčet obsahov 9, dá Michal piecť ďalšiu várku rožkov (napr. v čase 02:08 vzniknú 3 obdĺžniky a 2 štvorce, teda súčet ich obsahov je 8). Koľko várok rožkov dá Michal počas dňa piecť, ak vieme, že jedna palička v cifre je dlhá 1?

Výsledok: 4

Riešenie:

Rozoberme najprv, aký je súčet obsahov uzatvorených útvarov v jednotlivých cifrách.

- Cifry 1, 2, 3, 4, 5 a 7 nevytvárajú žiaden uzavretý útvar, teda súčet ich obsahov je 0.
- Cifry 6 a 9 vytvárajú uzavretý štvorec 1×1 s obsahom 1.
- Cifra 0 vytvára uzavretý obdĺžnik 1×2 s obsahom 2.
- Cifra 8 vytvára dva uzavreté štvorce s obsahom 1 a jeden obdĺžnik s obsahom 2, teda dokopy obsah 4.

Uvažujme, koľkokrát musí byť použitá cifra 8, aby bol súčet všetkých obsahov 9. Ak ju nepoužijeme ani raz, najväčší celkový súčet, aký vieme dosiahnuť, je $2 + 2 + 2 + 2 = 8$, keď sú na hodinách iba nuly. To ale nie je dosť, preto vždy, keď je na hodinách súčet obsahov 9, musí tam byť aspoň jedna cifra 8. Zároveň vieme, že nemôže byť použitá trikrát alebo štyrikrát, lebo vtedy by bol súčet uzavretých obsahov aspoň 3×4 alebo 4×4 , čo je viac ako 9.

Keď je cifra 8 použitá práve dvakrát, už máme dokopy obsah $4 + 4 = 8$ a do 9 nám chýba 1. Preto musíme použiť práve jednu cifru s obsahom 1 a jednu s obsahom 0. Na hodinky ale nemôžeme cifry

umiestňovať ľubovoľne. Na mieste desiatok pre minúty môže byť najviac cifra 5 a na mieste desiatok pre hodiny najviac cifra 2. Obe cifry 8 teda musia byť na mieste jednotiek (jedna v minútach, jedna v hodinách). Aby súčet obsahov doplnili do 9, musíme použiť na jedno miesto desiatok cifru s obsahom 0 a na druhé miesto desiatok cifru s obsahom 1, teda 6 alebo 9. Cifry 6 a 9 ale nemôžu byť na mieste desiatok, teda s dvomi osmičkami sa nedá vyskladať čas s obsahom 9.

Keď použijeme len jednu, chýba nám do celkového obsahu 9 ešte 5. Súčet 5 tromi ciframi ide dosiahnuť len jedným spôsobom, a to dvoma ciframi s obsahom 2 a jednou s obsahom 1. Máme teda cifry 8, 0, 0 a 6 alebo 9. Vidíme, že na mieste desiatok v minútach aj hodinách z nich môžu byť len cifry 0. Ďalej môžeme cifru 8 umiestniť na ľubovoľnú z dvoch zvyšných pozícií a na poslednú pozíciu umiestníme cifru 6 alebo 9. 2 možnosti, kam umiestniť osmičku, krát 2 možnosti, ktorú cifru k nej pridať, nám dáva 4 možnosti, konkrétne 06:08, 08:06, 08:09 a 09:08. Keďže sme rozobrali všetky možné počty osmičiek na hodinkách, tak vieme, že iné možnosti neexistujú.

Úloha 17:

Skladník Lubo robil inventúru a na prvý papier si napísal 5 rôznych dvojčiferných čísel. Potom každú dvojicu čísel spočítal a výsledok napísal na druhý papier. Spolu tak na druhý papier napísal 10 čísel, o ktorých vieme, že boli opäť všetky rôzne, najväčšie z nich bolo 32 a druhé najmenšie z nich bolo 23. Ktorých 5 čísel si Lubo pôvodne napísal na prvý papier?

Výsledok: 10, 12, 13, 14, 18

Riešenie:

Na druhom papieri sa nachádza práve jedno číslo menšie ako 23. Najmenší možný súčet dvoch rôznych dvojčiferných čísel je 21 ($10 + 11$), preto vieme povedať, že na druhom papieri sa musí nachádzať buď číslo 21, alebo číslo 22. Pre obe tieto čísla máme iba jeden spôsob, ako ich zapísať súčtom dvoch rôznych dvojčiferných čísel. Konkrétne je to pre 21 súčet $10 + 11$ a pre 22 súčet $10 + 12$. Vieme teda povedať, že Lubo si na prvý papier musel zapísať číslo 10 a ešte práve jedno z čísel 11 a 12 (nemohol si zapísať obe, pretože potom by 23 bol až tretí najmenší súčet). Na súčet 23 máme dve možnosti: $10 + 13$ a $11 + 12$. Keďže na prvom papieri nemôže byť 11 a 12 zároveň, tak to nemôže byť druhá možnosť, a teda na papieri musí byť číslo 13.

Pozrime sa teraz na druhú podmienku. Najväčší súčet dostaneme tak, že sčítame dve najväčšie čísla na prvom papieri. Vieme, že na prvom papieri sa určite nachádzajú čísla 10, 13 a jedno číslo z dvojice 11 a 12. Keďže menšie dvojčiferné číslo ako 10 neexistuje, tak zvyšné dve čísla musia byť určite väčšie ako 13 a, keďže to budú dve najväčšie čísla, tak ich súčet bude 32. Na to máme dve možnosti, a to $14 + 18$ a $15 + 17$. Na to, aké čísla si mohol zapísať Lubo na papier teda máme 4 možnosti. Všetkých 10 čísel na druhom papieri musí byť rôznych. Pozrime sa na to, ktorá päťica to spĺňa:

- 10, 11, 13, 15, 17. Tu $11 + 17 = 13 + 15$, a teda táto možnosť to nemôže byť.
- 10, 12, 13, 15, 17. Tu $12 + 15 = 10 + 17$, a teda táto možnosť to nemôže byť.
- 10, 11, 13, 14, 18. Tu $11 + 13 = 10 + 14$, a teda táto možnosť to nemôže byť.
- 10, 12, 13, 14, 18. Tu je naozaj všetkých 10 súčtov rôznych. Konkrétne sú to čísla 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32.

Na prvý papier si teda Lubo zapísal čísla 10, 12, 13, 14, 18.

Úloha 18:

Jankina pokladňa sa pokazila a tlačí iba bločky s poradovým číslom, ktoré je trojčiferné a deliteľné 9 a neobsahuje cifry 0, 3, 6 alebo 9. Koľko rôznych bločkov vie pokazená pokladňa vytlačiť?

Výsledok: 18

Riešenie:

Číslo je deliteľné deviatimi práve vtedy, keď je jeho ciferný súčet deliteľný deviatimi. Ak je ciferný súčet deliteľný deviatimi, tak je deliteľný aj tromi. Pozrime sa, aké zvyšky po delení tromi môžu

mať jednotlivé cifry. Nemôžeme použiť cifry 0, 3, 6 a 9, čo sú všetky cifry, ktoré majú zvyšok 0 po delení tromi. Použiť teda môžeme len cifry, ktoré majú zvyšok 1 alebo 2 po delení tromi. Ak by jedna cifra v našom čísle mala zvyšok 1 a druhá zvyšok 2, znamenalo by to, že ich súčet má zvyšok 0 po delení tromi. Teda tretia cifra by musela mať zvyšok 0, aby bol ciferný súčet deliteľný tromi. Cifru so zvyškom 0 ale použiť nemôžeme, preto v každom čísle musia všetky tri cifry dávať rovnaký zvyšok po delení tromi.

Ak by boli všetky tri cifry rôzne, tak máme len 2 možnosti na trojicu cifier: 1, 4, 7 alebo 2, 5, 8. Ani v jednej z týchto možností ale nie je ciferný súčet deliteľný deviatimi. Preto v čísle musia byť aspoň dve cifry rovnaké. Vyskúšaním si môžeme overiť, že ani jedno číslo zložené z troch rovnakých cifier, ktoré nie sú 0, 3, 6 alebo 9, nie je deliteľné deviatimi. Teda naše číslo musí obsahovať dve rovnaké a jednu inú cifru.

Vieme si vyskúšať, že pre každú dvojicu rovnakých cifier (dokopy ich je 6) máme iba jednu možnosť ako doplniť tretiu cifru tak, aby bol ich súčet deliteľný 9. Dostaneme teda 6 rôznych trojíc cifier, ktoré vyhovujú zadaniu (117, 225, 441, 558, 774, 882). V každej trojici ale môžeme preusporiadať cifry do ľubovoľného poradia. V každej trojici máme dve rovnaké cifry a tretiu inú. Tú tretiu vieme umiestniť na tri rôzne miesta v trojicifernom čísle, a keďže sú tie zvyšné dve cifry rovnaké, tak pre jedno umiestnenie tretej cifry máme iba jednu možnosť ako umiestniť zvyšné dve cifry. Rôzne preusporiadania jednej trojice teda budú 3. Dokopy preto vieme vytvoriť $6 \cdot 3 = 18$ rôznych čísel.

Úloha 19:

70% zákazníkov supermarketu Lomoš tu rado nakupuje drogériu, 75% zákazníkov tu rado nakupuje zeleninu, 85% zákazníkov tu rado nakupuje pečivo a 90% zákazníkov tu rado nakupuje mäso. Koľko najmenej percent zákazníkov rado nakupuje v Lomoši všetky 4 kategórie tovaru?

Výsledok: 20%

Riešenie:

Aby sme nemuseli pracovať s percentami, pre zjednodušenie povedzme, že zákazníkov je presne 100. Nech D , Z , P , M postupne označuje, koľko zákazníkov rado nakupuje jednotlivé kategórie tovaru. Ďalej nech D' , Z' , P' , M' postupne označuje, koľko zákazníkov nenakupuje rado tieto kategórie. Ak nejaký zákazník nepatrí do jednej z týchto skupín, musí patriť do druhej. Inak povedané, $D + D' = Z + Z' = P + P' = M + M' = 100$.

Označme X počet zákazníkov, ktorí radi nakupujú všetky 4 kategórie tovaru, a $X' = 100 - X$ počet zvyšných zákazníkov, teda tých, ktorí nenakupujú radi všetky 4 kategórie tovaru. Našou úlohou je nájsť najnižšiu možnú hodnotu X , inak povedané najvyššiu možnú hodnotu X' . Na to, aby zákazník nenakupoval rád všetky 4 kategórie tovaru (teda patrilo do X'), musí nenakupovať rád aspoň jednu z nich (teda patriť do aspoň jednej z D' , Z' , P' alebo M'). A preto $X' \leq D' + Z' + P' + M'$.

Zo zadania vieme, že $D = 70$, $Z = 75$, $P = 85$, $M = 90$, a teda $D' = 30$, $Z' = 25$, $P' = 15$, $M' = 10$. Z toho vyplýva, že $X' \leq 30 + 25 + 15 + 10 = 80$. Maximálna hodnota X' je 80, a teda minimálna hodnota X je $100 - 80 = 20$.

Úloha 20:

Cena na bločku z pokladne predavačky Aly je štvorciferné číslo, ktoré neobsahuje cifru 9. Ak dve z jeho cifier zvýšila o 1 a toto číslo zapísala do počítača. Potom dve z cifier v pôvodnom čísle (nie nutne rovnaké dve) znížila o 1 a toto číslo tiež zapísala do počítača. Súčet dvoch čísel v počítači je 8485 a ich rozdiel je 211. Aké číslo môže byť na bločku od predavačky Aly? Nájdite všetky možnosti.

Výsledok: 4247, 4238

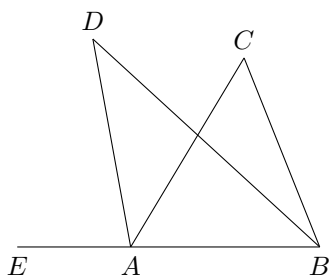
Riešenie:

Keď odčítame rozdiel daných dvoch čísel od ich súčtu, dostaneme dvojnásobok menšieho z nich. Menšie z nich má teda hodnotu polovice z $8485 - 211$, čo je 4137. Keďže je ich rozdiel 211, väčšie

z nich je 4348. Tieto čísla sa líšia o 2 v cifre na mieste stoviek, čo znamená, že táto cifra musela byť zmenená v oboch číslach. Okrem toho sa ešte líšia aj v cifrách na mieste desiatok a jednotiek, v oboch práve o 1, takže nevieme povedať, v ktorom z týchto čísel bola ktorá z nich zmenená. Takto dostaneme dve možnosti pre pôvodné číslo, ktorými sú 4247 a 4238.

Úloha 21:

Nešikovný zákazník Šmili rozsypal balík špagiet, ktoré na zemi vytvorili trojuholník ABC a bod E , ktorý leží na priamke AB . Os uhla ABC sa pretína s osou uhla EAC v bode D . Ak je veľkosť uhla BCA 50° , aká je veľkosť uhla BDA ?



Výsledok: 25°

Riešenie:

Vieme, že uhly ABD a DBC majú rovnakú veľkosť (lebo DB je os uhla). Teda keď si veľkosť uhla ABD označíme α , tak aj veľkosť uhla DBC bude mať veľkosť α (uhol ABC bude mať teda veľkosť 2α). Zo zadania vieme, že veľkosť uhla ACB je 50° . Z toho vieme dopočítať veľkosť uhla CAB z trojuholníka ABC . Uhol CAB má veľkosť $180^\circ - 2\alpha - 50^\circ = 130^\circ - 2\alpha$.

Dorátame veľkosť uhla EAC : $180^\circ - |\angle CAB| = 180 - 130^\circ + 2\alpha = 50^\circ + 2\alpha$. Z toho vieme dorátať veľkosť uhla DAC , keďže uhol DAC je polovicou z uhla EAC (čo vieme zo zadania, DA je os uhla EAC). Uhol DAC má veľkosť $(50^\circ + 2\alpha)/2 = 25^\circ + \alpha$.

Teraz vieme dopočítať $|\angle DAB| = |\angle DAC| + |\angle CAB| = 25^\circ + \alpha + 130^\circ - 2\alpha = 155^\circ - \alpha$. Z toho vieme dopočítať veľkosť uhla ABD z trojuholníka DAB :

$$\begin{aligned} |\angle BDA| &= 180^\circ - |\angle DAB| - |\angle DBA| \\ |\angle BDA| &= 180^\circ - (155^\circ - \alpha) - \alpha \\ |\angle BDA| &= 180^\circ - 155^\circ + \alpha - \alpha \\ |\angle BDA| &= 25^\circ \end{aligned}$$

Takže veľkosť uhla BDA je 25° .

Úloha 22:

Skladník Ľubo robil veľké upratovanie pred Vianocami a rozhodol sa každému produktu pridelit kód. Kód má byť v tvare nezáporného palindrómu (palindróm je také číslo, ktoré sa píše rovnako spredu aj zozadu) menšieho ako milión. Koľko najviac kódov vie takto Ľubo vytvoriť?

Výsledok: 1999

Riešenie:

Pri riešení úlohy budeme používať zápisy ako $\overline{XYZ}$, kde X , Y a Z sú jednotlivé cifry. Rozoberme po jednom prípady, koľko je palindrómov jednociferných, dvojciferných až šesticiferných.

- Jednociferných nezáporných palindrómov je 10, keďže každá cifra sa číta rovnako spredu aj zozadu a rátame aj nulu.

- Všetky dvojciferné palindrómy sú v tvare $\overline{AA}$. Cifra A nemôže byť 0, teda pre ňu máme 9 možností.
- Trojciferné palindrómy sú v tvare $\overline{ABA}$, kde A nie je 0 a B je ľubovoľná cifra. Dokopy máme $9 \cdot 10$, teda 90 možností.
- Štvorciferné palindrómy sú v tvare $\overline{ABBA}$. Možnosti pre kombinácie cifier A, B sú rovnaké ako pri trojciferných číslach, teda ich je 90.
- Päťciferné palindrómy sú v tvare $\overline{ABCBA}$, kde A nie je 0 a B, C sú ľubovoľné cifry. Dokopy máme $9 \cdot 10 \cdot 10$, teda 900 možností.
- Šesťciferné palindrómy sú v tvare $\overline{ABCCBA}$. Možnosti pre kombinácie cifier A, B, C sú rovnaké ako pri päťciferných číslach, teda ich je 900.

Čísla s viac ako šiestimi ciframi sú veľké aspoň ako milión. Iné možnosti už teda nie sú. Dokopy je $10 + 9 + 90 + 90 + 900 + 900 = 1999$ palindrómov, ktoré sú menšie ako milión.

Úloha 23:

SBSkár Štefi sa pri svojej dvojhodinovej obhliadke supermarketu Lomoš najprv prechádzal medzi regálmi tempom 4 km/h. Potom išiel hore po schodoch tempom 3 km/h. Dolu zo schodov išiel naspäť presne rovnakou cestou tempom 6 km/h a medzi regálmi prešiel znova tú istú trasu ako na začiatku znovu tempom 4 km/h. Koľko kilometrov prešiel na svojej obhliadke celkovo?

Výsledok: 8

Riešenie:

Dĺžku regálov označíme R a dĺžku schodov označíme S . Pri svojej obhliadke prešiel Štefi dvakrát medzi regálmi a dvakrát po schodoch, teda dokopy prešiel dráhu $2R + 2S$. Časy, za ktoré prešiel medzi regálmi prvýkrát a druhýkrát, označím postupne t_{R1}, t_{R2} a časy, za ktoré prešiel po schodoch prvýkrát a druhýkrát, označím postupne t_{S1}, t_{S2} .

Keďže medzi regálmi sa prvýkrát aj druhýkrát hýbal rovnako rýchlo a po rovnako dlhej dráhe, musel túto vzdialenosť prejsť za rovnako dlhý čas, čiže $t_{R1} = t_{R2}$. Po schodoch sa smerom dolu hýbal dvakrát rýchlejšie ako smerom hore, a keďže sa hýbal po rovnako dlhej dráhe, musela mu cesta smerom hore trvať dvakrát dlhšie. Teda musí platiť $t_{S1} = 2t_{S2}$.

Vieme, že jeho obhliadka trvala dokopy 2 h, takže musí platiť $2 \text{ h} = t_{R1} + t_{S1} + t_{R2} + t_{S2} = 2t_{R1} + 3t_{S2}$, teda $2 \text{ h} = 2t_{R1} + 3t_{S2}$, z čoho vyplýva, že $2t_{R1} = 2 \text{ h} - 3t_{S2}$.

Medzi regálmi prešiel dvakrát, takže spolu medzi nimi prešiel dráhu $2R$. Dĺžku R vieme vypočítať ako $R = t_{R1} \cdot 4 \text{ km/h}$, z čoho dostávame $2R = 2t_{R1} \cdot 4 \text{ km/h}$. Vyššie sme si už vyjadrili $2t_{R1}$ ako $2 \text{ h} - 3t_{S2}$, teda po dosadení $2R = (2 \text{ h} - 3t_{S2}) \cdot 4 \text{ km/h} = 8 \text{ km} - t_{S2} \cdot 12 \text{ km/h}$. Po schodoch sa Štefi smerom dole hýbal rýchlosťou 6 km/h po dobu t_{S2} , teda dráhu, ktorú prešiel, vieme vyjadriť ako $S = t_{S2} \cdot 6 \text{ km/h}$. Z toho dostávame $2R = 8 \text{ km} - 2S$.

Teraz už vieme napísať hľadanú hodnotu $2R + 2S$ ako $(8 \text{ km} - 2S) + 2S = 8 \text{ km}$, čiže Štefi prešiel dokopy 8 km.

Úloha 24:

Majme syr tvaru trojuholníka ABD a bod C na strane AD . Platí, že trojuholník ABC je rovnostranný a jeho obsah je polovica z obsahu ABD . Aká je veľkosť uhla ABD ?

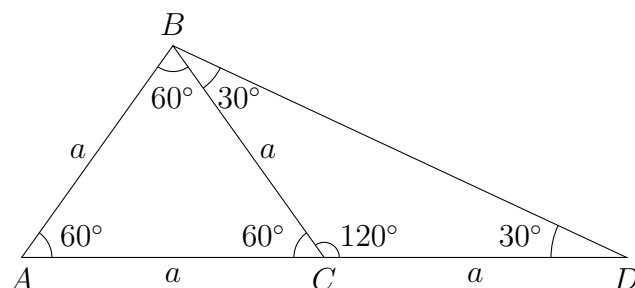
Výsledok: 90°

Riešenie:

Úsečka BC delí obsah trojuholníka ABD na obsah trojuholníka ABC a BDC . Vieme, že trojuholník ABC tvorí polovicu obsahu trojuholníka ABD . Trojuholník BDC teda musí tvoriť druhú polovicu obsahu.

Všimnime si, že strany AC a CD týchto trojuholníkov ležia na jednej priamke. Výšky týchto trojuholníkov na tieto strany budú preto rovnaké (vzdialenosť bodu B od priamky AD je rovnaká v oboch prípadoch). Keďže majú rovnaký obsah a rovnakú výšku, majú aj rovnakú dĺžku strany, na ktorú je táto výška zostrojená. $|AC|$ sa preto rovná $|CD|$. Označme si stranu rovnostranného trojuholníka ABC ako a . Potom aj $|CD| = a$. Vieme, že vnútorný uhol rovnostranného trojuholníka je 60° . Preto uhly $|\angle ABC| = |\angle BCA| = |\angle BAC| = 60^\circ$.

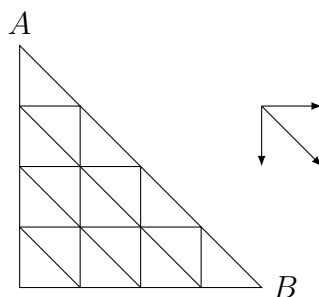
Uhol DCB je susedný s uhlom ACB , preto ho vieme dopočítať ako $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Z rovnosti $|BC| = |CD|$ vieme, že trojuholník BDC je rovnoramenný so základňou BD . Uhly pri jeho základni musia byť preto rovnaké. Dopočítame ich ako $(180^\circ - 120^\circ)/2 = 30^\circ$.



Uhol ABD už teraz vieme dorátať ako súčet uhlov $|\angle ABC| + |\angle CBD| = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$.

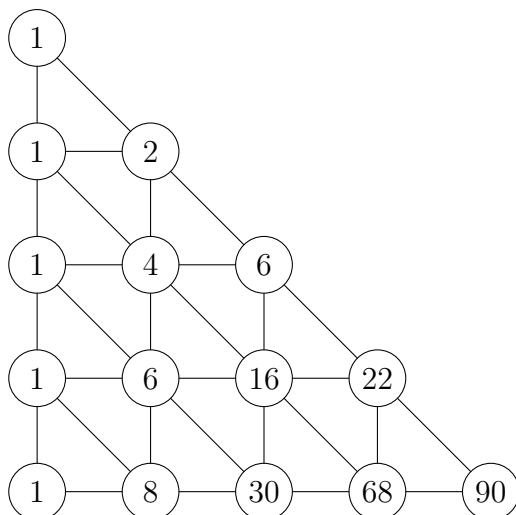
Úloha 25:

Supermarket Lomoš má tvar pravouhlého trojuholníka s uličkami medzi regálmi vyznačenými ako na obrázku. Brigádnik Jano je tu ešte nový a, aby sa nestratil, vždy sa hýbe len dole a doprava ako je vyznačené šípkami. Koľkými spôsobmi sa vie brigádnik Jano dostať od bodu A k bodu B ?



Výsledok: 90

Riešenie:



Obrázok sa skladá z uličiek (čiar) a križovatiek (miest, kde sa čiary stretávajú). Čísla na obrázku označujú počet možných ciest zo začiatkovej križovatky do danej križovatky. Toto číslo vždy dostaneme ako súčet čísel na križovatkách, z ktorých sa dá dostať na našu križovátku. Ako to funguje?

Z predchádzajúcej križovatky sa na bezprostredne nasledujúcu dá dostať iba jedným spôsobom (kvôli obmedzeniu Janovho pohybu sa nedá vrátiť na to isté miesto znova, vytvoriť cyklus ani nič podobné), a to využitím uličky, ktorá ich spája. Do predchádzajúcej križovatky sa dá dostať niekoľkými spôsobmi, no ďalej do našej iba jedným. Celkový počet ciest, ktoré do našej križovatky vedú cez túto predchádzajúcu, je teda rovnaký ako počet ciest, ktoré vedú do tejto predchádzajúcej križovatky. Rovnako to bude pre všetky križovatky, ktoré vedú do tej našej, a do našej sa teda dá dostať počtom ciest, ktorý je ich súčtom. Následne si rozmyslíme ako začneme. Koľkými spôsobmi sa Jano vie dostať do bodu A? No jedným, pretože tam začína. Ďalej už výsledok dorátame v obrázku.

Úloha 26:

Dlaždice v supermarkete Lomoš sú v tvare pravidelného mnohouholníka. Skladník Ľubo jednu z nich vybral, otočil práve o 50° a zapadla naspäť presne. Aký najmenší môže byť počet strán dlaždice?

Výsledok: 36

Riešenie:

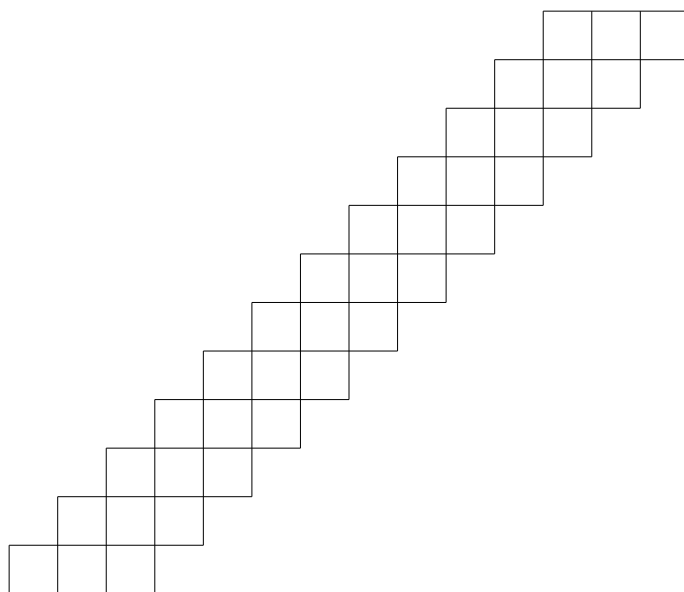
Dlaždica by zapadla presne, ak by sme ju otočili aj o 360° . To znamená, že aj 50, aj 360 sú deliteľné uhlom, ktorý pripadá na jednu stranu pravidelného n -uholníka (teda uhlom, o ktorý keď otočíme n -uholník, každý vrchol sa otočí presne do polohy jeho suseda). Keďže chceme, aby bol počet strán čo najmenší, potrebujeme, aby bol tento uhol čo najväčší. Preto hľadáme najväčšieho spoločného deliteľa týchto dvoch čísel.

Prvočíselný rozklad čísla 50 je $2 \cdot 5 \cdot 5$, prvočíselný rozklad čísla 360 je $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Vidíme, že v oboch sa nachádza len jedenkrát číslo 2 a jedenkrát číslo 5, preto bude najväčším spoločným deliteľom číslo $2 \cdot 5 = 10$.

Zistili sme teda, že dlaždica zapadne aj po otočení o 10° . Kým sa pri otáčaní vráti do pôvodnej pozície, vieme ju po 10 stupňoch otáčať $360 : 10 = 36$ ráz, z čoho vyplýva, že ide o pravidelný 36-uholník.

Úloha 27:

Pekár Michal má pečivo uskladnené v 36 štvorčekových poličkách poskladaných ako na obrázku.



Koľkými spôsobmi možno jednotlivé štvorčekové poličky označiť prvými 36 kladnými celými číslami (každým práve raz) tak, aby platilo, že nad každou poličkou a napravo od každej poličky je polička s väčším číslom?

Výsledok: $2^{11} = 2048$

Riešenie:

Podme si postupne štvorčekové poličky (ďalej len „polička“) označovať písmenami, ktoré budú určovať akési veľkostné kategórie.

Do ľavého dolného políčka si vložíme písmeno A . Napravo od neho musí byť políčko s väčším číslom, čo označíme najbližším písmenom v abecednom poradí – B . Nad políčkom B a napravo od neho musia byť väčšie čísla, o ich vzájomnom vzťahu zatiaľ nič nevieme, preto obe označíme ďalším písmenom – C . Obe políčka C majú spoločného suseda, ktorý musí byť väčší od oboch z nich, preto ho označíme D , a takto budeme s označovaním pokračovať až do posledného políčka, v ktorom sa vyskytne písmeno Y .

[illegible]

Z toho, ako sme vyplňali políčka písmenkami, vieme, že pre každé políčko platí, že v políčkach označených písmenom, ktoré sa nachádza v abecede skôr, budú menšie čísla, a v políčkach označených písmenom, ktoré je v abecede neskôr, budú väčšie čísla.

Pozrime sa teraz napríklad na políčko H . Políčok označených písmenami, ktoré sú v abecede pred písmenom H , je 10 (označené A až G), a políčok označených písmenami, ktoré sú v abecede za písmenom H je 25 (označené I až Y). K dispozícii máme prvých 36 kladných celých čísel, a vieme, že musí z nich byť 10 menších ako to na políčku H a 25 väčších ako to na políčku H . Z toho vyplýva, že na políčku H môže byť len číslo 11. Rovnakým princípom vieme s istotou povedať, aké číslo sa skrýva za písmenkami, ktoré sa v obrázku vyskytujú iba raz, to jest na políčkach A (1), B (2), D (5), F (8), J (14), L (17), N (20), P (23), R (26), T (29), V (32), X (35) a Y (36).

Podme sa teraz pozrieť na jedno zo zvyšných písmen, napríklad písmeno I . Na políčku H je číslo 11, na políčku J je číslo 14. Na políčkach označených písmenom I musí byť teda číslo väčšie ako na písmene $H - 11$ - a menšie ako na písmene $J - 14$. K dispozícii máme teda len dve možnosti - 12 a 13. Zároveň v obrázku vidíme, že máme práve dve políčka označené písmenom I - to znamená, že máme dve možnosti, ako ich vyplniť číslami 12 a 13. Všetky ostatné zatiaľ nevyriešené písmená sa nachádzajú tiež na dvoch políčkach a vždy ich vieme obmedziť na dve možnosti rovnakým princípom: C na 3 a 4, E na 6 a 7, G na 9 a 10, K na 15 a 16, M na 18 a 19, O na 21 a 22, Q na 24 a 25, S na 27 a 28, U na 30 a 31 a W na 33 a 34. To znamená, že pre každé z týchto písmen máme práve dve možnosti, ako ich do tabuľky doplniť.

Dokopy máme 14 políček takých, že v každom môže byť len jedno konkrétne číslo, a 11 dvojíc políček takých, že v nich vzájomne môžeme zameniť dvojicu čísel. To znamená, že pre každú z týchto dvojíc máme 2 rôzne možnosti. Pre každú z dvoch možností dvojice na písmene C existujú dve možnosti pre umiestnenie čísel na písmene E , teda dokopy štyri možnosti, pre každú z týchto možností máme dve možnosti dvojice na písmene G , spolu teda osem možností, a tak ďalej. Dokopy máme 11 dvojíc, takže $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{11} = 2048$ možností.

Úloha 28:

V supermarkete Lomoš majú všetky kocky masla na predajni označené číslami 1, 2, ..., 100. Zákazník Šmili si z nich chce vybrať čo najviac tak, aby žiadne z vybraných čísel na masle nebolo dvojnásobkom iného vybraného čísla na masle. Koľko najviac kociek si vie takto vybrať?

Výsledok: 67

Riešenie:

Na úvod si všimnime, že žiadne nepárne číslo nemá medzi zvyšnými svoju polovicu. Zároveň všetky párne čísla majú medzi ostatnými svoju polovicu. A žiadne číslo nie je polovicou viac ako jedného čísla. Čísla si teda vieme zapísať do radov tak, že nasledujúce číslo je vždy dvojnásobkom toho pred ním a takto bude každé číslo súčasťou práve jedného radu. Každý takýto rad bude začínať iným nepárnym číslom a končiť číslom, ktorého dvojnásobok už je väčší ako 100. (Prvý takýto rad bude 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.)

Keď budeme mať takto rozdelené čísla do radov, tak sa nám úloha zmení na to, ako z každého z nich zobrať čo najviac čísel bez toho, aby sme zobrali dve idúce hneď za sebou. A to dosiahneme tak, že zoberieme každé druhé, počnúc prvým.

Prvý rad sme už napísali vyššie. Z neho teda vieme zobrať 4 čísla (1, 4, 16 a 64). Druhý rad je 3, 6, 12, 24, 48, 96. Z neho vieme zobrať 3 čísla. Tretí rad je 5, 10, 20, 40, 80, z toho vieme zobrať tiež 3 čísla. Ďalšie tri rady sú 7, 14, 28, 56, potom 9, 18, 36, 72 a 11, 22, 44, 88. Zo všetkých týchto troch radov vieme zobrať po 2 čísla. Dokopy máme vybraných zatiaľ 16 čísel.

Všetky rady začínajúce číslami od 13 do 25 obsahujú tri čísla, pretože sa medzi číslami do 100 nachádza iba ich dvojnásobok a štvornásobok. Týchto radov (od 13, 26, 52 do 25, 50, 100) je 7 a z každého vieme zobrať 2 čísla. Dokopy už máme vybraných 30 čísel.

Rady začínajúce číslami od 27 do 49 majú medzi číslami do 100 iba svoj dvojnásobok, teda obsahujú iba dve čísla. Týchto radov (od 27, 54 do 49, 98) je 12 a z každého vieme vybrať iba jedno číslo. Takže dokopy máme vybraných 42 čísel.

A na záver máme rady začínajúce číslami 51 až 99, ktoré obsahujú iba to jediné číslo, pretože jeho dvojnásobok je už príliš veľký. Z každého tohto radu toto číslo vieme vybrať a je ich spolu 25.

Spolu sme v súčte teda vybrali 67 čísel a ukázali sme, prečo to viac nemôže byť. Šmili si preto vie vybrať najviac 67 kociek.

Úloha 29:

Vedúci prevádzky Peter si všimol, že tržby v supermarkete Lomoš za posledných 2023 dní sú rovné $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2023^2$. Akou cifrou sa bude končiť toto číslo?

Výsledok: 4

Riešenie:

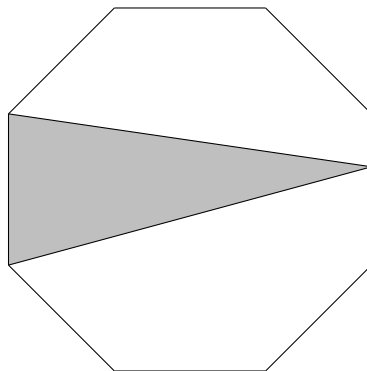
Pozrime sa na to, na aké cifry končia druhé mocniny:

- Ak číslo končí na 0, aj druhá mocnina končí na 0.
- Ak číslo končí na 1 alebo 9, druhá mocnina končí na 1.
- Ak číslo končí na 2 alebo 8, druhá mocnina končí na 4.
- Ak číslo končí na 3 alebo 7, druhá mocnina končí na 9.
- Ak číslo končí na 4 alebo 6, druhá mocnina končí na 6.
- Ak číslo končí na 5, druhá mocnina končí na 5.

Keď si čísla v súčte rozdelíme na skupiny desiatich po sebe idúcich čísel, súčet posledných cifier čísel v jednej skupine je $0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 6 + 5 = 45$. Po číslo 2020^2 máme takýchto skupín čísel 202, čiže súčet ich posledných cifier je $202 \cdot 45 = 9090$. Ďalej máme ešte čísla 2021^2 , 2022^2 a 2023^2 . Tieto čísla končia postupne na 1, 4 a 9, čiže v súčte 14. Spolu s ostatnými číslami je súčet posledných cifier všetkých čísel v súčte $9090 + 14 = 9104$, čiže súčet v zadaní končí na poslednú cifru tohto čísla, čo je 4.

Úloha 30:

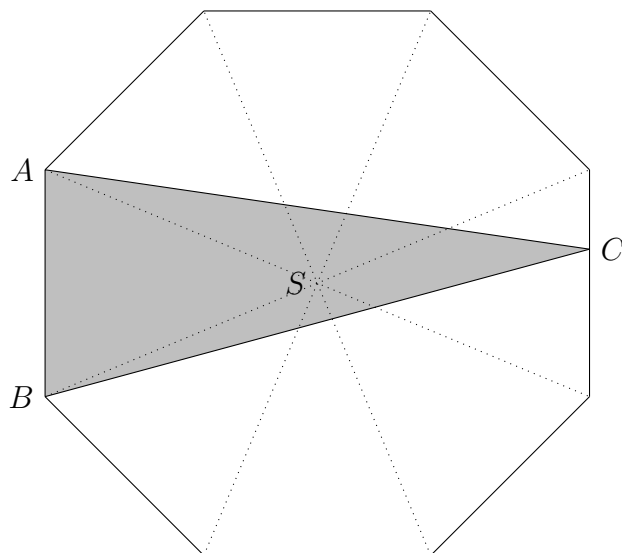
Na syrovom oddelení v supermarkete Lomoš predávajú syr v tvare pravidelného osemuholníka s obsahom 100 cm^2 . Zákazník Šmili z neho chcel kúpiť iba odrezanú časť v tvare trojuholníka ako na obrázku. Aký obsah má časť syra, ktorú si chce Šmili kúpiť?



Výsledok: 25 cm^2

Riešenie:

Označme si stred osemuholníka (respektíve prienik uhlopriečok medzi dvojicami protilahlých vrcholov) ako S a vyznačený trojuholník ako ABC (ako na obrázku). Vidíme, že trojuholník ABS tvorí osminu celého osemuholníka. Taktiež vieme, že vzorec na výpočet obsahu trojuholníka je $a \cdot v_a / 2$, kde a je strana trojuholníka a v_a je výška na danú stranu. Trojuholníky ABC a ABS majú spoločnú základňu AB , pričom trojuholník ABC má dvakrát väčšiu výšku na stranu AB ako trojuholník ABS . Z toho vyplýva, že obsah trojuholníka ABC bude dvakrát väčší ako obsah trojuholníka ABS , teda $(1/8) \cdot 2 = 1/4$ z celého osemuholníka. Výsledný obsah vyznačenej časti teda bude $1/4$ zo 100 cm^2 , čo je 25 cm^2 .



Úloha 31:

Predavačky Nina, Janka a Katka vykladajú každý štvrtok do regálu ponožky, každá 5 párov. Nina vykladá 5 rovnakých párov, teda dokopy 10 rovnakých ponožiek. Janka vykladá 5 rovnakých párov, avšak v každom z nich sú pravá a ľavá ponožka rôzne, dokopy vykladá teda 5 rovnakých pravých a 5 rovnakých ľavých ponožiek. Katka vykladá 5 rôznych párov, teda 5 navzájom rôznych dvojíc ponožiek. Jedného štvrtka stratila každá z nich nejaké dve ponožky (nie nutne z toho istého páru). Aká je pravdepodobnosť, že každá z nich vie zo svojich zvyšných 8 ponožiek poskladať 4 páry?

Výsledok: $1 \cdot 5/9 \cdot 1/9 = 5/81$

Riešenie:

Nina vie zo svojich ponožiek poskladať 4 páry vždy, keďže sú všetky jej ponožky rovnaké a každá môže byť v páre s ľubovoľnou ďalšou. Jej pravdepodobnosť je teda 1.

Aby vedela Janka poskladať 4 páry, musia byť ponožky, ktoré stratila, každá na inú nohu. Teda jedna pravá a jedna ľavá. Takto jej ostanú ešte 4 ponožky na pravú a 4 na ľavú, z čoho vie urobiť 4 páry. To znamená, že keď nejakú stratí, druhá, ktorú môže stratíť, aby stále vznikli 4 páry, musí byť jedna z 5 na druhú nohu. Pritom všetkých zvyšných ponožiek je 9. To jej dáva pravdepodobnosť $5/9$.

Aby vedela zostaviť 4 páry Katka, jej druhá stratená ponožka musí byť z rovnakého páru ako prvá, keďže každá ponožka má práve jednu, s ktorou vie vytvoriť pár. Keď teda stratí ľubovoľnú ponožku, je ešte 9 ponožiek, ktoré by mohla stratíť a z nich práve 1 je z rovnakého páru ako tá prvá. Toto sa teda stane s pravdepodobnosťou $1/9$.

Aby vedeli vytvoriť páry všetky 3 dievčatá, všetky tieto veci sa musia stať naraz. Pravdepodobnosť je teda $1 \cdot 5/9 \cdot 1/9 = 5/81$.

Úloha 32:

Brigádnik Jano sa v svojej novej práci v supermarkete Lomoš nudí a preto hrá na svojom mobile hru, kde stojí na nekonečnej štvorčekovanej sieti. V každom kroku sa vie pohnúť o 2 políčka hore, o 1 políčko dole alebo o 1 políčko doprava. Na koľko rôznych políčok sa vie dostať po 10 krokoch?

Výsledok: 66

Riešenie:

Povedzme, že na začiatku Jano stojí na políčku $[0, 0]$. Pohyb hore nech zvýši prvú súradnicu o 2, pohyb dole ju zníži o 1 a pohyb doprava zvýši druhú súradnicu o 1. Označme a , b , c postupne počet pohybov hore, dole a doprava. Po 10 krokoch bude mať výsledné políčko súradnice $[2a - b, c]$. Rozoberme si počet políčok, na ktoré sa môže dostať, podľa hodnoty c . Pre každú hodnotu c postupne vypíšeme možnosti pre jednotlivé hodnoty b , začínajúc 0.

- Ak $c = 0$, tak sa vieme dostať na 11 rôznych políčok: $[20, 0]$, $[17, 0]$, $[14, 0]$, ..., $[-10, 0]$.
- Ak $c = 1$, tak sa vieme dostať na 10 rôznych políčok: $[18, 1]$, $[15, 1]$, $[12, 1]$, ..., $[-9, 1]$.
- Ak $c = 2$, tak sa vieme dostať na 9 rôznych políčok: $[16, 2]$, $[13, 2]$, $[10, 2]$, ..., $[-8, 2]$.
- ...
- Ak $c = 9$, tak sa vieme dostať na 2 rôzne políčka: $[2, 9]$, $[-1, 9]$.
- Ak $c = 10$, tak sa vieme dostať na 1 rôzne políčko: $[0, 10]$.

Prešli sme všetky možné hodnoty c , určite sme teda žiadne políčko nevynechali. Zároveň sme určite žiadne políčko nezarátali viackrát, keďže jednotlivé možnosti sa líšia hodnotou c . Spolu sa teda po 10 krokoch vieme dostať na $11 + 10 + \dots + 2 + 1 = 66$ rôznych políčok.

Úloha 33:

Supermarket Lomoš chce rozšíriť svoj sortiment o dresy. Budú objednávať jeden druh dresov, pričom každý kus má na chrbte iné kladné celé číslo, začínajúc od 1 a idúc hneď po sebe. Vyložené ich chce mať na dvoch stojanoch, a to tak, že ľubovoľné dve čísla na dresoch na jednom stojane majú najviac dvoch rovnakých prvočíselných deliteľov. Koľko najviac dresov môže supermarket objednať?

Výsledok: 89

Riešenie:

Keďže chceme nájsť, koľko najviac dresov môžeme objednať, chceme nájsť najmenšie číslo dresu, ktoré by sme už nevedeli zavesiť ani na jeden zo stojanov. To sa stane, ak na oboch stojanoch už budú dresy, ktoré s týmto číslom majú aspoň troch spoločných prvočíselných deliteľov. Najmenšie číslo s tromi prvočíselnými deliteľmi je 30. Vznikne súčinom troch najmenších prvočísel ($2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$). To znamená, že najmenšie číslo dresu, ktoré už nevieme objednať, bude násobok 30, ktorý už nebudeme mať kam zavesiť. Dres s číslom 60, dvojnásobok 30, ešte objednať vieme, keďže ho jednoducho zavesíme na druhý stojan ako dres s 30. Dres s číslom 90, trojnásobok 30, už ale nemáme kde zavesiť, keďže na jednom stojane visí 30 a na druhom 60. Z toho vyplýva, že najväčšie číslo dresu, aké môže supermarket objednať, je 89.

Úloha 34:

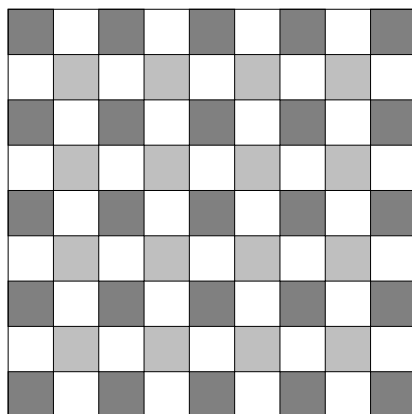
Koľkými spôsobmi vie pekár Michal umiestniť 9 veží na šachovnicu 9×9 ofarbenú klasickým spôsobom tak, aby sa navzájom neohrozovali a stáli všetky na jednej farbe, pričom šachovnicu nemôže rotovať?

Výsledok: $5! \cdot 4! = 2880$

Riešenie:

Označme si čiernu ako farbu, ktorá je v šachovnici zastúpená viac, teda jej rohové políčka budú čierne. Ak si následne riadky šachovnice označíme ako párne a nepárne, môžeme si všimnúť, že

nepárne riadky sa začínajú aj končia čiernou a párne naopak bielou. Ak chceme zariadiť, aby bola každá veža, čo sa nachádza v nepárnom riadku, v inom stĺpci ako všetky ostatné, a zároveň všetky veže boli na rovnakej farbe, tak potom musíme veže v týchto riadkoch ukladať na čierne políčka. Je to preto, lebo nepárnych riadkov je päť a biele políčka v nepárnom riadku sú len v štyroch stĺpcoch, preto ak by sme ich ukladali na biele políčka, tak minimálne dve veže nachádzajúce sa v rozdielnom nepárnom riadku by museli ležať v tom istom stĺpci.



Veže na nepárnych riadkoch sa nikdy nebudú ohrozovať s vežami na párnych riadkoch. Počet možností, ktorými vieme na šachovnicu umiestniť veže preto následne vypočítame ako súčin počtu možností, ktorými vieme položiť veže do nepárnych riadkov a možností, ktorými vieme položiť veže do párnych riadkov. V prvom nepárnom riadku máme na výber z 5 čiernych políčok, v druhom nepárnom už iba zo 4 a tak ďalej, až v poslednom nepárnom riadku nám zostane posledné políčko, do ktorého môžeme umiestniť vežu. Počet možností, ktorými vieme umiestniť veže do nepárnych riadkov teda bude $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$. Podobným spôsobom vypočítame aj počet možností, ktorými vieme umiestniť veže do párnych riadkov. Párne riadky však máme iba štyri a v každom párnom riadku máme len štyri čierne políčka, preto bude počet týchto možností $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$.

Na šachovnicu teda vieme položiť veže celkovo $5! \cdot 4! = 2880$ spôsobmi.

Úloha 35:

V supermarkete Lomoš pripravujú mikulášske balíčky. V jednom balíčku má byť prvočíselný počet cukríkov a 400 arašidov a zároveň má platiť, že súčet počtu cukríkov a počtu arašidov je druhou mocninou prirodzeného čísla. Koľko môže byť v balíčku cukríkov? Nájdite všetky možnosti.

Výsledok: 41

Riešenie:

Označme si počet cukríkov v balíčku ako p . Potom v jednom balíčku sa spolu nachádza $400 + p$ cukríkov a arašidov. Podľa zadania platí $400 + p = n^2$, pričom n je prirodzené číslo. Zapišme si 400 ako 20^2 a odčítajme to od oboch strán rovnice. Následne pomocou vzorca $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ rovnicu upravíme.

$$p = n^2 - 20^2$$

$$p = (n + 20) \cdot (n - 20)$$

Vieme, že n^2 je väčšie ako 20^2 , keďže n^2 je $20^2 + p$. Potom aj n je väčšie ako 20, a teda obidve zátvorky v tomto súčine sú kladné. Keďže p je prvočíslo, nemôže byť súčinom dvoch prirodzených čísel väčších ako 1. Preto jedna z týchto zátvoriek musí mať hodnotu 1. Ak by to bola zátvorka $(n + 20)$, tak potom $(n - 20)$ je o 40 menšie, čiže -39 . Prišli sme ale na to, že $(n - 20)$ musí byť kladné, čiže táto možnosť nám nevyhovuje.

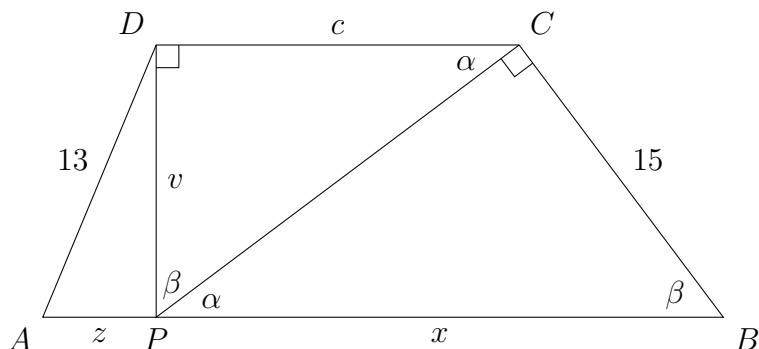
Ak by $(n - 20)$ bolo 1, tak potom n je $1 + 20 = 21$, čiže $(n + 20)$, a teda aj p , je 41. Toto číslo nám vyhovuje, lebo je prvočíslo, čiže existuje jeden možný počet cukríkov v balíčku, a ten je $p = 41$.

Úloha 36:

Mrazená torta má tvar lichobežníka $ABCD$ so základňami AB a CD . Strana BC má dĺžku 15 a strana DA má dĺžku 13. Päta výšky lichobežníka z vrcholu D leží na strane AB , nazvime ju P . Úsečka PC má dĺžku 20. Uhol CPD je rovnako veľký ako uhol ABC . Zistite obsah lichobežníka.

Výsledok: 276

Riešenie:



Z vlastností lichobežníka vieme, že jeho základne sú rovnobežné, takže strana AB je rovnobežná so stranou CD . Z toho môžeme povedať, že $|\angle CPB| = |\angle PCD| = \alpha$, keďže ide o striedavé uhly. Zo zadania tiež vieme, že $|\angle PBC| = |\angle CPD| = \beta$. Zároveň platí $|\angle PBC| + |\angle CPB| + |\angle PCB| = \alpha + \beta + |\angle PCB| = 180^\circ$ a aj $|\angle CPD| + |\angle DCP| + |\angle PDC| = \alpha + \beta + |\angle PDC| = 180^\circ$, nakoľko ide o vnútorné uhly trojuholníkov, takže aj $|\angle PCB| = |\angle PDC|$. Ďalej si všimnime, že úsečka PD je výškou daného lichobežníka, takže $|\angle APD| = |\angle PDC| = 90^\circ$, a teda aj $|\angle PCB| = 90^\circ$. Našli sme teda dva pravouhlé trojuholníky, DCP a CPB , ktoré sú podobné, keďže ich vnútorné uhly majú rovnaké veľkosti. Najprv si pomocou Pytagorovej vety dorátame dĺžku strany PB .

$$\begin{aligned} |PB|^2 &= |PC|^2 + |CB|^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625 \\ |PB| &= 25 \end{aligned}$$

Ďalej si vďaka podobnosti vieme dorátať dĺžku strán DP a DC .

$$\begin{aligned} \frac{|PC|}{|PB|} &= \frac{|DP|}{|CB|} & \frac{|PC|}{|PB|} &= \frac{|DC|}{|CP|} \\ \frac{|20|}{|25|} &= \frac{|DP|}{|15|} & \frac{|20|}{|25|} &= \frac{|DC|}{|20|} \\ |DP| &= 12 & |DC| &= 16 \end{aligned}$$

Teraz sa nám už len stačí pozrieť na pravouhlý trojuholník APD a Pytagorovou vetou dorátať dĺžku strany AP .

$$\begin{aligned} |AP|^2 &= |AD|^2 - |DP|^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 \\ |AP| &= 5 \end{aligned}$$

Z toho, čo sme vyrátali, vieme, že $|AB| = a = 5 + 25 = 30$, $|DC| = c = 16$ a $|DP| = v = 12$. To dosadíme do vzorca na výpočet obsahu lichobežníka a dostaneme

$$S = \frac{(a+c)v}{2} = \frac{(30+16) \cdot 12}{2} = 276.$$

Úloha 37:

V supermarkete Lomoš pracuje niekoľko predavačiek a niekoľko skladníkov. Každá predavačka pozná práve 7 skladníkov. Každý zo skladníkov pozná iný počet predavačiek (poznania sú vzájomné). Koľko najmenej predavačiek a skladníkov spolu musí pracovať v Lomoši?

Výsledok: 25

Riešenie:

Označme počet predavačiek P . Keďže každá predavačka pozná práve 7 skladníkov, tak celkový počet známostí predavačiek je $7P$. Každý skladník pozná iný počet predavačiek a skladník s najväčším počtom známostí pozná najviac P predavačiek. Maximálny celkový počet známostí skladníkov je teda

$$P + (P - 1) + \dots + 2 + 1 = \frac{P(P + 1)}{2}.$$

Táto hodnota nemôže byť menšia, ako je celkový počet známostí predavačiek (keďže známosti sú vzájomné). Dostaneme tak nerovnosť:

$$\begin{aligned} P + (P - 1) + \dots + 2 + 1 &\geq 7P \\ \frac{P(P + 1)}{2} &\geq 7P \\ P(P + 1) &\geq 14P \\ P + 1 &\geq 14 \\ P &\geq 13 \end{aligned}$$

Ak $P = 13$, tak $P(P + 1)/2 = 13 \cdot 7 = 7P$. Jediná možnosť je v tomto prípade teda, ak aj skladníkov je 13 a postupne poznajú 1, 2, ..., 13 predavačiek. Celkový počet zamestnancov je v tomto prípade 26. Ostáva zistiť, či tento počet vieme znížiť.

Ak $P = 14$, tak počet skladníkov je najviac 11 (aby celkový počet zamestnancov bol najviac 25). Pre 11 skladníkov a 14 predavačiek je počet známostí predavačiek $7 \cdot 14 = 98$ a počet známostí skladníkov najviac $14 + 13 + \dots + 5 + 4 = 99$. Nerovnosť sedí, a teda pre 14 predavačiek a 11 skladníkov sme znížili celkový počet zamestnancov na 25. Skúsime tento počet ešte znížiť.

Ak $P = 15$, tak počet skladníkov je najviac 9 (aby celkový počet zamestnancov bol najviac 24). Pre 9 skladníkov a 15 predavačiek je počet známostí predavačiek $7 \cdot 15 = 105$ a počet známostí skladníkov najviac $15 + 14 + \dots + 8 + 7 = 99$. To je ale menej ako 105, v tomto prípade teda možnosť, kde je celkový počet zamestnancov menší ako 25, neexistuje.

Ak $P = 16$, tak počet skladníkov je najviac 8. Celkový počet známostí predavačiek je $7 \cdot 16 = 112$ a počet známostí skladníkov najviac $16 + 15 + \dots + 10 + 9 = 96$. To je menej ako 112, ani v tomto prípade teda možnosť, kde je celkový počet zamestnancov menší ako 25, neexistuje.

Ak $P = 17$, tak počet skladníkov je najviac 7. Celkový počet známostí predavačiek je $7 \cdot 17 = 119$ a počet známostí skladníkov najviac $17 + 16 + \dots + 12 + 11 = 98$. To je menej ako 119, a teda ani táto možnosť nevyhovuje.

Ak $P \geq 18$, tak by skladníkov muselo byť menej ako 7. To ale nemôže nastať, pretože každá predavačka musí poznať 7 skladníkov.

Zdá sa teda, že najmenší celkový počet zamestnancov je 25. Pre úplnosť riešenia ešte ostáva overiť, že takéto rozdelenie skutočne môže existovať.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			
5	X	X	X	X	X	X	X	X	X				X	
6	X	X	X	X	X	X	X	X						X
7	X	X	X	X	X	X	X							X
8								X	X	X	X	X	X	X
9									X	X	X	X	X	X
10										X	X	X	X	X
11												X	X	X

V stĺpcoch sú jednotlivé predavačky, v riadkoch jednotliví skladníci. Znak X vyjadruje vzájomnú známosť. Ako vidíme, každá predavačka pozná práve 7 skladníkov a každý skladník pozná iný počet predavačiek. Náš odhad bol teda správny a minimálny celkový počet zamestnancov je 25.

Úloha 38:

Vedúci prevádzky Peter si myslí číslo a povedal o ňom:

- Číslo je párne.
- Číslo má práve 10 deliteľov.
- Číslo je dvojciferné.
- Číslo je menšie ako 500.

Jeho zástupkyňa Kristín ale prezradila, že nie všetky z jeho výrokov sú pravdivé. Tiež povedala, že ak by sme vedeli, ktoré výroky sú pravdivé, a ktoré nie, vedeli by sme určiť, aké číslo si Peter myslí. Aké číslo si myslí Peter?

Výsledok: 405

Riešenie:

Najprv sa pozrime na druhý výrok. Všimnime si, že keby bol nepravdivý, môže mať číslo akýkoľvek iný počet deliteľov, čo nám dáva príliš veľa možností – určite existuje viac ako jedno nepárne aj viac ako jedno párne číslo aj dvojciferné, aj medzi 100 a 500, aj väčšie ako 500, ktoré to spĺňa. Napríklad žiadne zo samotných čísel 11, 12, 13, 14, 101, 102, 103, 104, 501, 502, 503, 504 nemá práve 10 deliteľov. Aj keby sme teda poznali presne, ktoré zvyšné výroky sú pravdivé a ktoré nie, nevedeli by sme jednoznačne určiť číslo, ktoré si Peter myslí. Takže druhý výrok musí byť pravdivý.

Teraz si môžeme dať odbočku a pozrieť sa na to, ako z prvočíselného rozkladu čísla vieme zistiť jeho počet deliteľov. Delitele čísla dostaneme vynásobením niekoľkých prvočísel z jeho prvočíselného rozkladu (môže byť aj žiadnych alebo všetkých). Všetky rôzne kombinácie vynásobení rôznych prvočísel a ich počtov nám potom dajú všetky rôzne delitele. Napríklad vieme, že $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Všetky rôzne delitele tohto čísla teda vieme získať tak, že nevyberieme žiadne prvočíslo (získame 1), vyberieme jednu dvojku (2), vyberieme dve dvojky ($2 \cdot 2 = 4$), vyberieme jednu trojku (3), vyberieme jednu dvojku a jednu trojku ($2 \cdot 3 = 6$) alebo vyberieme dve dvojky a jednu trojku (12).

Vo všeobecnosti máme zápis čísla cez prvočíselný rozklad ako $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}$, pričom p_1 až p_n sú rôzne prvočíselné delitele čísla n a a_1 až a_n sú počty, koľkokrát sa tam nachádzajú (napríklad $p^3 = p \cdot p \cdot p$). Teda 12 vieme zapísať ako $12 = 2^2 \cdot 3$.

Pri vytváraní deliteľov tohto čísla môžeme každé prvočíslo zobrať od nulakrát až po toľkokrát, koľkokrát sa nachádza v prvočíselnom rozklade celého čísla (v čísle 12 môžeme dvojku zobrať 0 až 2 razy, máme dokopy teda tri možnosti, koľko dvojek zoberieme). A pre vypočítanie, koľko deliteľov dané číslo má, musíme navzájom vynásobiť počty možností, koľkokrát do deliteľa môžeme zahrnúť

každé rôzne prvočíslo, ktoré obsahuje. Teda všetkých deliteľov má $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1)$ (preto má číslo 12 $(2 + 1)(1 + 1) = 6$ deliteľov).

Vieme, že číslo, ktoré si Peter myslí, má práve 10 deliteľov. Číslo 10 sa dá rozložiť iba na $2 \cdot 5$ alebo celých 10. To znamená, že buď bude tvaru $p_1^1 \cdot p_2^4$ alebo tvaru p^9 .

Teraz sa už môžeme vrátiť k úlohe a pozrieť sa na štvrtý výrok. Keby bol nepravdivý, číslo by muselo byť väčšie ako 500. Lenže existuje nekonečne veľa čísel, aj párných aj nepárných, väčších ako 500, ktoré majú práve 10 deliteľov. Ukázali sme, že stačí, ak budú v tvare $p_1^1 \cdot p_2^4$, nezáleží na tom, aké veľké prvočísla budú, a prvočísel je nekonečne veľa. Takže aby sme vedeli určiť číslo, na ktoré Peter myslí, musí byť aj tento výrok pravdivý. S touto informáciou už vieme vylúčiť tvar p^9 , pretože už $2^9 = 512$ je väčšie ako 500. Takže prichádza do úvahy iba tvar $p_1^1 \cdot p_2^4$.

Teraz sa pozrime na prvý výrok. Predpokladajme, že by bol pravdivý, teda číslo by bolo párne. V tom prípade musí prvočíselný rozklad čísla obsahovať 2. Zoberme si čísla $3 \cdot 2^4 = 48$, $5 \cdot 2^4 = 80$, $7 \cdot 2^4 = 112$ a $11 \cdot 2^4 = 176$. Na nich vidíme, že všetky majú práve 10 deliteľov a všetky sú párne a menšie ako 500, a teda existuje viac ako jedno také dvojciferné číslo aj viac ako jedno také trojciferné číslo. Takže bez ohľadu na to, či by tretí výrok bol pravdivý, alebo nie, nevedeli by sme s istotou určiť číslo, na ktoré Peter myslí. Z toho nám vyplýva, že prvý výrok musí byť nepravdivý, takže číslo je nepárne.

Najmenšie nepárne číslo s práve 10 deliteľmi je $5 \cdot 3^4 = 405$. Tým pádom tretí výrok musí byť pravdivý. A pre overenie, aj $7 \cdot 3^4 = 567$, aj $3 \cdot 5^4 = 1875$ sú už väčšie ako 500, čiže máme spôsob, ako môžu byť výroky pravdivé alebo nepravdivé tak, aby sme jednoznačne dostali práve jedno číslo, a zároveň sme ostatné spôsoby vylúčili. Peter si teda myslí číslo 405.

Úloha 39:

V supermarkete Lomoš je detský vláčik s koľajnicami dlhými 56, ktoré vedú zo stanice A postupne cez B, C, ..., J do stanice K, čiže sú takto rozdelené na 10 úsekov. Žiadne dva po sebe idúce úseky nie sú dohromady dlhšie než 12, no každé tri po sebe nasledujúce úseky merajú aspoň 17. Aká môže byť vzdialenosť medzi stanicami B a G? Nájdite všetky možnosti.

Výsledok: 29

Riešenie:

Nech XY značí dĺžku úseku medzi stanicami X a Y. Prvých 9 úsekov meria spolu aspoň $3 \cdot 17 = 51$. Posledný úsek teda meria najviac $56 - 51 = 5$. Inak povedané, $JK \leq 5$. Rovnakú úvahu vieme urobiť pre ďalšie tri úseky:

$$\begin{array}{ll} 56 = AB + BE + EH + HK \geq AB + 51 & AB \leq 5 \\ 56 = AD + DE + EH + HK \geq DE + 51 & DE \leq 5 \\ 56 = AD + DG + GH + HK \geq GH + 51 & GH \leq 5 \\ 56 = AD + DG + GJ + JK \geq JK + 51 & JK \leq 5 \end{array}$$

Teraz využijeme to, že žiadne dva po sebe idúce úseky nie sú dlhšie ako 12:

$$56 = AB + BD + DE + EG + GH + HJ + JK \leq 5 + 12 + 5 + 12 + 5 + 12 + 5 = 56$$

Musí platiť rovnosť, preto každý z úsekov musí mať hodnotu, ktorou sme ho zhora odhadli. Teda $AB = DE = GH = JK = 5$ a $BD = EG = HJ = 12$. Z toho už dorátame $BG = BD + DE + EG = 12 + 5 + 12 = 29$.

Úloha 40:

Mliekar Martin dnes dostal syr tvaru kvádra veľkosti $40\text{ cm} \times 50\text{ cm} \times 60\text{ cm}$, ktorý má pripraviť na ochutnávku. Rozrezal ho na 120 kociek $10\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$. Koľkými kockami prechádza telesová uhlopriečka kvádra syra?

Výsledok: 12

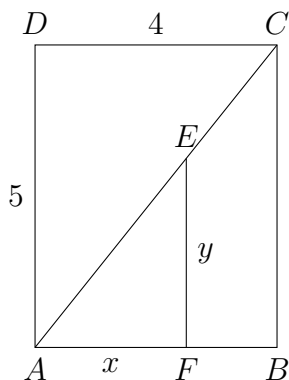
Riešenie:

Po rozrezaní sme dostali kváder o rozmeroch $4 \times 5 \times 6$ kociek. Telesová uhlopriečka začína v jednej z nich a končí v protilahlej, ktorá je o 3 kocky ďalej v prvom smere, o 4 v druhom a o 5 v treťom. Pri svojom prechode kvádom preto musí prejsť z jednej kocky do druhej v jednom smere trikrát, v druhom štyrikrát a v treťom päťkrát. Dokopy to je 12 prechodov do novej kocky a 1 kocka, v ktorej začína. To by malo znamenať, že prechádza 13 kockami.

Mohlo sa ale stať, že uhlopriečka prechádza z jednej kocky do druhej v dvoch smeroch naraz, ak by prechádzala hranou kociek, alebo dokonca v troch smeroch naraz, ak by prechádzala vrcholom kociek. Potrebujeme preto zistiť, koľkokrát nastanú tieto prípady.

Uvažujme pôdorysy daného kvádra zo všetkých troch rôznych strán. Pôdorys kvádra rozdeleného na kocky bude štvorcová sieť. Steny kociek v kvádri sú v štvorcovej sieti reprezentované stranami štvorcov, preto vždy, keď telesová uhlopriečka prechádza nejakou hranou, bude na jednom z pôdorysov prechádzať vrcholom štvorcov.

Máme teda obdĺžniky 4×5 , 4×6 a 5×6 rozdelené na štvorčeky 1×1 a potrebujeme zistiť, koľkokrát ich uhlopriečky prechádzajú vrcholom štvorcov. Začnime obdĺžnikom 4×5 . Pomenujme si jeho vrcholy $ABCD$. Predpokladajme, že na jeho uhlopriečke existuje bod, ktorý prechádza nejakým spoločným vrcholom dvoch štvorcov, a nazvime ho E . Jeho vzdialenosti od strán obdĺžnika nazvime x , y , pričom vieme, že sú celočíselné, lebo sa rovnajú súčtu dĺžok strán niekoľkých štvorčekov so stranou dĺžky 1. Bod, v ktorom kolmica na stranu AB vedená z bodu E pretína stranu AB , nazvime F .



Trojuholníky AFE a ABC sú podobné, lebo majú spoločný uhol BAC a ich druhý uhol je pravý. Pomer ich dĺžok strán je preto rovnaký, teda $x/y = 4/5$, po úprave $5x = 4y$. Ľavá strana rovnice je deliteľná piatimi, teda musí byť aj pravá, z čoho vyplýva, že y je násobok päťky. Z obrázka ale vieme, že $0 < y < 5$. Žiadne číslo v tomto rozmedzí nie je násobkom päťky. Preto v obdĺžniku 4×5 uhlopriečka neprechádza žiadnym spoločným vrcholom dvoch štvorcov.

Rovnakým spôsobom vieme dokázať to isté pre obdĺžnik 5×6 . V obdĺžniku 4×6 by sme týmto postupom dostali rovnicu $6x = 4y$ pre také x , y , že $0 < x < 4$ a $0 < y < 6$. Rovnicu vieme predeliť dvomi, dostaneme tak $3x = 2y$, z čoho vyplýva, že x je deliteľné dvomi a y tromi. V určenom rozmedzí existuje taká dvojica (x, y) len jedna, a to $(2, 3)$.

V obdĺžniku 4×6 preto uhlopriečka raz prejde spoločným vrcholom dvoch štvorcov. V kvádri $4 \times 5 \times 6$ teda telesová uhlopriečka prejde spoločnou hranou dvoch kociek tiež len raz. Prechodov do novej kocky preto nebude 12, ale len 11, a teda celkovo prejde uhlopriečka $11 + 1$, čiže 12 kockami.

Hádanky

Hádanka 1:

Kto ho zbačí, nech ho potlačí; kto ho chce chovať, musí sa varovať. Dávaj mu hlúpo, i to len skúpo; ak mu dáš masť, bude rásť; keď narastie, bude kradnúť, bude zbíjať, mečom vôkol hlavy zvíjať; i z domu ťa vyperie, i všetko ti pred očami požerie.

Výsledok: Oheň

Hádanka 2:

Pracujem na pumpe, svojho šéfa neopustím. Ak by som podal výpoveď, končí aj on so mnou a ja s ním. Čo som?

Výsledok: Srdce

Hádanka 3:

Za bielou brámkou červený psík vrčí, ale z budy ďaleko nedoskočí.

Výsledok: Jazyk

Hádanka 4:

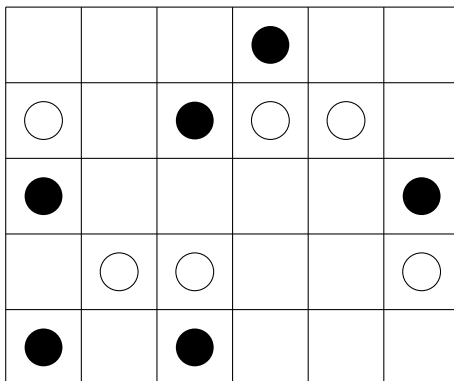
Čo niekoľkokrát za deň ide hore a dole, ale napriek tomu sa nedokáže pohnúť?

Výsledok: Teplota

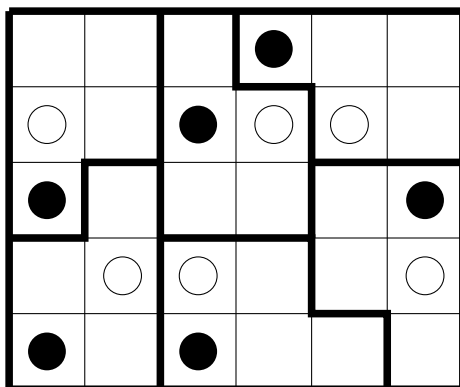
Hlavalamy

Hlavalam 1:

Zamestnanci supermarketu Lomoš si chcú rozdeliť čokoládu, ktorá má v sebe svetlé a tmavé hrozienka ako na obrázku. Každý zamestnanec chce kúsok s obvodom 10, obsahom 5, jedným svetlým hrozičkom a jedným tmavým hrozičkom. Ako a koľkí zamestnanci sa mohli podeliť?

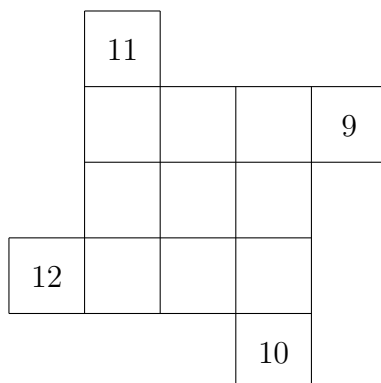


Výsledok:



Hlavalam 2:

V supermarkete Lomoš nainštalovali do šatní zamestnancom nové nástenné skrinky. Prišiel im ale nepodarený kus a číslom označené sú len 4 skrinky tak ako na obrázku. Skladník Ľubo dostal za úlohu označiť zvyšné skrinky. Rozhodol sa, že použije iba čísla od 1 po 9, každú práve raz, a to tak, aby všetky vodorovné i zvislé súčty boli 22.



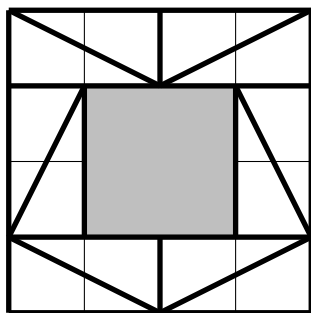
Výsledok: napríklad (sú aj iné správne riešenia)

	11			
	2	7	4	9
	8	9	5	
12	1	6	3	
			10	

Hlavoľam 3:

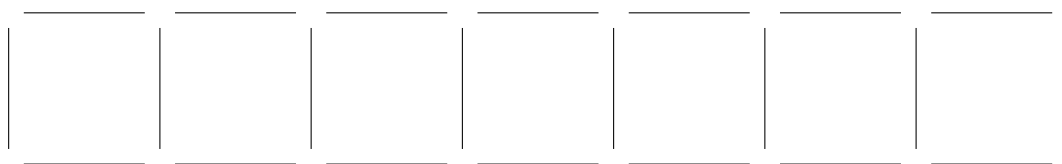
Vedúci prevádzky Peter má kanceláriu tvaru štvorca 4×4 . Chce si do nej kúpiť koberec, tiež tvaru štvorca, tak, aby sa nedotýkal stien kancelárie, a aby ostalo na nepokrytej podlahe 12 rovnako veľkých trojuholníkových území. Ako má koberec do kancelárie umiestniť?

Výsledok: napríklad (sú aj iné správne riešenia)

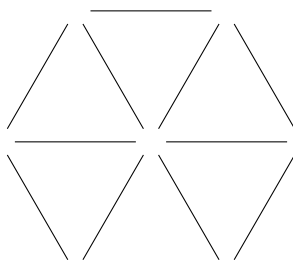


Hlavoľam 4:

Skladník Ľubo vyrobil do zeleninového oddelenia 6 spojených debničiek z devätnástich dosiek ako na obrázku. V noci mu však ktosi sedem dosiek ukradol. Dokáže Ľubo aj teraz zo zvyšných dosiek vytvoriť 6 debničiek? Ak áno, ako?



Výsledok: pravidelný šesťuholník s uhlopriečkami alebo aj iné správne riešenia



Lomihlav

Lomihlav je matematická súťaž organizovaná Združením STROM a Prírodovedeckou fakultou Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach pre žiakov základných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií. V zime roku 2023 sa koná už 22. ročník tejto súťaže.

Trvanie súťaže je magických 99 minút. Na začiatku každý tím dostane 6 matematických úloh a 1 bonus (vo forme hlavolamu alebo hádanky). Po úspešnom vyrátaní úlohy vymení tím úlohu za novú. Po každej päťici správne vyriešených úloh tím dostane jeden bonus (vo forme hlavolamu alebo hádanky). Bonus sa odovzdáva rovnako ako úloha, ale už zaň tím nedostáva novú úlohu, iba sa mu zarátavajú body.

Tímy získavajú body podľa ročníkov súťažiach v tíme, a to podľa nasledovnej tabuľky:

Ročník				Správny výsledok	
1. žiak	2. žiak	3. žiak	4. žiak	úloha	bonus
7	7	7	7	3,80	2
7	7	7	8	3,70	2
7	7	7	9	3,60	2
7	7	8	8	3,60	2
7	7	8	9	3,50	2
7	7	9	9	3,40	2
7	8	8	8	3,50	2
7	8	8	9	3,40	2
7	8	9	9	3,30	2
7	9	9	9	3,20	2
8	8	8	8	3,40	2
8	8	8	9	3,30	2
8	8	9	9	3,20	2
8	9	9	9	3,10	2
9	9	9	9	3,00	2

Zadania starších ročníkov nájdete na matik.strom.sk/sk/lomihlav.

názov: **Lomihlav – 1.12.2023**
vydávatelia: Združenie STROM
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta
web: matik.strom.sk/sk/lomihlav
upjs.sk/prirodovedecka-fakulta/