Mamut

Košice a Poprad, 31. 5. 2024

Ľahké

Ľahké 1:

Jančiho taxikárska služba pôsobí v troch mestách. V každom meste zamestnáva troch dispečerov. Každý dispečer koordinuje troch taxikárov. Koľko najviac taxikárov pracuje v Jančiho taxikárskej službe?

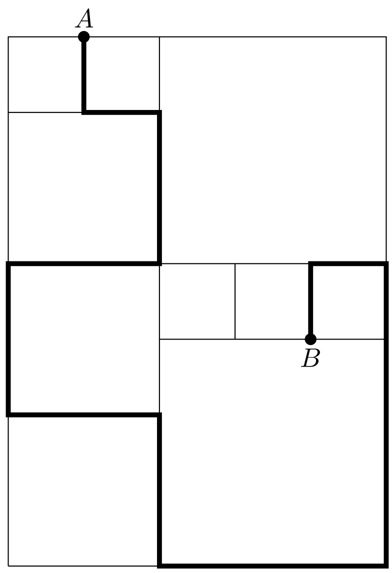
Výsledok: 27

Riešenie:

Keďže v každom z troch miest sa nachádzajú traja dispečeri, tak v Jančiho službe je spolu najviac $3 \cdot 3 = 9$ dispečerov. Zároveň, ak na každého dispečera pripadajú traja taxikári, tak je v Jančiho službe dokopy najviac $9 \cdot 3 = 27$ taxikárov.

Ľahké 2:

Taxikár Janči viezol svojho kolegu v noci domov. Kvôli viacerým dopravným komplikáciám musel zvoliť pomerne netradičnú trasu (ako na obrázku). Strana najmenšieho štvorca má dĺžku 2 km. Koľko kilometrov prešiel Janči pri prevoze zákazníka z miesta A do miesta B?



Výsledok: 42 km

Riešenie:

Na obrázku vidíme 3 druhy štvorcov – najmenšie majú strany dĺžky 2 km, stredné dĺžky 4 km (2-krát strana malého štvorca) a najväčšie strany dĺžky 6 km (3-krát strana malého štvorca). Tieto dĺžky môžeme ľahko vyčítať z obrázka, keďže väčšie štvorce susedia s tými najmenšími. Teraz si môžeme zrátať celú cestu z bodu A do B tak, že len sčítame koľko strán a ktorého typu štvorca sme prešli. Päťkrát sme prešli po najmenších, päťkrát po stredných a dvakrát po najväčších. Výsledok je teda $5 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 42$ km.

Ľahké 3:

Jančiho taxík prejde s plnou nádržou vzdialenosť 76 km. Janči potrebuje odviesť zákazníka do vedľajšieho mesta vzdialeného 380 km. Koľkokrát potrebuje Janči po ceste natankovať, ak má teraz v aute natankovanú plnú nádrž?

Výsledok: 4

Riešenie:

Počet potrebných plných nádrží získame jednoducho vydelením $380 : 76 = 5$. Netreba však zabudnúť, že Janči už začínal s plnou nádržou, takže jednu odrátame. Dokopy preto musel natankovať 4-krát.

Ľahké 4:

Janči vozí svojich zákazníkov na štyroch vozidlách značiek Audi, BMW, Citroën a Dacia. Každú noc Janči svoje taxíky dôkladne zaparkuje vedľa seba. Janči je však poverčivý, preto autá vždy zaparkuje tak, aby Audi s BMW nestáli vedľa seba, aby BMW s Citroënom nestáli vedľa seba a aby Citroën s Daciou nestáli vedľa seba. Koľkými spôsobmi dokáže Janči zaparkovať svoje vozidlá?

Výsledok: 2

Riešenie:

BMW nemôže byť vedľa Audi ani Citroënu, preto musí susediť iba s jedným autom, čo znamená, že musí byť na kraji. Podobne to platí aj pre Citroën. Vieme teda, že BMW a Citroën sú určite na kraji. Keďže BMW nesmie susediť s Audi a Citroënom, musí susediť s Daciou. Keďže Citroën nesmie mať vedľa seba ani BMW, ani Daciu, musí susediť s Audi. Máme preto len dve možnosti, ako vedľa seba taxíky zaparkovať. Buď v poradí BMW, Dacia, Audi a Citroën, alebo v opačnom poradí Citroën, Audi, Dacia, BMW.

Ľahké 5:

Jančiho taxikárska služba mala v cenníku uvedené tri sumy, ktorých súčet je 649 €. V poslednej dobe ale trpela Jančiho spoločnosť nedostatkom zákazníkov, a tak sa Jančiho šéf rozhodol znížiť sumy v cenníku, každú o rovnakú hodnotu. Nakoniec boli v cenníku uvedené sumy 201 €, 205 € a 213 €. Aký bol ciferný súčet čísel v pôvodnom cenníku?

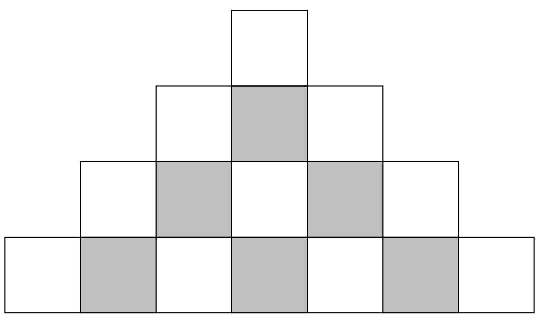
Výsledok: 19

Riešenie:

Ak sčítame tri výsledné sumy, tak dostaneme sumu 619 €. Vidíme, že rozdiel súčtu pôvodných cien a súčtu nových cien je $649\,€ - 619\,€ = 30\,€$. Dokopy sa v cenníku nachádzajú tri sumy, ktoré boli všetky znížené o rovnakú sumu, takže 30 je trojnásobkom sumy, o ktorú sa znižovali pôvodné ceny. Pôvodné ceny sa preto znížili o $30\,€ : 3 = 10\,€$. Ak prirátame 10 € ku každej zo znížených cien, dostaneme pôvodné ceny 211 €, 215 €, 223 €. Súčet cifier v týchto sumách je $2+1+1+2+1+5+2+2+3 = 19$.

Ľahké 6:

Jančiho šéf sa rozhodol vylepšiť firemné logo. Rozhodol sa, že logo bude pozostávať z viacerých riadkov, pričom v každom riadku sa budú striedať biele a sivé políčka tak, ako na obrázku. Koľko sivých políčok sa bude nachádzať v 2024. riadku nového loga?



Výsledok: 2023

Riešenie:

Môžeme si všimnúť, že v každom riadku, okrem prvého, nám pribudne 1 sivé a 1 biele políčko. V prvom riadku začíname s 0 sivými políčkami, keďže v každom ďalšom nám pribudne práve 1 sivé políčko, tak počet sivých políčok v danom riadku je o jeden menší ako je poradové číslo daného riadku. Z toho vyplýva, že na riadku 2024 bude 2023 sivých políčok.

Ľahké 7:

V garážach Jančiho spoločnosti sú odložené pneumatiky v siedmych rovnako veľkých kopách. Tri kopy pozostávajú zo zimných pneumatík, ostatné z letných. Letných pneumatík je uskladnených 120. Koľko pneumatík je uskladnených dokopy?

Výsledok: 210

Riešenie:

Keďže vieme, že spolu je 7 kôp, z čoho 3 obsahujú len zimné pneumatiky a ostatné len letné, tak kopy s letnými sú $7 - 3 = 4$. Ďalej vieme, že vo všetkých kopách s letnými je spolu 120 pneumatík. Keďže sú všetky kopy rovnako veľké, tak rozdelíme 120 pneumatík rovnomerne medzi tieto 4 kopy, čiže v každej kope je $120 : 4 = 30$ pneumatík. Vieme, že kôp je spolu 7 a všetky sú rovnako veľké. Keďže v jednej kope je 30 pneumatík, spolu ich je $7 \cdot 30 = 210$.

Ľahké 8:

Jančiho obľúbený taxík sa pokazil, preto ho musel odviezť do servisu. Počas opravných prác mechanici zistili, že musia prepíliť výfukovú rúru. Najprv ju rozrezali štyroma rezmi. Šéfovi mechanikov sa to však zdalo málo, a tak nariadil každú časť z pôvodnej rúry okrem jednej prepíliť ešte dvoma rezmi. Na koľko najmenej častí bola nakoniec prepílená Jančiho výfuková rúra?

Výsledok: 13

Riešenie:

Vieme, že každý rez nám pridá najmenej jednu novú časť výfukovej rúry. Začíname s 1 celou rúrou a najprv ju prerežeme 4 rezmi, čiže pridáme najmenej 4 nové časti. Z toho vyplýva, že momentálne máme aspoň $1 + 4 = 5$ častí. Ďalej máme prerezať všetky časti, ktoré máme, okrem jednej, ešte 2 rezmi. To znamená, že najmenej $5 - 1 = 4$ musíme prerezať osobitne ďalšími 2 rezmi. Čiže z každej časti budú po prerezaní najmenej $1 + 2 = 3$ časti. Prerezávali sme až 4 takéto časti rúry, čiže spolu máme $4 \cdot 3 = 12$ častí, ku ktorým máme ešte jednu, ktorú sme v druhom kole rezania neprerezávali, čo je spolu $12 + 1 = 13$ častí. Jančiho výfuková rúra bola teda nakoniec prerezaná na najmenej 13 častí.

Ľahké 9:

Nastal čas, aby si Janči kúpil nový taxík. Janči bude spokojnejší, keď sériové číslo jeho nového vozidla bude jedno z jeho šťastných čísel. Jančiho šťastné čísla sú dvojciferné, párne a zložené z cifier 0, 3, 6, 8 alebo 9, nikdy ale neobsahujú tú istú cifru dvakrát. Koľko má Janči šťastných čísel?

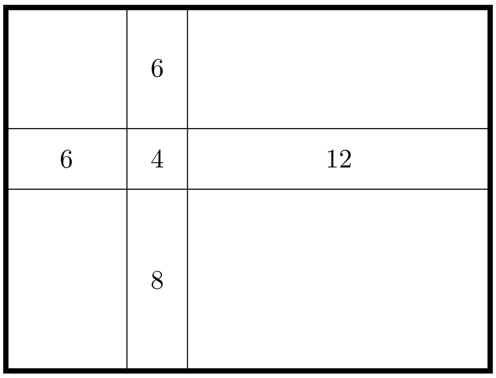
Výsledok: 10

Riešenie:

Keďže je Jančiho číslo párne, musí končiť párnou cifrou, teda 0, 6 alebo 8. Pokiaľ končí cifrou 0, začínať môže ktoroukoľvek zo zvyšných cifier, to sú 4 možnosti. Pokiaľ začína cifrou 6 alebo 8, môže začínať ktoroukoľvek zo zvyšných cifier okrem nuly. To sú pre každé z nich 3 možnosti. To mu dokopy dáva $4 + 3 + 3 = 10$ možností.

Ľahké 10:

Taxislužba má parkovisko rozdelené na 9 parkovacích miest. V niektorých z nich sú napísané ich **obsahy**. Určite **obsah** celého parkoviska, ak dĺžky strán všetkých parkovacích miest sú celočíselné.



Výsledok: 99

Riešenie:

Začnime so stredným útvarom s obsahom 4. Jeho strany môžu mať buď dĺžky 1 a 4, alebo 2 a 2. Ak by sme dostali tento obsah súčinom strán dĺžok 1 a 4, znamenalo by to, že aj jeden z útvarov s obsahom 6 by musel mať jednu dvojicu strán dĺžky 4. Číslo 4 však so žiadnym iným celým číslom nedáva súčin 6, preto stredný útvar nesmie mať strany dĺžok 1 a 4, ale musí mať dĺžky 2 a 2.

To znamená, že parkovacie miesto s obsahom 8 má jednu dvojicu strán dlhých 2. Strany zo zvyšnej dvojice budú mať preto dĺžku $8 : 2 = 4$. Pri parkovacom mieste s obsahom 12 má útvar jednu dvojicu strán dlhých 2, čiže druhá dvojica strán má dĺžku $12 : 2 = 6$. Pri parkovacích miestach s obsahom 6 má útvar jednu dvojicu strán dlhých 2, čiže druhá dvojica strán v každom zo spomínaných parkovacích miest má dĺžku $6 : 2 = 3$.

Dlhšie strany parkoviska majú dĺžku $3+2+6 = 11$ a kratšie strany majú $3+2+4 = 9$. Obsah celého parkoviska je teda $11 \cdot 9 = 99$.

Ľahké 11:

Janči sa snaží potešiť svojich zákazníkov, a tak im ponúka počas jazdy občerstvenie z minichladničky. Aktuálne má v chladničke uložených 67 taxikeksov a 43 sáčkov lentaxiliek. To sa Jančimu zdalo málo, a tak šiel do obchodu dokúpiť zásoby. V obchode predávajú len balenia, ktoré obsahujú 8 taxikeksov spolu s 11 vrecúškami lentaxiliek. Koľko balení musí Janči kúpiť v obchode, aby mal v minichladničke rovnako veľa taxikeksov ako vrecúšok lentaxiliek?

Výsledok: 8

Riešenie:

Zo zadania vyplýva, že v jednom balení je vrecúšok s lentaxilkami o $11 - 8 = 3$ viac ako taxikeksov, teda kúpou každého ďalšieho balenia bude mať Janči o 3 vrecúška lentaxiliek oproti počtu taxikeksov viac. Momentálne má Janči o $67 - 43 = 24$ taxikeksov viac ako vrecúšok lentaxiliek, teda na to, aby tento rozdiel vyrovnal a zvýšil počet vrecúšok lentaxiliek oproti počtu taxikeksov, musí dokúpiť $24 : 3 = 8$ balení.

Ľahké 12:

Taxikári Janka, Braňo, Lujza a Ďuro jazdia každý na inom aute. K dispozícii majú červené auto, žlté auto, zelené auto a modré auto. Taxikári o svojich autách vedia, že:

- Janka nemá zelené auto,
- na žltom aute jazdí chlapec,
- Lujza má modré auto a
- Ďuro nejazdí na zelenom aute.

Kto jazdí na ktorom aute?

Výsledok: Janka – červené, Braňo – zelené, Lujza – modré, Ďuro – žlté

Riešenie:

Zo zadania vieme, že Lujza má modré auto. Janka nemá zelené auto, tiež nemá žlté, lebo na tom jazdí chlapec. Nemá ani modré, lebo to má Lujza. Janka teda jazdí na červenom aute. Ďurovi a Braňovi ostávajú ešte žlté a zelené auto, a keďže Ďuro nejazdí na zelenom, musí jazdiť na žltom. Braňovi teda ostáva zelené auto.

Ľahké 13:

Šiesti taxikári po službe hádzali kockou a každému padlo iné číslo. Janči hodil dvakrát viac ako Braňo, Caco hodil trikrát viac ako Braňo a Ďuro trikrát viac ako Erik. Koľko padlo Filipovi?

Výsledok: 5

Riešenie:

Medzi číslami 1, 2, 3, 4, 5 a 6 sú násobkami trojky len čísla 3 a 6. Caco a Ďuro museli hodiť práve jedno z týchto čísel, lebo inak by nevychádzali čísla, ktoré mali hodiť Braňo a Erik. Keby Caco hodil 3, Ďuro by hodil 6. Braňo by hodil trikrát menej ako Caco, čiže 1. Janči by hodil dvakrát viac ako Braňo, teda 2. Erik by hodil trikrát menej ako Ďuro, ktorý hodil 6, čo je 2. Dvojku však už hodil aj Janči a dvaja nemohli podľa zadania hodiť to isté číslo. Táto možnosť preto nevychádza.

To znamená, že Caco musel hodiť 6 a Ďuro 3. Braňo teda hodil 2, Janči dvakrát viac ako Braňo, čiže 4 a Erik trikrát menej ako Ďuro, teda hodil 1. Jediné nehodené číslo, a teda aj číslo, ktoré hodil Filip, je 5.

Ľahké 14:

V taxikárskej súťaži je možné dostať 2 alebo 3 body za jednu disciplínu. Janči sa zúčastnil 42 disciplín. Koľko rôznych počtov bodov mohol získať?

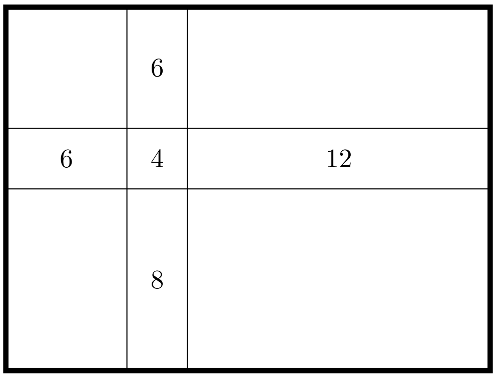
Výsledok: 43

Riešenie:

Ak by Janči dostal za každú disciplínu 2 body, tak by spolu dostal $42 \cdot 2 = 84$ bodov. Každú disciplínu, za ktorú dostal 2 body, by sme mohli nahradiť disciplínou, za ktorú dostal 3 body. Po každej takejto zámene Jančimu pribudne 1 bod. Takto vieme Jančimu zmeniť všetkých 42 disciplín, a tak zväčšiť pôvodných 84 bodov 42-krát o 1 bod, až pokým nedosiahneme maximálny počet bodov $42 \cdot 3 = 126$. Spolu to je 43 rôznych počtov bodov, ktoré Janči mohol získať.

Ľahké 15:

Konkurenčná taxislužba má parkovisko rozdelené tiež na 9 parkovacích miest. V niektorých z nich sú napísané ich **obvody**. Určite **obvod** celého parkoviska, ak dĺžky strán všetkých parkovacích miest sú celočíselné.



Výsledok: 28

Riešenie:

Začnime so stredným útvarom s obvodom 4. Na to, aby sme dostali obvod 4, musí byť každá strana dlhá 1, a teda pôjde o štvorec.

Pri parkovacích miestach s obvodom 6 už poznáme dĺžku dvoch strán, ktoré susedia so štvorcom, každá je dlhá 1, preto spolu budú mať súčet 2. Zvyšné dve strany majú dokopy dĺžku $6 - 2 = 4$, takže každá z nich bude dlhá 2.

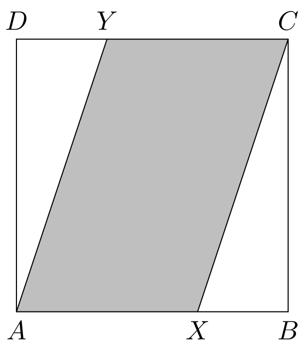
Parkovacie miesto s obvodom 8 má dve strany dlhé 1. Zvyšné dve strany sú rovnako dlhé a majú dokopy dĺžku $8 - 2 = 6$, teda každá z nich bude dlhá 3.

Pri parkovacom mieste s obvodom 12 majú dve strany dĺžku 1, čiže zvyšné dve strany majú dokopy $12 - 2 = 10$. Keďže sú rovnako dlhé, každá z nich bude dlhá 5.

Dlhšie strany parkoviska majú dĺžku $2 + 1 + 5 = 8$ a kratšie strany majú $2 + 1 + 3 = 6$. Obvod celého parkoviska je teda $8 + 6 + 8 + 6 = 28$.

Ľahké 16:

Janči sa spolu s kolegami musel zúčastniť školenia, na ktorom im predstavili novú dopravnú značku. Značka má tvar štvorca so šikmým sivým pruhom ako na obrázku. Úsečka AX má dĺžku 40 cm. Dĺžka úsečiek XB a DY je 20 cm. Aký **obsah** má tmavý pruh?



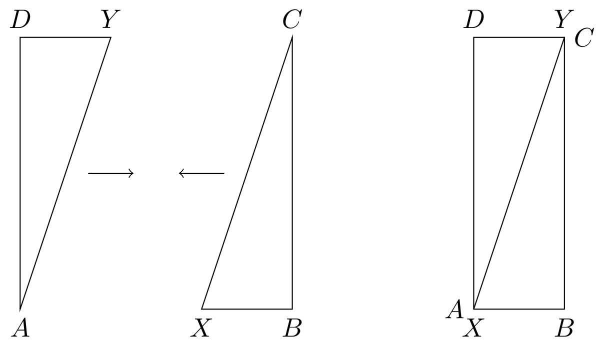
Výsledok: $2400\,\mathrm{cm}^2$

Riešenie:

Keďže $|AX| = 40\,\text{cm}$ a $|XB| = 20\,\text{cm}$, strana štvorca bude dlhá $40\,\text{cm} + 20\,\text{cm} = 60\,\text{cm}$. Obsah celého štvorca je $60 \cdot 60 = 3600\,\text{cm}^2$.

Keď odčítame obsahy trojuholníkov XBC a YDA od obsahu štvorca $ABCD$, dostaneme obsah sivého pruhu.

Všimnime si, že trojuholník XBC má pravý uhol pri vrchole B a strany XB a BC dĺžok $20\,\text{cm}$ a $60\,\text{cm}$. Rovnako má pravý uhol a strany týchto dĺžok aj trojuholník YDA. Preto môžeme priložiť tieto trojuholníky k sebe ako na obrázku, čím dostaneme obdĺžnik.



Obsah tohto obdĺžnika vypočítame veľmi jednoducho – ako súčin jeho strán, teda $20 \cdot 60 = 1200\,\text{cm}^2$.

Obsah tmavého pruhu teda bude $3600\,\text{cm}^2 - 1200\,\text{cm}^2 = 2400\,\text{cm}^2$.

Ľahké 17:

Taxikár Janči si chcel pred službou v bankomate rozmeniť hotovosť. Keď však do bankomatu vhodil 50 peňazí, nič sa nestalo – bankomat bol asi pokazený. Keď sa chcel Janči uistiť, že má u seba ešte dosť hotovosti, zistil, že sa mu to, čo mu ostalo vo vrecku, použitím bankomatu zázračne strojnásobilo. Zaujímavé je, že má teraz presne toľko peňazí, koľko mal pred vhodením peňazí do bankomatu. Koľko má teraz peňazí?

Výsledok: 75

Riešenie:

Zo zadania vieme, že suma, ktorú mal Janči na začiatku, je rovná číslu, ktoré dostaneme, keď od tejto sumy odčítame 50 a následne ju vynásobíme 3. Z toho vyplýva, že po vhodení 50 peňazí do bankomatu Jančimu ostala tretina jeho úspor. Peniaze, ktoré vhodil, teda museli tvoriť dve tretiny jeho úspor. Keď 50 peňazí tvorí dve tretiny pôvodných Jančiho úspor, jedna tretina jeho úspor bude $50 : 2 = 25$ peňazí. Celé Jančiho úspory teda sú $25 \cdot 3 = 75$ peňazí, čo je toľko, koľko mal na začiatku, aj koľko má teraz.

Ľahké 18:

Janči naháňa svojho kolegu Peťa. Na začiatku stojí Janči pri pošte a Peťo stojí 20 metrov od pošty. Jančiho koleso po jednom otočení prejde 1 meter, Peťovo koleso prejde po jednom otočení 50 centimetrov. Za každé tri otočenia Jančiho kolesa sa Peťovo koleso otočí 4-krát. Koľko metrov od pošty bude Janči v momente, keď dobehne Peťa?

Výsledok: 60

Riešenie:

Keďže zo zadania vieme, že za každé 3 otočenia Jančiho kolesa sa Peťovo koleso otočí 4-krát, skúsme si vypočítať, koľko metrov prejdú Janči a Peťo za tieto počty otočení kolesa. Janči prejde za 3 otočenia svojho kolesa $3 \cdot 1 = 3$ metre a Peťo prejde za 4 otočenia $4 \cdot 50 = 200$ cm, teda 2 metre, čo je o 1 meter menej ako Janči za ten istý čas. Z toho vyplýva, že za každé 3 metre, ktoré Janči prejde, dobehne Peťa o 1 meter. Teda ak stojí Janči na začiatku 20 metrov za Peťom, na to, aby ho dobehol, mu treba prejsť $20 \cdot 3 = 60$ metrov.

Ľahké 19:

Konkurenčná taxislužba je tvorená 5555 zamestnancami. Na 10 taxikárov pripadá jeden dispečer. Na 5 dispečerov pripadá 1 automechanik. Na 9 automechanikov pripadá 1 manažér. Koľko taxikárov pracuje v taxislužbe?

Výsledok: 4950

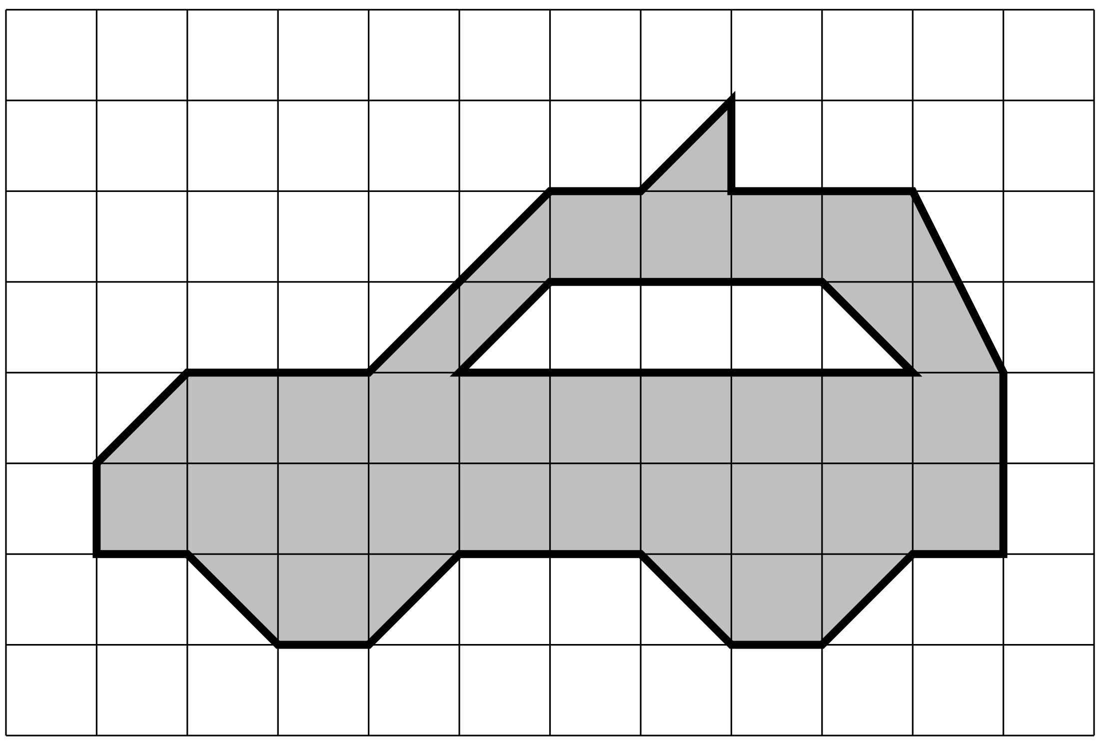
Riešenie:

Keďže na jedného manažéra pripadá 9 automechanikov a na jedného automechanika 5 dispečerov, na jedného manažéra bude dokopy pripadať $5 \cdot 9 = 45$ dispečerov. Na každého dispečera ešte pripadá 10 taxikárov. Z toho vyplýva, že na jedného manažéra pripadá $45 \cdot 10 = 450$ taxikárov, 45 dispečerov a 9 automechanikov. To je dokopy $450 + 45 + 9 = 504$ ľudí, s prirátaním manažéra 505 ľudí.

Ak by sme taxislužbu rozdelili na skupiny podľa manažérov, vzniklo by nám $5555 : 505 = 11$ takýchto 505-členných skupín. Na jedného manažéra pripadá 450 taxikárov, čo znamená, že dokopy je v taxislužbe $11 \cdot 450 = 4950$ taxikárov.

Ľahké 20:

Vypočítajte obsah kresby Jančiho taxíka (obsah sivej plochy). Dĺžka jedného štvorčeka je 1.

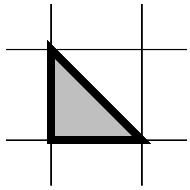


Výsledok: 31

Riešenie:

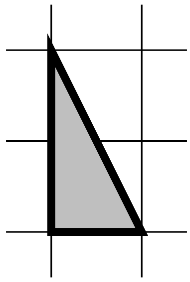
Jeden štvorček má obsah $1 \cdot 1 = 1$.

Takýto trojuholník – pomenujme ho malý trojuholník:



je vytvorený, keď štvorček rozdelíme po uhlopriečke. A keďže uhlopriečka rozdeľuje štvorec na polovicu, malý trojuholník má obsah $(1 \cdot 1) : 2 = 0,5$.

Takýto trojuholník – pomenujme ho veľký trojuholník:

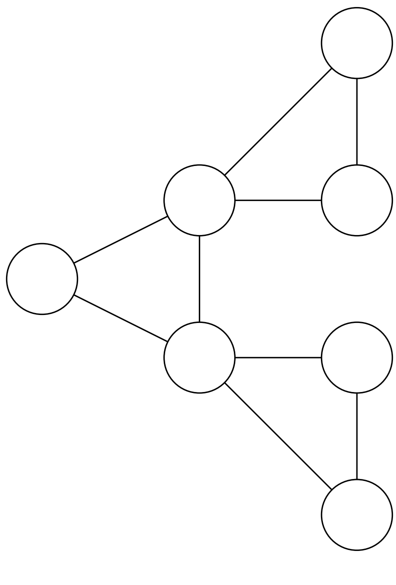


je vytvorený, keď obdĺžnik tvorený dvomi štvorčekmi rozdelíme po uhlopriečke. A keďže uhlopriečka rozdeľuje obdĺžnik na polovicu, veľký trojuholník má obsah $(2 \cdot 1) : 2 = 1$.

Štvorčekov je dokopy na obrázku 25, malých trojuholníkov je 10 a veľký trojuholník je na obrázku len jeden. Obsah celej kresby je teda $25 \cdot 1 + 10 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1 = 31$.

Ľahké 21:

Keď taxikár Janči nemá zákazníkov, lúšti krížovku ako na obrázku. Do krúžkov na obrázku musí vpísať čísla 1, 2 a 3 tak, aby v krúžkoch, ktoré sú spojené hranou, neboli rovnaké čísla. Aké rôzne súčty môže dostať v štyroch krúžkoch, ktoré sú najviac napravo? Ako výsledok odovzdajte **súčet** týchto súčtov.



Výsledok: 24

Riešenie:

Ak by Janči do krúžku úplne naľavo napísal číslo 1, v ďalších dvoch krúžkoch by museli byť čísla 2 a 3. Nezáleží, ktoré kde, pretože v každom prípade by potom za číslom 2 museli byť v ďalších dvoch krúžkoch čísla 1 a 3. Za číslom 3 by zas museli byť čísla 1 a 2. V prípade, že Janči napísal do krúžku naľavo číslo 1, vždy dostane v krúžkoch napravo súčet $1 + 3 + 1 + 2 = 7$.

Ak by Janči do krúžku naľavo napísal číslo 2, v ďalších dvoch by museli byť čísla 1 a 3 a v posledných štyroch by museli byť čísla $2, 3$ a $1, 2$. Súčet by teda vždy bol 8.

Ak by Janči do krúžku naľavo napísal číslo 3, v ďalších dvoch by museli byť čísla 1 a 2 a v posledných štyroch by museli byť čísla $2, 3$ a $1, 3$. Súčet by teda vždy bol 9.

Súčet týchto súčtov je $7 + 8 + 9 = 24$.

Ľahké 22:

Taxikár Janči sa rozhoduje, na ktorý zo 7 prevodových stupňov chce preradiť. Zistil, že prevodovka v jeho taxíku funguje veľmi zaujímavo. Môže preradiť o dva stupne vyššie alebo na stupeň s polovičnou hodnotou toho, na ktorom je (napr. zo šiesteho stupňa na tretí stupeň; toto funguje, iba ak je číslo stupňa párne, a teda výsledok je celočíselný). Na akom stupni potrebuje začať, aby vedel zaradiť do čo najviac rôznych prevodových stupňov, pričom má neobmedzený počet preradení? Ako výsledok odovzdajte **súčin** poradových čísel všetkých stupňov, na ktorých vie začať.

Výsledok: 8

Riešenie:

Na obrázku vidíme, ako je možné v Jančiho taxíku preradzovať medzi jednotlivými prevodmi.

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r] \arrow[dd, leftrightarrow] & 1 \arrow[dr] & & & \\ & & 3 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 7 \\ 4 \arrow[r] & 6 \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

Všimnime si, že akonáhle zaradíme prevod iný ako 2 alebo 4, tak môžeme vždy preradiť len na jeden iný stupeň, až kým nezaradíme stupeň 7, z ktorého už nevieme ďalej preradiť. Ďalej môžeme vidieť, že v jednej postupnosti preraďovaní sa nevieme dostať naraz na stupeň 1 aj 6. Najlepšie je teda začať na stupni 2 alebo 4, pričom z oboch možností dokážeme navštíviť všetky prevody okrem jedného.

Keďže začať môžeme na stupni 2 alebo 4, požadovaným výsledkom, teda ich súčinom, je $2 \cdot 4 = 8$.

Ľahké 23:

Číslo na Jančiho taxislužbu je najmenší 5-ciferný palindróm *(pozn.: palindróm je číslo, ktoré sa spredu číta rovnako ako odzadu, čiže napr. čísla 13831 alebo 42524 sú palindrómy)*, ktorý spĺňa tieto podmienky:

- číslo je párne,
- po pričítaní 6 bude číslo deliteľné číslom 5 a
- ciferný súčet je 15.

Na aké číslo treba zavolať, ak chcete, aby vás Janči odviezol?

Výsledok: 40704

Riešenie:

Keďže Jančiho číslo je párne, bude mať na mieste jednotiek párnu cifru. Keď k Jančiho číslu pričítame 6, bude deliteľné číslom 5, teda bude mať na mieste jednotiek cifru 0 alebo 5. Aby sme tu po pričítaní 6 dostali cifru 5, Jančiho číslo by muselo mať na mieste jednotiek cifru 9, čo nemôže, keďže táto cifra má byť párna. Aby sme tu po pričítaní 6 dostali cifru 0, Jančiho číslo by muselo mať na mieste jednotiek cifru 4. To zadaniu vyhovuje.

Keďže Jančiho číslo je palindróm, bude mať rovnakú cifru aj na začiatku, teda na mieste desaťtisícok. Aby bolo Jančiho číslo čo najmenšie, musí mať na mieste tisícok čo najmenšiu cifru, teda cifru 0. Keďže Jančiho číslo je palindróm, na mieste desiatok bude rovnaká cifra, teda 0. Aby bol ciferný súčet 15, cifra na mieste stoviek musí byť $15 - 4 - 4 - 0 - 0 = 7$. Číslo, na ktoré treba zavolať, je preto 40704.

Ľahké 24:

Jančiho platy za posledné dva týždne vieme označiť ako $\overline{XYX}$ a $\overline{YXY}$. Platí, že X sa nerovná Y a ani jedna z týchto cifier nie je 0. Koľko existuje rôznych možných súčtov $\overline{XYX} + \overline{YXY}$? *(Pozn.: číslo, ktoré značíme ako $\overline{ABC}$, je trojciferné číslo, ktoré má na mieste stoviek cifru A, na mieste desiatok cifru B a na mieste jednotiek cifru C.)*

Výsledok: 15

Riešenie:

Aby sme mohli porozumieť vzorovému riešeniu, vysvetlime si, ako sa správajú čísla, v ktorých máme nahradené cifry písmenami. Vezmime si napríklad číslo 975: to má na mieste stovák cifru 9, na mieste desiatok cifru 7 a na mieste jednotiek cifru 5. Zároveň tento zápis znamená, že toto číslo vieme rozpísať na súčet niekoľkých stovák, niekoľkých desiatok a niekoľkých jednotiek – ich počet udáva cifra na ich mieste – stovák teda bude 9, desiatok 7 a jednotiek 5. Preto číslo 975 môžeme zapísať ako $9 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5 \cdot 1$. Rovnako môžeme číslo $\overline{ABC}$ zapísať ako $A \cdot 100 + B \cdot 10 + C \cdot 1$.

Teraz sa pozrime naspäť na úlohu. Všimnime si, že sa v oboch číslach Jančiho platov nachádza cifra X raz na mieste stovák, raz na mieste desiatok a raz na mieste jednotiek, preto môžeme povedať, že sa tam nachádza postupne 100-krát, 10-krát a 1-krát, dokopy teda až 111-krát. Rovnako vidíme, že aj cifra Y sa tam nachádza 111-krát.

Keď sčítame hodnoty Jančiho platov, sčítame vlastne tieto hodnoty cifier X a Y, teda v skutočnosti je súčet Jančiho platov rovný 111-násobku súčtu X a Y.

Najmenšie hodnoty, aké môžu cifry X a Y mať, sú 1 a 2 (pričom nezáleží na poradí, keďže obe sú zastúpené v rovnakom počte). Dokopy by tak bol ich súčet 3, a teda celkový súčet Jančiho platov by bol $111 \cdot 3 = 333$.

Najmenšie hodnoty, aké môžu cifry X a Y mať, sú 8 a 9 (pričom opäť nezáleží na poradí). Dokopy by tak bol ich súčet 17, a teda celkový súčet Jančiho platov by bol $111 \cdot 17 = 1887$.

Konkrétne hodnoty aj tak nepotrebujeme, stačí si uvedomiť, že najmenšou hodnotou je 111-násobok čísla 3 a najväčšou 111-násobok čísla 17, pričom hodnoty zodpovedajúce zadaniu môžu byť len násobky čísla 111. Preto môže byť súčet Jančiho platov rovný len 111-násobku z tohto rozmedzia (3 až 17). Dokopy je čísel v tomto rozmedzí 15, a teda počet rôznych súčtov, ktoré úloha hľadá, je práve 15.

Ľahké 25:

Šiesti taxikári sa stretli na firemnom obede a chcú si sadnúť okolo okrúhleho stola. Taxikárka Ala však odmieta sedieť vedľa Braňa. Koľkými spôsobmi si môžu sadnúť? Ak nejakú možnosť dostaneme len rotáciou inej možnosti, považujú sa tieto možnosti za rovnaké.

Výsledok: 72

Riešenie:

Keďže rotácie možnosti sa považujú za tú istú možnosť, môžeme sa na túto úlohu pozrieť z pohľadu jednej osoby. Najjednoduchšie bude, keď sa na úlohu pozrieme z pohľadu Braňa.

Ala odmieta sedieť vedľa Braňa, teda dve z piatich voľných miest jej nevyhovujú. Má 3 možnosti na to, kde si môže sadnúť. Pre každú z týchto možností ma tretí človek 4 voľné miesta, z ktorých si môže vybrať (čiže zatiaľ existuje $3 \cdot 4 = 12$ možností). Pre každú z doterajších možností má následne štvrtý človek 3 voľné miesta na usadenie (teda pre každú z 12 predchádzajúcich možností máme 3 ďalšie, preto ich je už $12 \cdot 3 = 36$) a pre každú možnosť má piaty človek 2 voľné miesta, kam si môže sadnúť (teda pre každú z 36 predchádzajúcich možností máme 2 ďalšie, preto ich je $36 \cdot 2 = 72$). Šiesty človek následne obsadí posledné voľné miesto, čiže výsledný počet možností je 72.

Ľahké 26:

Janči má na autorádiu 4 tlačidlá. Tlačidlo A k číslu, ktoré svieti na displeji rádia, pripočíta 15, tlačidlo B od neho odráta 20, tlačidlo C číslo vynásobí tromi a tlačidlo D aktuálnemu číslu prevráti znamienko (plus na mínus alebo mínus na plus). Na začiatku je na autorádiu číslo 0. Aké najväčšie číslo môžeme na autorádiu získať, ak každé tlačidlo stlačíme práve raz?

Výsledok: 105

Riešenie:

V tejto úlohe pracujeme aj s tzv. zápornými číslami, teda číslami, ktoré sú menšie ako 0. Takéto čísla značíme znamienkom mínus (napr. -1, -2, -3 atď.). Najprv si určíme, aké je najvyššie možné číslo, ktoré na displeji môžeme dostať, a následne ukážeme, že ho dostať aj skutočne vieme.

Pozrime sa teraz na to, čo môžu spôsobiť jednotlivé tlačidlá s číslom na displeji – konkrétne sa pozrieme na to, ako veľmi môžu číslo oddialiť od čísla 0 na číselnej osi.

Tlačidlom A sa číslo na displeji najviac oddiali od čísla 0 na číselnej osi o 15 (napr. číslo 7 sa zmení na 22). Tlačidlo B, ak je číslo na displeji záporné, oddiali toto číslo od čísla 0 na číselnej osi až o 20 (napr. číslo -14 sa zmení na -34). Tlačidlo C číslu na displeji túto vzdialenosť od čísla nula na číselnej osi trikrát predĺži (napr. číslo 15 sa zmení na 45). Tlačidlo D vzdialenosť od čísla 0 na číselnej osi číslu nezmení (napr. číslo -23 je od čísla 0 rovnako vzdialené ako 23).

Aby malo tlačidlo D čo najväčší efekt, musí byť použité na číslo, ktoré je od čísla 0 na číselnej osi čo najďalej. Keďže začíname na začiatku na čísle 0, tlačidlami A a B sa vieme od čísla 0 dokopy vzdialiť o $15 + 20 = 35$, po aplikovaní tlačidla D je tak teoreticky najväčšie číslo, ktoré vieme dostať, $35 \cdot 3 = 105$.

Stlačením tlačidiel v poradí $BDAC$ (najprv sa dostaneme z 0 na -20, následne z -20 na 20, následne z 20 na 35, následne z 35 na 105) získame na autorádiu číslo 105, takže toto je naozaj správnym riešením.

Ľahké 27:

Janči prijíma platby v dvoch menách – dukátoch a toliaroch, pričom hodnota jedného dukátu sa rovná hodnote celočíselného počtu toliarov. Lujza vie, aký je tento počet. Janči povedal Lujze, že má trojciferný počet dukátov aj trojciferný počet toliarov. Lujza mu odvetila, že to jej stačí na to, aby vedela, či sa skrýva väčšia hodnota v jeho dukátoch alebo v toliaroch. Koľko najmenej toliarov má hodnotu jedného dukátu?

Výsledok: 10

Riešenie:

Keďže Lujza vie s istotou povedať, v ktorej mene sa skrýva väčšia hodnota, určite musí byť dukát rovný hodnote viac ako jedného toliaru (ak by sa ich hodnota rovnala, Lujza by nevedela z toho, že je oboch trojciferný počet určiť, ktorých je viac). To znamená, že dukát sa musí rovnať aspoň 2 toliarom, a teda že pre hodnotu niekoľkých dukátov musí byť toliarov v rovnakej hodnote viac.

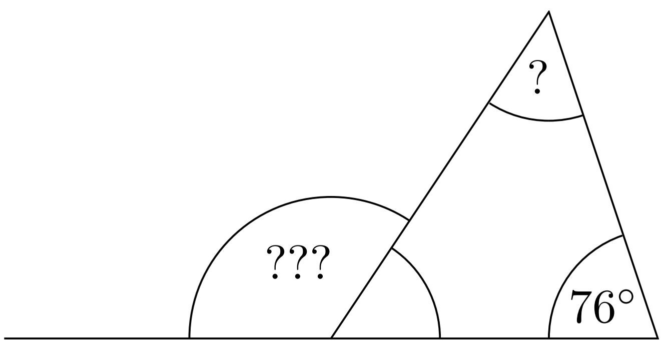
Poďme sa preto pozrieť na hraničné situácie. Najprv sa pozrime na situáciu, kedy by mal najmenší možný počet toliarov (100) a najväčší možný počet dukátov (999). Keďže vieme, že je hodnota dukátu vyššia ako hodnota toliaru a že je toto jedna z možností, ktoré Janči mohol mať pri sebe, určite platí, že sa skrýva väčšia hodnota v jeho dukátoch.

Pozrime sa teraz na opačnú situáciu, ktorá sa môže stať – najväčší možný počet toliarov (999) a najmenší možný počet dukátov (100). Zachováva sa však, že hodnota v dukátoch musí byť väčšia ako hodnota v toliaroch. Preto musí byť dukát rovný aspoň 10 toliarom, vtedy je 100 dukátov rovných 1000 toliarom, čo je viac ako 999. Keby bol dukát rovný 9 toliarom, v dukátoch by mal Janči v tomto prípade 900 toliarov, čo je menej ako 999.

Postupne sme si určili, že dukát musí mať väčšiu hodnotu ako toliar, ukázali sme si, že práve kvôli tomu Lujza vie, že má Janči väčšiu hodnotu v dukátoch, a z hraničnej situácie sme vyhodnotili, že dukát sa musí rovnať aspoň 10 toliarom.

Ľahké 28:

Janči našiel na svojom zasneženom taxíku obrázok. Aká je veľkosť uhla pod otáznikom, ak je uhol pod tromi otáznikmi trikrát väčší?



Výsledok: 38°

Riešenie:

Vieme, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°, to platí aj pre trojuholník na obrázku. Zároveň platí, že aj súčet veľkostí uhlov na priamke tvoriacich tzv. priamy uhol (v našom prípade dvojica uhlov ??? a napravo susediaci s ním) je 180° (pretože tvoria polovicu plného uhla, ktorý má 360°).

Všimnime si, že aj v súčte vnútorných uhlov trojuholníka, aj v súčte spomenutého priameho uhla, sa nachádza uhol susediaci napravo od ??? práve raz. To znamená, že keď sa súčet vnútorných uhlov trojuholníka rovná súčtu uhlov v spomenutom priamom uhle, platí, že aj súčet vnútorných uhlov bez tohto uhla sa bude rovnať súčtu uhlov v priamom uhle bez tohto uhla.

Z toho vyplýva, že uhol označený ??? sa rovná súčtu $76°+?$. Keďže je uhol ??? trikrát väčší ako ?, znamená to, že $76°$ z neho tvorí dve tretiny. Jedna tretina, a teda veľkosť uhla pod otáznikom, je preto $76° : 2 = 38°$.

Ľahké 29:

V roku, keď Janči začínal s taxikárčením, mal január presne štyri utorky a štyri soboty. Janči začal pracovať prvého januára toho roku. Aký deň v týždni to bol?

Výsledok: streda

Riešenie:

Január má 31 dní. Vieme, že január, v ktorom Janči začínal s taxikárčením, mal 4 utorky a 4 soboty. V úlohe sa môžu stať dva prípady – buď je prvá sobota skôr v mesiaci ako prvý utorok, alebo je prvý utorok skôr ako prvá sobota. Poďme si ich teraz rozobrať:

- **Skôr v mesiaci je sobota ako utorok:** Od 1. soboty po 4. sobotu vrátane je 22 dní a po 4. utorok to je 25 dní. V tomto prípade nám ostáva 6 dní, ktoré zatiaľ nepoznáme, tieto dni musia byť rozložené pred a za našimi už určenými 25 dňami. Za posledným utorkom vieme mať maximálne 3 dni (streda, štvrtok, piatok). Pred prvou sobotou vieme mať maximálne 3 dni (streda, štvrtok, piatok). Takže vieme mať 6 dní rozložených iba jedným spôsobom (3 pred, 3 po), a to tak, že mesiac začína stredou.
- **Skôr v mesiaci je utorok ako sobota:** Od 1. utorka po 4. utorok vrátane je 22 dní a po 4. sobotu to je 26 dní. V tomto prípade nám ostáva 5 dní, ktoré zatiaľ nepoznáme, tieto dni musia byť rozložené pred a za našimi už určenými 26 dňami. Za poslednou sobotou vieme mať maximálne 2 dni (nedeľa, pondelok). Pred prvým utorkom vieme mať maximálne 2 dni (nedeľa, pondelok). Takže vieme tak mať rozložené iba 4 dni, čo znamená, že ten piaty deň (aby mal január 31 dní) by musel byť za pondelkom alebo pred nedeľou, čo kvôli počtu utorkov a sobôt nemôže, preto tento prípad nenastane.

Z prejdenia oboch možností, ktoré mohli nastať, vyplýva, že prvým dňom v januári bola streda.

Ľahké 30:

Taxikár Janči si počas služby objednal písmenkovú polievku, v ktorej plávali všetky písmená anglickej abecedy (tzn. ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ). Keď dojedol, ostalo v polievke plávať jediné písmenko. Maťo chcel zistiť, aké písmeno to bolo, a tak mu Janči povolil tri otázky. Maťo sa spýtal nasledovne: Bola to samohláska? Bolo to písmeno z prvej polovice abecedy? Bolo to písmeno zrkadlové podľa zvislej čiary, ktorá prechádza cez stred písmena? Na každú otázku dostal Maťo odpoveď áno alebo nie. Následne už Maťo vedel, o aké písmeno ide. Aké písmeno ostalo plávať v polievke? *(Pozn.: písmeno zrkadlové podľa zvislej čiary prechádzajúcej stredom písmena je napr.* A*, pretože jeho ľavá polovica je zrkadlovým obrazom pravej polovice, napr. písmeno* B *zrkadlové podľa zvislej čiary nie je.)*

Výsledok: E

Riešenie:

Písmenká si vieme rozdeliť do šiestich skupín podľa toho, na ktoré z Maťových otázok by Janči odpovedal áno, keby mu ostalo dané písmenko.

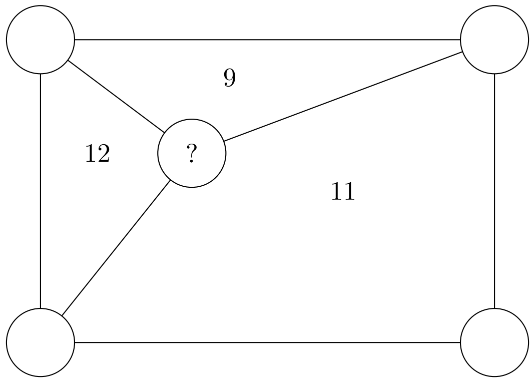
- Áno na všetky: A, I
- Áno len na 1. a 2.: E
- Áno len na 1. a 3.: O, U
- Áno len na 2. a 3.: H, M, V, W, X
- Áno len na 1.: nie sú
- Áno len na 2.: B, C, D, F, G, J, K, L
- Áno len na 3.: T, V
- Nie na všetky: N, P, Q, R, S, Z

Keďže podľa Jančiho odpovedí vedel Maťo určiť, ktoré písmeno mu ostalo, muselo byť toto písmeno v skupine samo. To platí len pre písmeno E.

Stredné

Stredné 1:

Janči pri upratovaní svojho taxíka našiel pod sedadlom spadnutý papier s hlavolamom. V každom krúžku má byť napísané číslo od 1 do 5, každé práve raz. Každé číslo na obrázku je súčtom čísel v krúžkoch v rohoch útvaru, v ktorom je napísané. Aké číslo je pod otáznikom?



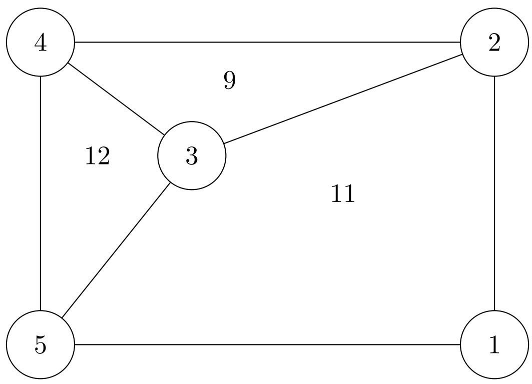
Výsledok: 3

Riešenie:

Na začiatok musíme zistiť, ako vieme jednotlivé súčty dostať:

- číslo 12 vieme dostať pomocou troch čísel jedine ako $3 + 4 + 5$,
- číslo 11 vieme dostať pomocou štyroch čísel len ako $1 + 2 + 3 + 5$,
- číslo 9 vieme dostať pomocou troch čísel buď ako $2 + 3 + 4$, alebo ako $1 + 3 + 5$.

Teraz si môžeme všimnúť, že jediné číslo, ktoré sa nachádza vo všetkých súčtoch bez ohľadu na to, ako vyjadríme číslo 9, je číslo 3. To znamená, že číslo 3 bude ležať v jedinom vrchole spoločnom pre všetky útvary, teda číslo 3 leží pod otáznikom. Správnosť tohto riešenia si vieme skontrolovať vyplnením všetkých krúžkov ako na obrázku.



Stredné 2:

Taxikár Janči sa snaží nakresliť na cestu šípku, ktorá má tvar rovnoramenného trojuholníka s obvodom 17 a celočíselnými dĺžkami strán. Koľkými rôznymi spôsobmi môže šípku nakresliť?

Výsledok: 4

Riešenie:

Najprv si musíme uvedomiť, čo všetko platí pre náš trojuholník.

1. Dve strany sú rovnako dlhé,
2. súčet veľkostí všetkých strán je 17 a
3. súčet veľkostí ľubovoľných dvoch strán je väčší ako veľkosť tretej zo strán, inak by trojuholník nemohol existovať (tento bod nám určuje tzv. trojuholníková nerovnosť, ktorá platí pre ľubovoľný trojuholník).

Z prvej a druhej podmienky vieme vyvodiť, že dĺžka jednej zo strán musí byť nepárne číslo, keďže po tom, čo jej dĺžku odrátame od obvodu, potrebujeme dostať párne číslo, aby zvyšné dve strany mohli byť rovnako dlhé. Poďme si teda vypísať možnosti:

- $17 - 1 = 16$, potom by dĺžky strán by boli 1, 8, 8,
- $17 - 3 = 14$, potom by dĺžky dĺžky strán by boli 3, 7, 7,
- $17 - 5 = 12$, potom by dĺžky strán by boli 5, 6, 6,
- $17 - 7 = 10$, potom by dĺžky strán by boli 7, 5, 5.

Ak by sme sa pokúsili vypísať ďalšiu možnosť, zistili by sme, že by strany museli byť dlhé 9, 4, 4, čo nespĺňa tretiu z našich podmienok. Tu zároveň vidno aj to, že ak by sme si za najväčšie číslo vybrali akékoľvek ďalšie číslo väčšie ako 9, tak tretia podmienka opäť nebude platiť, keďže sa súčet strán 17 musí zachovať, a teda súčet týchto zvyšných dvoch kratších strán bude už len menší. Preto existujú práve štyri spôsoby, ako môžeme šípku nakresliť.

Stredné 3:

Janči si počas pauzy otvoril jedno balenie lentaxiliek. V sáčku boli lentaxilky šiestich rôznych príchutí. Najmenej koľko lentaxiliek musí Janči zjesť, aby mal istotu, že z nejakej príchute určite zjedol aspoň 10 lentaxiliek?

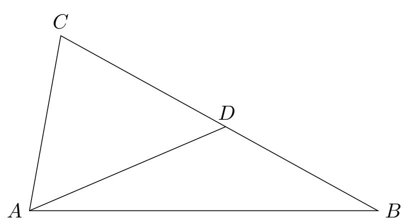
Výsledok: 55

Riešenie:

Pri riešení tejto úlohy si musíme najprv uvedomiť, ako vyzerá najhoršia možná situácia, teda taká, v ktorej Janči zje najväčší možný počet lentaxiliek bez toho, aby splnil podmienku zo zadania. V najhoršom prípade Janči zje najprv z každej príchute po 9 lentaxiliek a až potom z poslednej (už ľubovoľnej) príchute zje desiatu. Aby mal Janči istotu, že z niektorej príchute zje aspoň 10 kúskov, musí zjesť $9 \cdot 6 + 1 = 54 + 1 = 55$ lentaxiliek.

Stredné 4:

Janči má mapu v tvare trojuholníka s mestami A, B, C. Priama vzdialenosť medzi mestami A a B je 6 km, medzi mestami B a C je 8 km a medzi mestami A a C je 4 km. Obvod trojuholníka, ktorý tvoria mestá A, B a D je rovnaký ako obvod trojuholníka, ktorý tvoria mestá A, C a D. Mesto D leží na ceste z mesta B do mesta C. Aká je vzdialenosť miest B a D v kilometroch?



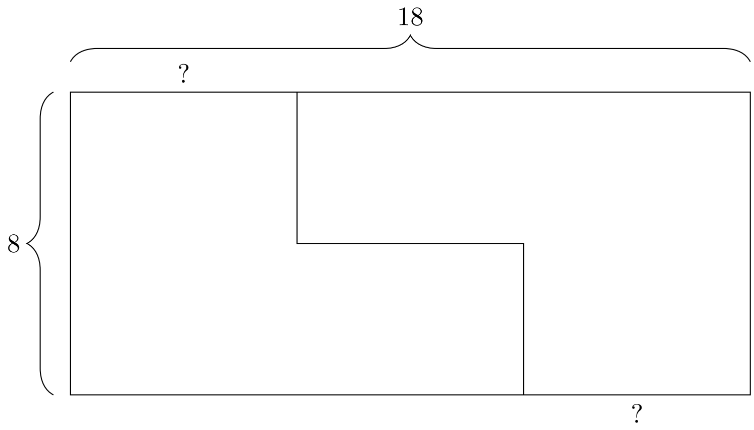
Výsledok: 3

Riešenie:

Úloha hovorí, že obvody trojuholníkov ABD a ACD sú rovnaké. Oba trojuholníky majú spoločnú stranu AD, preto platí, že súčty zvyšných dvoch strán trojuholníkov sa rovnajú. V prvom trojuholníku ostáva dvojica strán AB a BD, v druhom trojuholníku AC a CD. Zo zadania vieme, že je AB o 2 km dlhšia ako AC, preto musí byť BD o 2 km kratšia ako CD. Keďže je súčet týchto dĺžok 8 km, musí byť D od mesta B vzdialené 3 km a od mesta C 5 km.

Stredné 5:

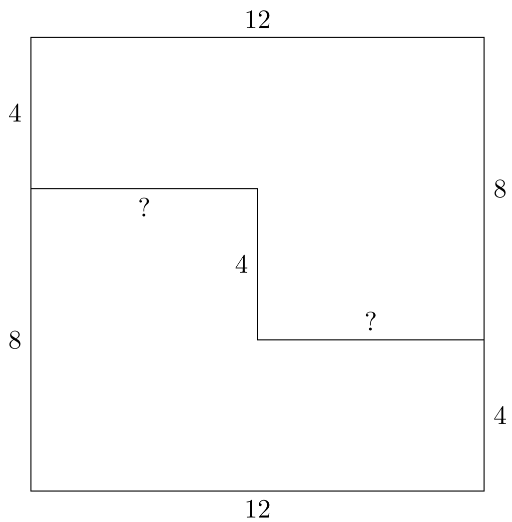
Parkovisko v tvare obdĺžnika je rozdelené na dve rovnaké zóny ako na obrázku. Čísla označujú dĺžku a šírku parkoviska v metroch. Manažér uvažoval nad rekonštrukciou, pri ktorej by obe zóny presunul tak, aby sa tieto dve zóny neprekrývali a aby z nich spolu vznikol štvorec. Aká je veľkosť dĺžky označenej otáznikom?



Výsledok: 6

Riešenie:

Najprv si nakreslime, ako by to vyzeralo, keby sme obe časti preskupili do štvorca.



Z pôvodného obrázku vieme zistiť, že najkratšia strana jednotlivých polovíc je dlhá $8\,\mathrm{m} : 2 = 4\,\mathrm{m}$. Vieme to preto, že tieto dve strany sú rovnako dlhé (keďže obe zóny sú zhodné) a spolu tvoria dĺžku strany obdĺžnika, ktorá má dĺžku 8. To znamená, že po preskupení bude každá strana štvorca dlhá $8\,\mathrm{m} + 4\,\mathrm{m} = 12\,\mathrm{m}$. Teraz si môžeme všimnúť, že dĺžka jedného otáznika sa dá vyjadriť ako $12\,\mathrm{m} : 2 = 6\,\mathrm{m}$. Dĺžka strany vyznačenej otáznikom je teda 6 m.

Stredné 6:

Taxikár Janči išiel so svojím taxíkom na výlet do kopca. Každý deň prešiel 5 km, ale kvôli pokazenej ručnej brzde sa taxík každú noc posunul o 500 m naspäť. Na koľký deň vyšiel Janči na kopec, ak cesta na kopec bola dlhá 41 km?

Výsledok: 9.

Riešenie:

V prvý deň Janči prešiel 5000 m. V ďalšiu noc cúvne o 500 m dozadu a cez deň o 5000 m dopredu, čiže dokopy skončí na konci každého dňa o 4500 m ďalej ako predchádzajúci deň. Počas prvého dňa Janči prešiel 5 km, takže mu zvýšilo 36 km. Ak toto číslo vydelíme počtom metrov, ktoré prejde dokopy za noc a deň, zistíme, že mu to zaberie ešte ďalších $36000 : 4500 = 8$ dní. Po pripočítaní prvého dňa zistíme, že mu to dokopy trvalo 9 dní.

Stredné 7:

Jančiho kamarát Bruno robil test do taxikárskej autoškoly. Test pozostával z 10 otázok, pričom za každú správnu odpoveď dostal Bruno 5 bodov a za každú nesprávnu odpoveď 2 body stratil. Na koľko otázok odpovedal Bruno správne, ak napísal odpoveď ku všetkým 10 otázkam a dosiahol 29 bodov?

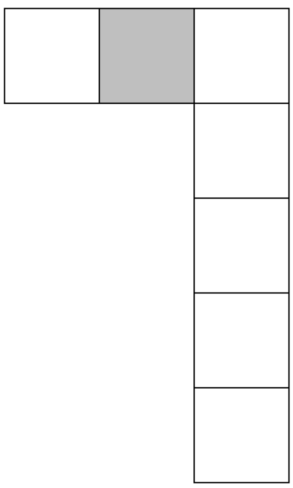
Výsledok: 7

Riešenie:

Ak by Bruno odpovedal na všetky otázky správne, dostal by $5 \cdot 10 = 50$ bodov. Ak by na jednu z nich odpovedal nesprávne, prišiel by o 5 bodov za správnu odpoveď a ubrali by sa mu 2 body za nesprávnu odpoveď, takže dokopy za každú nesprávnu odpoveď prichádza o 7 bodov. Ak mal 29 bodov za správne odpovede, znamená to, že dokopy musel prísť o 21 bodov za nesprávne odpovede, z čoho vyplýva, že nesprávne odpovedal na 3 otázky, čiže správne odpovedal na 7 otázok.

Stredné 8:

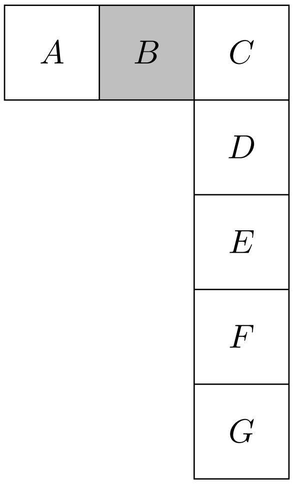
Taxikár Janči sa nudil, a tak sa hral hru, kde „gúľal“ hraciu kocku po plániku ako na obrázku (postupne zľava hore po políčkach doprava dole), pričom na každom políčku ostal odtlačený počet bodiek, ktorým sa stena kocky dotýkala políčka. Dokopy zanechala kocka na plániku 23 bodiek. Určte, koľko bodiek ostalo odtlačených na zafarbenom políčku. *(Pozn.: platí, že protiľahlé steny hracej kocky majú súčet bodiek 7.)*



Výsledok: 2

Riešenie:

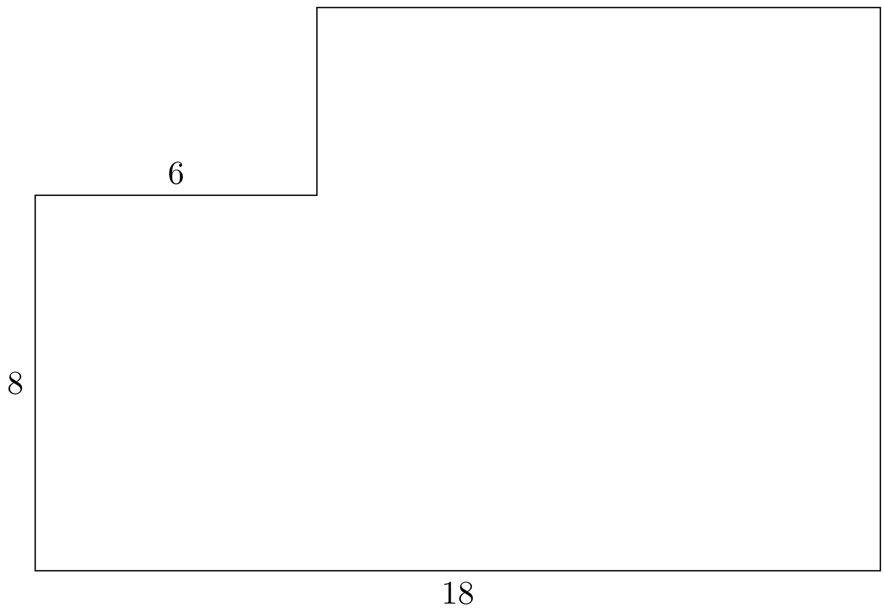
Políčka si postupne označme písmenkami od A do G ako na obrázku.



Keď kocku dvakrát pogúľame rovnakým smerom, na prvom a treťom políčku sa odtlačia spolu protiľahlé steny, teda na políčkach A a C sú odtlačené navzájom protiľahlé steny, čo znamená, že súčet čísel na políčkach A a C je 7. Potom kocku budeme gúľať v inom smere, ale s istotou vieme povedať, že na políčkach D a F sú odtlačené protiľahlé steny a rovnako aj na políčkach E a G. Keďže súčet na protiľahlých stenách je 7, tak každá z dvojíc čísel na políčkach A a C, D a F aj E a G má súčet 7. Teraz už vieme, že súčet čísel na všetkých políčkach okrem políčka B je $3 \cdot 7 = 21$. Na zafarbenom políčku preto musí byť číslo $23 - 21 = 2$.

Stredné 9:

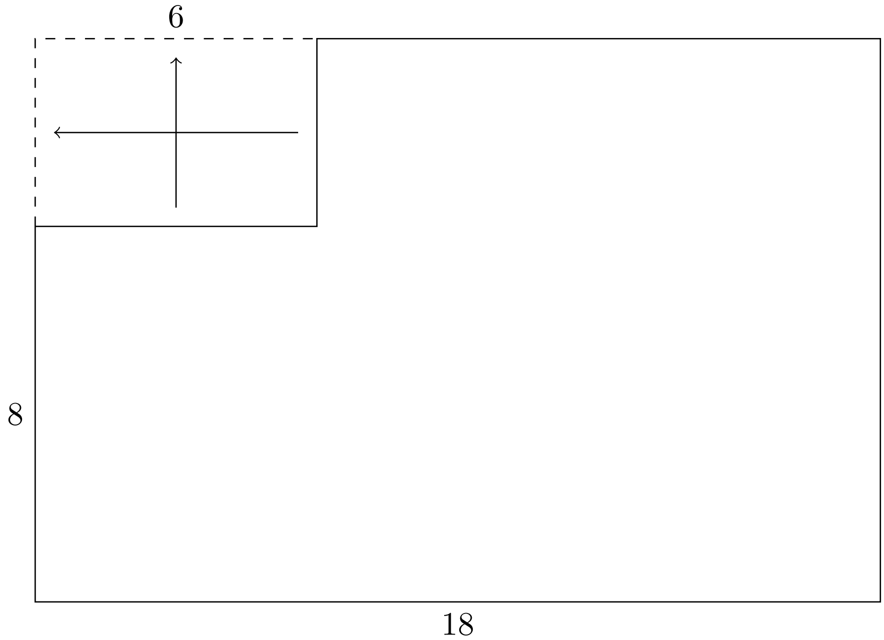
Na obrázku máme znázornenú vrchnú stenu motora Jančiho taxíka tvaru pravouhlého šesťuholníka, kde čísla znázorňujú dĺžku danej strany v centimetroch. Vieme, že obvod steny motora je 60 cm. Aký je **obsah** steny motora?



Výsledok: $192\,\mathrm{cm}^2$

Riešenie:

Posuňme si strany vyrezaného obdĺžnika v ľavom hornom rohu tak, aby nám doplnili šesťuholník do obdĺžnika.



Pri takomto posune je dôležité uvedomiť si, že sme presunuli celé strany tak, aby sa celkový obvod útvaru nezmenil. To znamená, že obvod takto vytvoreného obdĺžnika je tiež 60 cm.

Veľkosť jednej dvojice strán obdĺžnika poznáme. To znamená, že vieme dopočítať, akú veľkosť bude mať druhá dvojica strán – od celkového obvodu odčítame dve známe strany a výsledok rozdelíme na dve neznáme strany: $60 - 18 - 18 = 24\,\text{cm}$, a teda jedna strana bude mať 12 cm.

Teraz vieme určiť obsah celého takto vytvoreného obdĺžnika veľmi jednoducho – prenásobením veľkostí jeho strán: $18 \cdot 12 = 216\,\text{cm}^2$. Všimnime si, že ak teraz od neho odčítame obsah malého obdĺžnika v ľavom hornom rohu, dostaneme presne obsah pôvodného šesťuholníka.

Veľkosť jednej dvojice strán tohto malého obdĺžnika poznáme zo zadania, je to 6 cm. Veľkosť druhej dvojice strán nepoznáme, no z obrázka vieme, že spolu s hodnotou 8 cm musí tvoriť celú kratšiu stranu veľkého obdĺžnika, ktorá má 12 cm. Z toho vyplýva, že má $12 - 8 = 4\,\text{cm}$.

Obsah malého obdĺžnika vyrátame ako súčin veľkostí jeho strán, teda $6 \cdot 4 = 24\,\text{cm}^2$. Obsah šesťuholníka preto bude $216 - 24 = 192\,\text{cm}^2$.

Stredné 10:

Manažér taxikárskej spoločnosti uskutočnil párty, na ktorú pozval okrem niekoľkých taxikárov (minimálne dvoch) aj istý počet najvernejších zákazníkov. Na párty si hostia navzájom darovali darčeky, pričom každý taxikár dal každému zákazníkovi práve jeden darček a každý zákazník dal každému taxikárovi práve jeden darček. Hostia priniesli na párty spolu 154 darčekov. Koľko taxikárov a koľko zákazníkov prišlo na párty, ak vieme, že taxikárov bolo menej ako zákazníkov?

Výsledok: 7 taxikárov, 11 zákazníkov

Riešenie:

Každý taxikár doniesol toľko darčekov, koľko je na párty zákazníkov. Dokopy teda taxikári doniesli počet darčekov rovný súčinu počtov taxikárov a zákazníkov.

Každý zákazník doniesol toľko darčekov, koľko je na párty taxikárov. Dokopy teda zákazníci doniesli počet darčekov rovný súčinu počtov zákazníkov a taxikárov, čo je presne ten istý počet, čo doniesli taxikári.

Dokopy teda bol prinesený počet darčekov rovný dvojnásobku súčinu počtov taxikárov a zákazníkov. Z toho vyplýva, že súčin počtov taxikárov a zákazníkov je $154 : 2 = 77$.

Vieme, že taxikári boli aspoň 2, a keďže taxikárov bolo menej ako zákazníkov, zákazníci boli aspoň 3.

Vieme, že 77 je súčin počtov taxikárov a zákazníkov, a teda že ich počty musia byť deliteľmi čísla 77. Deliteľmi čísla 77 sú čísla 1, 7, 11 a 77. Už sme povedali, že počet 1 neprichádza do úvahy. Zároveň neprichádza do úvahy ani počet 77, pretože pre súčin by v druhej skupine musel byť len 1 člen, čo tiež nevyhovuje.

Počty taxikárov a zákazníkov teda musia byť práve 7 a 11, nakoľko musia byť rôzne. Spolu dávajú súčin 77, a teda tieto počty vyhovujú – keďže má byť taxikárov menej, je ich 7 a zákazníkov je 11.

Stredné 11:

Taxikár Janči hrá so zákazníkom počas cesty hru, v ktorej si myslí nejaké číslo a zákazník ho má hádať. Janči mu prezradí, že myslí na trojciferné kladné celé číslo, ktoré je menšie ako 200, a ak by jeho trojnásobok zaokrúhlil na stovky, výsledné číslo by sa po zaokrúhlení zväčšilo o 36. Aké číslo si Janči myslí?

Výsledok: 188

Riešenie:

Keďže si Janči myslí číslo menšie ako 200, jeho trojnásobok bude určite menší ako 600.

Pokúsme sa nájsť teraz také trojciferné číslo, ktoré sa po zaokrúhlení na stovky zväčší o 36. Túto podmienku spĺňajú čísla, ktorých posledné dve cifry sú 64, pretože $64 + 36 = 100$.

Zároveň chceme, aby toto číslo bolo deliteľné tromi, keďže vtedy bude trojnásobkom nejakého iného čísla, no nemá byť väčšie ako 600. Číslo je deliteľné tromi práve vtedy, keď je aj jeho ciferný súčet deliteľný číslom 3. Keďže poznáme druhú a tretiu cifru trojciferného čísla, prvú cifru doplníme tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom tri.

Existujú dve takéto trojciferné čísla: 564 $(5 + 6 + 4 = 15)$ a 264 $(2 + 6 + 4 = 12)$. Janči si myslí číslo, ktoré vznikne vydelením jedného z týchto čísel tromi. Toto číslo však musí byť tiež trojciferné, čo nastane iba vtedy, keď vydelíme číslo 564 tromi. V takomto prípade dostávame číslo 188, čo je teda číslo, ktoré si Janči myslí.

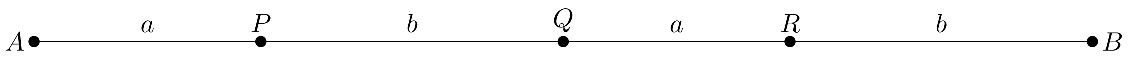
Stredné 12:

Na ulici je zaparkovaných 5 taxíkov, pričom na jednom konci ulice sa nachádza taxík A a na druhom konci taxík B. Niekde medzi taxíkmi A a B sa nachádzajú taxíky P, Q a R v takomto poradí, pričom platí, že vzdialenosť medzi taxíkmi A a P je rovnaká ako medzi taxíkmi R a Q, vzdialenosť medzi taxíkmi P a Q je rovnaká ako medzi taxíkmi R a B a vzdialenosť medzi taxíkmi P a R je 7 metrov. Aká je dĺžka ulice v metroch?

Výsledok: 14

Riešenie:

Ulicu si znázornime ako úsečku AB.



Zo zadania vieme, že $|AP| = |QR|$ a $|PQ| = |RB|$. Tieto vzdialenosti si označme písmenkami a a b, teda $|AP| = |QR| = a$ a $|PQ| = |RB| = b$. Zo zadania tiež vieme, že vzdialenosť $|PR| = 7\,\mathrm{m}$. Z obrázka vidíme, že $|PR| = |PQ| + |QR| = a + b = 7\,\mathrm{m}$. Vidíme, že celá ulica sa skladá z dvoch úsekov dĺžky a a dvoch úsekov b. Teda ak $a + b = 7\,\mathrm{m}$, tak dvojnásobok toho, čiže dĺžka celej ulice, bude $14\,\mathrm{m}$.

Stredné 13:

Taxikár Janči má mydlo, ktoré sa časom opotrebuje a ostane z neho iba malý kúsok. Janči si takéto mydielka odkladá a zo 6 zvyškov poskladá nové mydlo. Koľko nových mydiel poskladá zo 176 kúskov? Z nového mydla tiež časom vznikne malé mydielko, ktoré sa dá použiť pri opätovnom skladaní.

Výsledok: 35

Riešenie:

Na úlohu sa môžeme pozrieť inak, a síce tak, že vždy po 6 využitých mydlách Janči hneď poskladá nové. To znamená, že namiesto 6 mydiel, ktoré dopoužíva, vznikne 1 nové, a teda celkový počet sa zníži len o 5. Inak povedané, za každých 5 kúskov, o ktoré sa celkový počet zníži, sa vytvorí jedno nové mydlo.

Bez ohľadu na to, ako bude mydlá spájať, na konci mu ostane aspoň 1 kúsok mydla, ktorý už nebude vedieť použiť pre výrobu nového mydla (pretože nebude mať na to dosť kúskov). Okrem tohto jedného kúska ich má $176 - 1 = 175$. Koľkokrát vieme od čísla 175 odčítať číslo 5, toľko nových mydiel vie vzniknúť s tým, že mu na konci aspoň jeden nevyužiteľný kúsok ostane. Jednoduchým delením $175 : 5 = 35$ zisťujeme, že Janči vytvorí až 35 nových mydiel.

Stredné 14:

Na okno Jančiho taxíka sa dostal zvláštny druh baktérie. Po každej polhodine života splodí baktéria ďalšiu jednu. Po druhej polhodine splodí druhú a následne zomrie. Každá baktéria teda žije 1 hodinu a za ten čas splodí 2 baktérie. Na začiatku je na okne jedna baktéria. Koľko ich tam bude po 6 hodinách?

Výsledok: 377

Riešenie:

Úlohu budeme riešiť postupným vyplnením tabuľky, v ktorej si vypíšeme postupne všetky časy po polhodine (0:00 je začiatok).

Vypĺňať budeme dva riadky, v jednom počet baktérií, ktoré umrú za hodinu, v druhom počet baktérií, ktoré umrú za polhodinu.

Na začiatku sa na okne vyskytne jedna baktéria, ktorá umrie za hodinu. O polhodinu táto baktéria splodí novú baktériu, ktorá umrie za hodinu, a z nej samotnej sa stane baktéria, ktorá umrie za polhodinu. V ďalšej polhodine obe tieto baktérie splodia po jednej novej baktérii, ktoré umrú o hodinu, jedna umiera a jednej sa kráti život na polhodinu.

Pre každú polhodinu platí, že sa v nej splodí toľko baktérií, koľko žilo baktérií v stĺpci pred ňou – všetky tieto baktérie umrú za hodinu. Zároveň, pre každú polhodinu platí, že do riadku baktérií, ktoré umrú o polhodinu, sa dostane presne ten počet, ktorý mal pred polhodinou umrieť až o hodinu. Prakticky to znamená, že pre každý stĺpec napíšeme do riadku baktérií, ktoré umrú o hodinu, súčet baktérií v predchádzajúcom stĺpci a do riadku baktérií, ktoré umrú o polhodinu, prepíšeme údaj z predchádzajúceho stĺpca o baktériách, ktoré vtedy mali umrieť o hodinu.

	0:00	0:30	1:00	1:30	2:00	2:30	3:00	3:30	4:00	4:30	5:00	5:30	6:00
počet baktérií, ktoré umrú o 1 h	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
počet baktérií, ktoré umrú o 30 min	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Na záver len sčítame v 6. hodine počet baktérií, ktoré umrú o hodinu a počet baktérií, ktoré umrú o polhodinu, čím dostávame celkový počet baktérií $233 + 144 = 377$.

Stredné 15:

Taxikár Janči si chce vymyslieť PIN-kód pre svoju taxikársku pokladničku. Najskôr skúšal zadať číslo 1234567890, ale potom zistil, že pokladnička povoľuje iba 7-miestne kódy. Janči sa rozhodne, že svoj nový PIN-kód vytvorí tak, že z pôvodného čísla vymaže 3 cifry tak, aby bol výsledný kód deliteľný každým číslom od 1 do 10. Aký PIN-kód má Janči zadať?

Výsledok: 1345680

Riešenie:

Začnime odzadu. Nulu zmazať určite nemôžeme, ak chceme, aby bolo výsledné číslo deliteľné číslom 10. Zároveň, ak tam nula ostane, bude číslo deliteľné aj číslami 2 a 5. Aby bolo číslo deliteľné číslom 4, musí byť jeho posledné dvojčíslie deliteľné číslom 4, takže deviatku musíme určite zmazať. Ostáva nám odstrániť už len dve cifry.

Dvojčíslie 80 je deliteľné číslom 4, no vyškrtnutím cifier 7 a 8 vieme dostať aj dvojčíslie 60, ktoré je tiež deliteľné číslom 4. V takom prípade by sme už odstránili 3 cifry, a teda výsledným PIN-kódom by bolo číslo 1234560. Ciferný súčet tohto čísla je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 0 = 21$, čo ale nie deliteľné číslom 9, takže podľa kritérií deliteľnosti ani celé číslo nebude deliteľné číslom 9. Z toho vyplýva, že táto možnosť je nesprávna a naše číslo musí byť zakončené dvojčíslím 80.

Aby bolo číslo deliteľné číslom 8, musí byť podľa kritérií deliteľnosti jeho posledné trojčíslie deliteľné číslom 8. Trojčíslie 780 nie je deliteľné číslom 8, preto musíme zmazať sedmičku. Ostáva nám odstrániť už len jednu cifru. Posledné trojčíslie je teraz 680, čo už je deliteľné číslom 8. Vyškrtnutím šestky by sme na konci mali trojčíslie 580, ktoré nie je deliteľné číslom 8, preto šestka v čísle určite ostáva. Zatiaľ nám ostalo číslo 12345680.

Chceme, aby číslo bolo deliteľné číslom 9, a v takom prípade bude deliteľné aj číslami 3 a 6 (vieme, že už je deliteľné číslom 2). Aby výsledné číslo bolo deliteľné číslom 9, potrebujeme, aby bol jeho ciferný súčet deliteľný číslom 9, a to potrebujeme dosiahnuť za pomoci zmazania iba jednej cifry, keďže doteraz sme už zmazali dve. Výsledné číslo by bolo deliteľné číslom 9, ak by sme zmazali cifru 2 $(1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 = 27)$. Inú možnosť nemáme a vtedy bude naše výsledné číslo deliteľné aj číslom 7 $(1345680 : 7 = 192240)$.

Týmto spôsobom sme sa zmazaním troch cifier dostali k číslu 1345680, ktoré je deliteľné všetkými číslami od 1 do 10 a zároveň sme naším postupom ukázali, že je jediné možné.

Stredné 16:

Taxikár Janči ide po kruhovom objazde s obvodom 26 metrov. Spolu s ním sa na kruhovom objazde nachádzajú ďalšie štyri autá: Audi, BMW, Citroën a Dacia (žiadne dve autá nie sú na rovnakom mieste). Vzdialenosť medzi Audi a BMW po kruhovom objazde je 6 metrov, vzdialenosť medzi BMW a Citroënom po kruhovom objazde je 12 metrov a vzdialenosť medzi Citroënom a Daciou po kruhovom objazde je 8 metrov *(pozn.: vždy rátame kratšiu z dvoch vzdialeností medzi dvoma autami na kruhovom objazde)*. Aká je vzdialenosť medzi Audi a Daciou v metroch? Nájdite všetky možnosti *(opäť nás zaujímajú kratšie zo vzdialeností)* a ako výsledok odovzdajte **súčin** týchto možností.

Výsledok: 240

Riešenie:

Predstavme si na obvode kruhového objazdu 26 pomyselných bodov, ktoré sú postupne od seba po obvode vzdialené 1 meter, a označme ich v smere hodinových ručičiek od 1 po 26.

Umiestnime Audi na pomyselný bod 1. Keďže je BMW od neho vzdialené 6 metrov, umiestnime ho do bodu 7. Citroën je buď 12 metrov za vozidlom BMW, alebo 12 metrov pred ním.

- V prípade, že je umiestnený **Citroën za vozidlom BMW**, nachádza sa na bode $7+12=19$. Dacia je buď 8 metrov za ním, alebo pred ním.
  - V prípade, že je **Dacia za Citroënom**, mala by sa nachádzať na bode $19+8=27$, takýto bod však nemáme, keďže najväčšie číslo je 26. To znamená, že ďalej prejde po kruhovom objazde a dopadne na bod 1. Tento bod však zaberá Audi, preto tento prípad nevedie k vyhovujúcemu rozloženiu.
  - V prípade, že je **Dacia pred Citroënom**, mala by sa nachádzať na bode $19-8=11$. Od vozidla značky Audi je tak vzdialená 10 metrov (druhá vzdialenosť je 16, a teda 10 je kratšou vzdialenosťou).
- V prípade, že je **Citroën umiestnený pred vozidlom BMW**, nachádza sa 12 metrov pred ním. To by nám kleslo pod číslo 1, ale ak je nejaké vozidlo 12 metrov pred iným, je na kruhovom objazde vlastne 14 metrov za ním. Z toho vyplýva, že je v tomto prípade umiestnený Citroën 14 metrov za vozidlom BMW, a teda nachádza sa na bode $7+14=21$. Dacia je opäť buď 8 metrov za ním, alebo pred ním.
  - V prípade, že je **Dacia za Citroënom**, mala by sa nachádzať na bode $21+8=29$, čo znamená, že dopadne na bod $29-26=3$. V tomto prípade je Dacia vzdialená od Audi len 2 metre (druhá vzdialenosť je 24).
  - V prípade, že je **Dacia pred Citroënom**, mala by sa nachádzať na bode $21-8=13$. Od vozidla značky Audi je teda vzdialená 12 metrov (druhá vzdialenosť je 14).

Celkový súčin nájdených možností je $10 \cdot 2 \cdot 12 = 240$.

K riešeniu treba poznamenať, že je jedno, ako sme si na začiatku určili poradie áut Audi a BMW. Ich výmena by znamenala len „zmenu smeru jazdy po kruhovom objazde“ (číslovali by sme proti smeru hodinových ručičiek), vzdialenosti by pozmenené neboli.

Stredné 17:

Janči pracuje v taxikárskej službe, ktorá priraďuje zákazníkom čísla. Prví dvaja zákazníci dostali neznáme čísla. Každý ďalší zákazník dostal nejaké číslo, pričom platí, že toto číslo je vždy súčtom čísel všetkých predchádzajúcich zákazníkov. Aké bolo číslo deviateho zákazníka, ak jedenásty zákazník dostal číslo 512?

Výsledok: 128

Riešenie:

Vieme, že tretí zákazník v poradí dostal číslo, ktoré je súčtom prvých dvoch. Štvrtý zákazník dostal číslo, ktoré je súčtom všetkých troch predchádzajúcich čísel, no všimnime si, že tretí zákazník má sám rovnakú hodnotu ako súčet predchádzajúcich, preto je vlastne číslo štvrtého zákazníka len dvojnásobkom čísla tretieho zákazníka.

Piaty zákazník má číslo rovné súčtu všetkých predchádzajúcich, no opäť platí, že štvrtý zákazník má rovnakú hodnotu ako súčet predchádzajúcich, preto má piaty zákazník dvojnásobok čísla štvrtého zákazníka.

Takto by sme mohli pokračovať donekonečna – od štvrtého zákazníka vrátane má každý zákazník číslo rovné dvojnásobku čísla predchádzajúceho zákazníka.

Inak povedané, od tretieho zákazníka vrátane má každý číslo rovné polovici čísla nasledujúceho zákazníka. To znamená, že desiaty zákazník dostal číslo $512 : 2 = 256$ a deviaty dostal číslo $256 : 2 = 128$.

Stredné 18:

Taxikár Janči previezol spolu za dennú a nočnú službu dokopy počet zákazníkov deliteľný číslom 10, ale menej ako 120. Počet zákazníkov počas dennej služby bol štvornásobkom svojho ciferného súčtu. Počet zákazníkov počas nočnej služby bol sedemnásobkom svojho ciferného súčtu. Koľko zákazníkov Janči previezol počas nočnej služby?

Výsledok: 42

Riešenie:

Keďže počet zákazníkov počas nočnej služby bol sedemnásobkom svojho ciferného súčtu, musí to byť číslo deliteľné 7. Keďže počet zákazníkov počas dennej služby bol štvornásobkom svojho ciferného súčtu, musí to byť číslo deliteľné 4, a teda párne číslo. Súčet týchto dvoch čísel je deliteľný 10, a teda tiež párny, čiže aj počet zákazníkov počas nočnej služby musí byť párny. Pozrime sa na ciferné súčty párnych násobkov čísla 7 menších ako 120:

Číslo	Ciferný súčet
14	5
28	10
42	**6**
56	11
70	7
84	12
98	17
112	4

Z týchto čísel má iba jedno ciferný súčet rovný jeho sedmine, a to 42, preto Janči musel počas nočnej služby previezť 42 zákazníkov. Ešte overme, že vyhovujúca možnosť existuje.

Počet zákazníkov počas nočnej služby je číslo deliteľné 4, ktoré je štvornásobkom svojho ciferného súčtu a spolu s číslom 42 dáva súčet deliteľný 10. Z možností 8, 28, 48, 68 je len číslo 48 štvornásobkom svojho ciferného súčtu a toto číslo spĺňa všetky podmienky. Preto teda existuje vyhovujúca možnosť a Janči previezol počas nočnej služby 42 ľudí.

Stredné 19:

Jančiho heslo od služobného telefónu je štvorciferné číslo. Keď presunieme prvú číslicu (zľava) na koniec hesla, dostaneme číslo, ktoré je o 6 menšie ako trojnásobok Jančiho hesla. Aké je Jančiho heslo od služobného telefónu?

Výsledok: 2856

Riešenie:

Vieme, že aj číslo o 6 menšie ako trojnásobok Jančiho hesla je stále najviac štvorciferné, teda prvá cifra (posledná po posunutí) musí byť jedna z cifier 1, 2, 3. Keby bola väčšia, tak trojnásobok hesla bude určite päťciferné číslo (napr. $4000 \cdot 3 = 12000$), čo nemôže. Rozoberme si teda postupne tieto prípady.

Ak začína heslo cifrou 1, jeho trojnásobok zmenšený o 6 musí končiť cifrou 1. Z toho vyplýva, že trojnásobok Jančiho hesla bez zmenšenia končí cifrou $1 + 6 = 7$. Jančiho heslo potom končí cifrou 9, pretože to je jediná cifra, ktorá nám dá po prenásobení číslom 3 na konci čísla cifru 7. Teraz trojnásobok Jančiho hesla by mal po zmenšení posledné dvojčíslie 91, bez zmenšenia 97. Jediné dvojciferné číslo, ktoré po prenásobení číslom 3 má posledné dvojčíslie 97, je 99. Z toho vyplýva, že trojnásobok Jančiho hesla by mal po zmenšení posledné trojčíslie 991, bez zmenšenia 997. Jediné trojciferné číslo, ktoré po prenásobení číslom 3 má výsledok taký, ktorého posledné trojčíslie je 997, je 999. To už znamená, že Jančiho heslo musí byť 1999, čo ale po prenásobení číslom 3 a odčítaní čísla 6 dáva $1999 \cdot 3 - 6 = 5991$, a teda nespĺňa podmienky zo zadania.

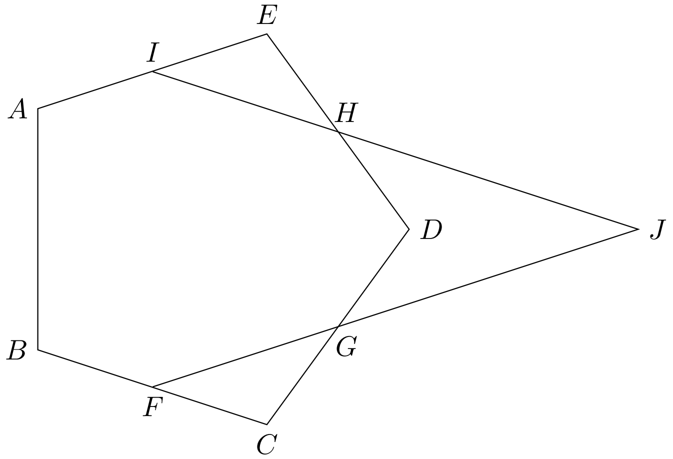
Ak heslo začína cifrou 2, jeho trojnásobok zmenšený o 6 končí cifrou 2, bez zmenšenia cifrou 8. Postupujeme podobne ako minule. Jančiho heslo končí cifrou 6, pretože to je jediná cifra, ktorá nám dá po prenásobení číslom 3 na konci čísla cifru 8. Trojnásobok hesla má po zmenšení posledné dvojčíslie 62, bez zmenšenia 68. Jediné dvojciferné číslo, ktoré po prenásobení číslom 3 má výsledok taký, ktorého posledné dvojčíslie je 68, je 56. Trojnásobok hesla má po zmenšení posledné trojčíslie 562, bez zmenšenia 568. Jediné trojciferné číslo, ktoré po prenásobení číslom 3 má výsledok taký, ktorého posledné trojčíslie je 568, je 856. Jančiho heslo musí byť 2568, čo po prenásobení číslom 3 a odčítaní čísla 6 dáva $2568 \cdot 3 - 6 = 5682$, čo spĺňa podmienky zo zadania.

Ak heslo začína cifrou 3, jeho trojnásobok zmenšený o 6 končí cifrou 3, bez zmenšenia končí 9. Ďalej, opäť obdobne, heslo končí cifrou 3, trojnásobok hesla má po zmenšení posledné dvojčíslie 33, bez zmenšenia 39, heslo má posledné dvojčíslie 13, trojnásobok hesla má po zmenšení posledné trojčíslie 133, bez zmenšenia 139, heslo má posledné trojčíslie 713, heslo musí byť 3713. To po prenásobení číslom 3 a odčítaní čísla 6 dáva $3713 \cdot 3 - 6 = 11133$, čo nespĺňa podmienky zo zadania.

Po prejdení všetkých možností prichádzame na to, že jediná správna odpoveď je 2856.

Stredné 20:

Taxikár Janči má na taxíku spätné zrkadlo v tvare pravidelného päťuholníka $ABCDE$ ako na obrázku. Body F, G, H, I sú postupne stredy strán BC, CD, DE, EA. Určte veľkosť uhla HJG, ak J je priesečník priamok IH a FG.



Výsledok: 36°

Riešenie:

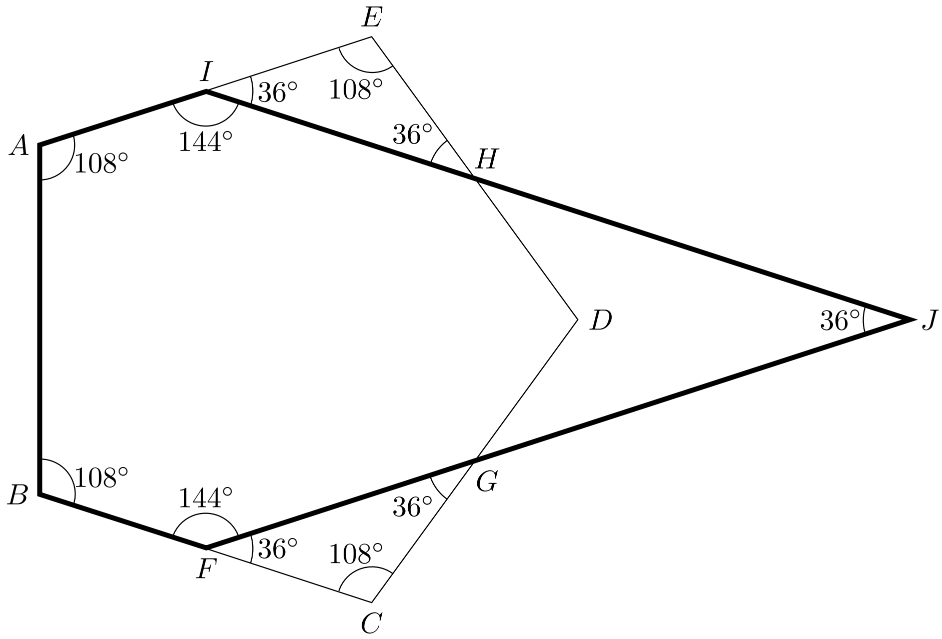
Aby sme vedeli úlohu vyriešiť, musíme najprv zistiť, aká je veľkosť vnútorného uhla pravidelného päťuholníka. Akýkoľvek päťuholník si vieme rozdeliť na 3 trojuholníky (v našom prípade napríklad na ABC, ACD a ADE). Každý z týchto trojuholníkov má rovnaký súčet vnútorných uhlov – 180°. Dokopy majú tieto tri trojuholníky súčet vnútorných uhlov $180° \cdot 3 = 540°$. Vnútorné uhly týchto troch trojuholníkov dokopy skladajú vnútorné uhly päťuholníka, preto aj súčet vnútorných uhlov ľubovoľného päťuholníka je 540°. Keďže je náš päťuholník $ABCDE$ pravidelný, veľkosť jedného uhla bude $540° : 5 = 108°$.

Všimnime si, že trojuholník HEI je rovnoramenný (HE a EI majú dĺžku polovice strany päťuholníka), čiže uhly pri základni musia mať rovnakú veľkosť. Už sme ukázali, že $|\sphericalangle HEI| = 108°$, a keďže je súčet vnútorných uhlov v trojuholníku 180°, zvyšné dva uhly budú mať súčet $180 - 108 = 72°$. Takže $|\sphericalangle EIH| = |\sphericalangle EHI| = 72 : 2 = 36°$.

Rovnaké úvahy platia pre trojuholník FCG, a tak $|\sphericalangle CFG| = |\sphericalangle CGF| = 36°$.

Ďalej si vieme dopočítať veľkosť uhla AIH. Súčet veľkostí uhlov AIH a EIH musí byť 180°, keďže dokopy tvoria priamy uhol. To znamená, že $|\sphericalangle AIH| = 180° - |\sphericalangle EIH| = 180° - 36° = 144°$. To isté platí aj pre uhly BFG a CFG, a tak $|\sphericalangle BFG| = 180° - |\sphericalangle CFG| = 180° - 36° = 144°$.

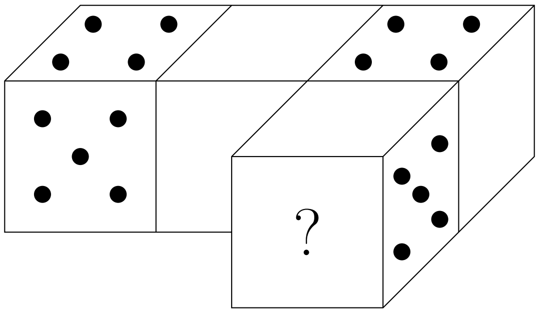
Teraz v päťuholníku $ABFJI$ poznáme 4 z 5 uhlov a zároveň vieme, že súčet všetkých uhlov je 540°. Takže $|\sphericalangle FJI| = 540° - |\sphericalangle AIH| - |\sphericalangle BAI| - |\sphericalangle ABF| - |\sphericalangle BFG| = 540° - 144° - 108° - 108° - 144° = 36°$. Veľkosť uhla HJG je teda 36°.



Ťažké

Ťažké 1:

Kým taxikár Janči čaká na zákazníka, hrá sa s bežnými hracími kockami, pre ktoré platí, že majú na stenách čísla 1 až 6 a súčet čísel na protiľahlých stenách je vždy 7. Štyri hracie kocky Janči poskladal do stavby ako na obrázku tak, že platí, že súčet čísel na každých dvoch stenách, ktoré sú k sebe priložené, je 9. Aké číslo je na prednej stene označenej otáznikom?



Výsledok: 4

Riešenie:

Pozrime sa na kocku, ktorá je na obrázku najviac vľavo. Vieme, že súčet čísel na protiľahlých stenách je vždy 7. Kocka najviac vľavo má teda na spodnej stene číslo 3 a na zadnej stene číslo 2. Ostali nám čísla 1 a 6, ktoré musia byť na bočných stenách. Steny, ktorými kocky susedia, majú súčet 9. To znamená, že na pravej stene kocky, ktorá je najviac vľavo, nemôže byť číslo 1, pretože jeho sčítaním s číslom od 1 do 6 nemôžeme dostať súčet 9. Musí tam byť teda číslo 6.

Potom vieme, že na ľavej stene druhej kocky zľava musí byť číslo 3. Na protiľahlej stene sa nachádza číslo 4. Pravá zadná kocka má potom na ľavej stene číslo 5 a na pravej číslo 2. Na prednú a zadnú stenu ostali čísla 1 a 6. Číslo 1 opäť nemôže byť na prednej stene, pretože by so susedom nebolo schopné mať súčet 9. Na prednej stene je teda číslo 6, susedí s číslom 3, a na mieste otáznika je číslo 4.

Ťažké 2:

Taxikár Janči za svoju kariéru najazdil 334411 kilometrov. Merač najazdených kilometrov sa mu pokazil a zmenil tri cifry zo skutočného počtu najazdených kilometrov. Vzniklo tak šesťciferné číslo s navzájom rôznymi ciframi. Aké najmenšie číslo mohol ukazovať pokazený merač?

Výsledok: 230415

Riešenie:

Keďže v čísle 334411 máme zmeniť tri cifry tak, aby výsledné číslo malo všetky cifry rôzne, musíme zmeniť práve jednu cifru z každej dvojice rovnakých cifier na inú cifru. Ak by mala byť cifra zväčšená, tak chceme zmeniť druhú z dvojice, aby sme číslo zväčšili menej, ak by cifra bola zmenšená, tak chceme zmeniť prvú z dvojice, aby sme výsledné číslo zmenšili viac. Najmenšie tri cifry, ktoré nie sú v čísle 334411, sú 0, 2 a 5. Cifra 0 je menšia ako 3, a teda by sme ju chceli dosadiť za prvú 3, ale to nemôžeme, lebo šesťciferné číslo nemôže mať na mieste stotisícok 0. Takže prvú 3 nahradíme cifrou 2. Ďalej pokračujeme týmto postupom a vidíme, že cifra 0 je menšia ako 4, takže nahradíme prvú 4 cifrou 0. Pri poslednej dvojici cifier vidíme, že cifra 5 je väčšia ako 1, takže nahradíme druhú 1 za cifru 5. Výsledné číslo je 230415.

Ťažké 3:

Taxikár Janči má na čelnom skle nalepený hmyz. Keď sa na sklo pozrel zblízka, zistil, že sú tam len muchy a komáre. Napočítal ich dokopy 1000. Janči viezol zákazníka Oskara, ktorý zistil, že sa Janči pri počítaní pomýlil najviac o 9 kusov hmyzu. Okrem toho si Oskar všimol, že je tam presne desaťkrát viac múch ako komárov. Koľko kusov hmyzu má Janči na skle, ak sa Oskar nepomýlil?

Výsledok: 1001

Riešenie:

Vieme, že múch je desaťkrát viac ako komárov. To znamená, že hmyz na Jančiho čelnom skle vieme rozdeliť do niekoľkých skupiniek zložených z 10 múch a 1 komára, teda z 11 kusov hmyzu. Celkový počet hmyzích jedincov nalepených na skle je teda určite násobok 11. Číslo 1000 násobkom 11 nie je, takže Janči sa pri počítaní musel pomýliť.

Skutočný počet kusov hmyzu na skle sa od Jančiho napočítaných 1000 líši najviac o 9, takže je to jedno z čísel od 991 do 1009 vrátane. Číslo 990 $(11 \cdot 90)$ je násobkom 11, no v požadovanom rozsahu sa nenachádza, takže nemôže byť hľadaným počtom hmyzu. Najbližšie väčšie násobky 11 sú 1001 a 1012. Z nich v danom rozsahu leží jedine 1001, takže toľko musí byť jedincov na čelnom skle.

Ťažké 4:

Taxikár Janči mal v každý deň týždňa iný počet zákazníkov. Pamätá si, že v každý deň od utorka do soboty mal presne polovicu súčtu zákazníkov predchádzajúceho a nasledujúceho dňa *(teda ak v pondelok prepravil 10 a v stredu 30 zákazníkov, v utorok musel prepraviť 20 zákazníkov)*, nepamätá si však presné počty. Pamätá si len dva dni – v pondelok prepravil 4 a v piatok 36 zákazníkov. Koľko zákazníkov prepravil v nedeľu?

Výsledok: 52

Riešenie:

Pozrime sa na prvé tri dni (pondelok, utorok a stredu). Aby platilo, že v prostredný deň mal Janči polovicu súčtu zákazníkov predchádzajúceho a nasledujúceho dňa, musí byť rozdiel počtu zákazníkov v prvom a druhom dni rovnaký ako rozdiel počtu zákazníkov v druhom a treťom dni (napr. v príklade zo zadania bol rozdiel počtu zákazníkov medzi pondelkom a utorkom aj medzi utorkom a stredou 10). Rovnako to bude platiť aj pre druhé tri dni (utorok, stredu a štvrtok) a každú ďalšiu trojicu dní. Tým pádom musí byť rozdiel počtu zákazníkov medzi každou dvojicou po sebe idúcich dní rovnaký, teda každý deň sa počet zákazníkov zvýšil o rovnaký počet.

Stačí už iba určiť, o koľko narástol počet zákazníkov každý deň. Vieme, že v pondelok mal Janči 4 a v piatok 36 zákazníkov. To znamená, že za 4 dni mu počet zákazníkov narástol o $36 - 4 = 32$. Každý deň mu teda pribudlo $32 : 4 = 8$ zákazníkov. Takže Janči mal v pondelok 4, v utorok $4 + 8 = 12$, v stredu $12 + 8 = 20$, vo štvrtok $20 + 8 = 28$, v piatok $28 + 8 = 36$, v sobotu $36 + 8 = 44$ a v nedeľu $44 + 8 = 52$ zákazníkov.

Ťažké 5:

Taxikár Janči vezie štvorčlennú rodinu. Súčet vekov členov rodiny je 77. Mama Ala s mladším synom Peťom má spolu o jeden rok menej, ako má otec Matúš spolu so starším synom Danom. Matúšov vek je štyrikrát väčší ako súčet vekov oboch synov. Koľko rokov má Ala?

Výsledok: 37

Riešenie:

Keď má Ala s Peťom len o jeden rok menej ako Matúš s Danom, a zároveň súčet všetkých štyroch je 77, musí mať Ala s Peťom 38 rokov a Matúš s Danom 39 rokov.

Zamyslime sa nad tým, koľko rokov môže mať Dano. Ak by mal 8 alebo viac rokov a Matúšov vek bol štvornásobkom vekov oboch synov, musel by mať Matúš aspoň 32 rokov, a teda obaja spoločne by museli mať aspoň 40 rokov. Keďže majú spolu 39 rokov, musí mať Dano najviac 7 rokov.

Ďalej potrebujeme, aby vek Matúša bol násobkom čísla 4 a spolu s Danom mal 39 rokov, nuž Dano nemôže mať 4, 5 ani 6 rokov, pretože ak by sme tieto hodnoty odčítali od 39, nedostali by sme násobok čísla 4. Ak by mal 3 roky alebo menej, spolu s Peťom, ktorý je mladší, by mal najviac 5 rokov. Matúš by potom mohol mať najviac 20 rokov, a teda ani s Danom by nemohol dosiahnuť požadovaný súčet vekov 39. Dano teda má určite 7 rokov.

Keď už vieme, že Dano má 7 rokov, Matúš musí mať 32 rokov. Dano a Peťo majú spoločne štvrtinu Matúšovho veku, čo je 8 rokov. Z toho vieme, že Peťo má 1 rok, a nakoniec zistíme, že Ala má 37 rokov.

Ťažké 6:

Taxikár Janči, taxikár Mihál a taxikár Šmili zarobili určitý obnos peňazí. Na začiatku dal Janči zvyšným dvom kolegom toľko zo svojich peňazí, že sa majetok každého z nich dvoch zdvojnásobil. Následne to isté urobil aj Mihál a potom aj Šmili. Šmili mal na začiatku aj na konci 36 peňazí. Koľko peňazí majú všetci traja dokopy?

Výsledok: 252

Riešenie:

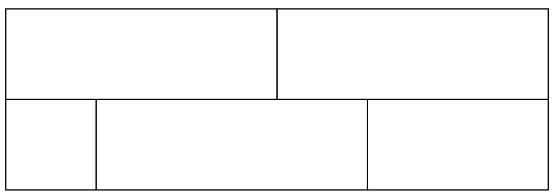
Šmili mal na začiatku 36 peňazí. Keď Janči rozdeľoval peniaze, tak mu dal toľko, aby sa Šmiliho peniaze zdvojnásobili, teda Šmili mal po Jančiho rozdeľovaní $36 \cdot 2 = 72$ peňazí. Potom Mihál dal peniaze Šmilimu a Jančimu. Šmili mal po Mihálovom rozdelení $72 \cdot 2 = 144$ peňazí.

Teraz je na rade s dávaním Šmili. Vieme, že na konci má mať taktiež 36, čo znamená, že musí rozdať $144 - 36 = 108$ peňazí. Tým, že rozdá 108 peňazí, zdvojnásobí Jančiho a Mihálove peniaze, to znamená, že Janči a Mihál majú spolu (pred tým, ako dostanú od Šmiliho peniaze) 108 peňazí. Čiže na konci budú mať dokopy Janči a Mihál $108 + 108 = 216$ peňazí. K tomu pripočítame ešte Šmiliho 36 a dostaneme $216 + 36 = 252$. Dokopy majú teda 252 peňazí.

Pre korektnosť celého riešenia si ešte ukážme, že existujú také počty peňazí, ktoré pri sebe mohli mať tak, aby spĺňali podmienky zo zadania. Vyhovuje napríklad situácia, že na začiatku má Janči 144, Mihál 72 a Šmili 36 peňazí. Po Jančiho kole rozdávania bude stav postupne 36, 144 a 72 peňazí, po Mihálovom kole rozdávania 72, 36 a 144 peňazí a na záver po Šmiliho kole 144, 72 a 36 peňazí.

Ťažké 7:

Kým taxikár Janči čakal na zákazníkov, zaparkoval pri múre, ktorý bol rozdelený na päť obdĺžnikov ako na obrázku. Keďže Janči čakal už dosť dlho, rozhodol sa, že múr vyfarbí. Chce, aby bol každý obdĺžnik vyfarbený červenou, žltou, zelenou, modrou alebo fialovou tak, aby každé dve časti, ktoré sa dotýkajú, boli zafarbené rôznymi farbami. Koľko existuje rôznych takýchto vyfarbení, ak sa môže jedna farba použiť viac ako raz?



Výsledok: 540

Riešenie:

Uvedomme si, že na poradí, v akom taxikár Janči vyfarbuje plot, nezáleží. Obdĺžniky si očíslujme po riadkoch smerom zľava doprava a zhora dole.

Prvý obdĺžnik môže taxikár Janči vyfarbiť každou z farieb, teda na to má 5 možností.

Druhý obdĺžnik však s prvým susedí, a tak ho nemôže vyfarbiť rovnakou farbou. Na jeho vyfarbenie mu ostávajú 4 farby pre každú z 5 farieb prvého obdĺžnika, dokopy má zatiaľ $5 \cdot 4 = 20$ možností.

Štvrtý obdĺžnik tiež susedí s prvým a druhým, a tak ho nemožno vyfarbiť ich farbami. O ich farbách už vieme, že sú rôzne. Na jeho vyfarbenie teraz pre každú z doterajších možností ostávajú 3 farby a dokopy máme možností už $20 \cdot 3 = 60$.

Tretí obdĺžnik susedí s prvým a štvrtým, nuž ho nemôže Janči vyfarbiť ich farbami. O tých už vieme, že sú rôzne. Na vyfarbenie tretieho obdĺžnika taxikárovi Jančimu teda ostávajú pre každé z doterajších ofarbení 3 možnosti a možností pre prvé štyri obdĺžniky má $60 \cdot 3 = 180$.

Piaty obdĺžnik tiež susedí s druhým a štvrtým, a tak ho nemôže vyfarbiť ich farbami, o ktorých už vieme, že sú rôzne. V dôsledku toho mu na jeho vyfarbenie ostávajú 3 farby, čo zvyšuje náš počet možností na $180 \cdot 3 = 540$.

Plot môže vyfarbiť $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 540$ spôsobmi.

Ťažké 8:

Janči mal so svojou taxislužbou veľké plány do budúcna, preto vykúpil všetky ŠPZky, na ktorých sú trojciferné čísla nekončiace nulou. Potom každé z týchto čísel otočil (napr. číslo 123 na 321) a následne odčítal menšie od väčšieho (napr. $321 - 123 = 198$). Aký je súčet všetkých rôznych výsledkov, ktoré mohol dostať?

Výsledok: 3564

Riešenie:

V tomto vzorovom riešení využijeme to, čo sme využili aj vo vzorovom riešení úlohy Ľahké 24. Pripomeňme si, ako sa správajú čísla, v ktorých nahradíme cifry písmenami. Vezmime si napríklad číslo 975: to má na mieste stoviek cifru 9, na mieste desiatok cifru 7 a na mieste jednotiek cifru 5. Zároveň tento zápis znamená, že toto číslo vieme rozpísať na súčet niekoľkých stoviek, niekoľkých desiatok a niekoľkých jednotiek – ich počet udáva cifra na ich mieste – stoviek bude 9, desiatok 7 a jednotiek 5. Preto číslo 975 môžeme zapísať ako $9 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5 \cdot 1$.

Číslo, ktoré zapisujeme $\overline{ABC}$, je nanajvýš trojciferné číslo, ktoré má na mieste stoviek cifru A, na mieste desiatok cifru B a na mieste jednotiek cifru C. Podľa toho, čo sme vysvetlili v prvom odseku, možno číslo $\overline{ABC}$ zapísať ako $A \cdot 100 + B \cdot 10 + C \cdot 1$.

Vráťme sa k nášmu zadaniu. Je jedno, ktoré číslo je pôvodné a ktoré prevrátené, keďže z oboch prevrátením dostaneme to druhé a vždy odčítavame menšie od väčšieho. Ak sú rovnaké, netrápi nás to, ich rozdiel bude 0 a celkový súčet rozdielov nezmení. Poďme sa teda pozrieť na dvojice nerovnakých čísel. Označme si väčšie číslo z dvojice $\overline{ABC}$ a menšie $\overline{CBA}$.

Väčšie číslo vieme zapísať ako súčet $A \cdot 100 + B \cdot 10 + C \cdot 1$ a menšie ako súčet $C \cdot 100 + B \cdot 10 + A \cdot 1$. Odčítajme menšie od väčšieho. Keď odčítame $1 \cdot A$ od $100 \cdot A$, ostane $99 \cdot A$. Keď odčítame $B \cdot 10$ od $B \cdot 10$, neostane nám nič, teda v rozdieli sa nevyskytne žiadny násobok cifry B. Keď odčítame $100 \cdot C$ od $1 \cdot C$, celkový rozdiel sa zníži o $99 \cdot C$. Celkovo môžeme usúdiť, že $\overline{ABC} - \overline{CBA} = 99 \cdot A - 99 \cdot C$.

Vidíme, že od 99-násobku cifry A odčítavame 99-násobok cifry C. Keďže $\overline{ABC} > \overline{CBA}$, $A > C$. To znamená, že výsledný rozdiel bude 99-násobok rozdielu cifier A a C.

Keďže je A najviac o 8 väčšie ako C a najmenej o 1 (môžu nadobúdať hodnoty len od 1 po 9), výsledkom rozdielu musí byť niektorý z týchto násobkov čísla 99 ($1\cdot99$, $2\cdot99$, $3\cdot99$, $4\cdot99$, $5\cdot99$, $6\cdot99$, $7\cdot99$, $8\cdot99$). Dokopy sa číslo 99 v týchto násobkoch vyskytuje $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ ráz. Keďže sú všetky tieto násobky rôzne, ich súčtom dostaneme požadovaný výsledok $36\cdot99=3564$.

Ťažké 9:

Taxikár Janči vezie zákazníka Peťa z Abrahámoviec do Batizoviec. Na tejto ceste je na každom kilometri stĺp, na ktorom je z jednej strany napísaná vzdialenosť od Abrahámoviec v kilometroch a na druhej vzdialenosť od Batizoviec v kilometroch *(vzdialenosť je udaná kladným celým číslom)*. Takýto stĺp existuje aspoň jeden. Janči sa zastavil pri každom stĺpe a zistil, že na každom z nich platí, že súčet číslic na stĺpe sa rovná 13. Aká je najmenšia možná vzdialenosť medzi Abrahámovcami a Batizovcami?

Výsledok: 49 km

Riešenie:

Uvedomme si, že keď je stĺp na každom kilometri, určite sa tam nachádza aj stĺp, na ktorom je vzdialenosť od Abrahámoviec 2 (keďže je súčet číslic na stĺpe 13, sú od seba vzdialené aspoň 13 km a takýto stĺp bude existovať). Číslo 2 má ciferný súčet 2, a teda vzdialenosť od Batizoviec na tomto stĺpe musí mať ciferný súčet 11.

Pozrime sa teraz na stĺp vzdialený 1 km od Abrahámoviec. Ak sa vzdialenosť od Batizoviec na prvom spomenutom stĺpe nekončila cifrou 9, tak potom pri pripočítaní 1 k nej nedôjde k prechodu cez desiatku a ciferný súčet tohto súčtu (celkovej vzdialenosti) bude musieť byť 12. Ak sa vzdialenosť od Batizoviec na tom stĺpe končí 9, tak dôjde k prechodu cez desiatku a ciferný súčet sa zmenší o 8 (lebo cifra na mieste jednotiek klesne o 9 – z 9 na 0 – a cifra na mieste desiatok stúpne o 1), avšak na druhej strane klesne ciferný súčet vzdialenosti od Abrahámoviec o 1, čiže celkový ciferný súčet klesne, čo sa nesmie stať, keďže sa má zachovať súčet číslic 13.

Teraz hľadajme najmenšie číslo, ktorého ciferný súčet je rovný 12 a ktoré nekončí cifrou 9. Aby bolo čo najmenšie, cifra na mieste jednotiek musí byť čo najvyššia, a teda 8. Do súčtu 12 nám chýba 4, takže hľadaným najmenším číslom je 48. Toto číslo vyjadruje vzdialenosť do Batizoviec na stĺpe vzdialenom 1 km od Abrahámoviec, celkovo tak vzdialenosť medzi týmito obcami v kilometroch nemôže byť menšia ako $1+48=49$.

Veľmi ľahko vieme overiť, že pri tejto vzdialenosti bude každý stĺp mať na sebe čísla, súčet ciferných súčtov ktorých je rovný 13, a teda že sme našli riešenie.

Ťažké 10:

Číslo Jančiho bankového účtu je postupnosť núl a jednotiek. V každej súvislej dvestovke po sebe idúcich cifier je rovnako veľa núl a jednotiek, ale v každej súvislej dvestodvojici sa ich počty líšia. Koľko najviac cifier môže tvoriť číslo Jančiho bankového účtu?

Výsledok: 300

Riešenie:

Dokážme niekoľko menších tvrdení, ktoré neskôr spojíme:

1. *Cifra v Jančiho čísle je rovnaká ako cifra 200 miest pred alebo za ňou:*

   Keďže medzi prvými 200 po sebe idúcimi ciframi je rovnako veľa núl ako jednotiek, vieme si jednoducho dopočítať, že je tam 100 núl a 100 jednotiek. To isté ale platí pre cifry od 2. po 201. vrátane. Tieto dve dvestočíslia majú 199 cifier spoločných. Ak medzi nimi je 99 jednotiek a 100 núl, musia 1. aj 201. cifra byť jednotky. Naopak, ak spoločných 199 cifier zahŕňa 100 jednotiek a 99 núl, musia z rovnakého dôvodu 1. a 201. cifra byť obe nuly. Tento princíp vieme aplikovať na ľubovoľné dve dvestočíslia prekrývajúce sa v 199 cifrách. Ukázali sme teda, že každá cifra je rovnaká ako cifra 200 miest pred alebo za ňou.

2. *Cifra v Jančiho čísle je rovnaká ako cifra 201 miest pred ňou alebo za ňou:*

   V dvestočíslí od 2. po 201. cifru vrátane je 100 jednotiek a 100 núl. Toto dvestočíslie je celé obsiahnuté prvým dvestodvojčíslím. Ak by 1. a 202. cifra boli rôzne, bolo by od 1. po 202. cifru vrátane 101 núl a 101 jednotiek a toto dvestočíslie by nespĺňalo podmienky zo zadania. Tieto dve cifry sú teda rovnaké. Rovnaký princíp vieme aplikovať na ľubovoľné dvestodvojčíslie.

Teraz ukážeme, že tieto dve tvrdenia už jednoznačne určujú, ako musí číslo Jančiho účtu vyzerať.

1. cifra môže byť jednotka alebo nula. Preskúmajme možnosť, keď je jednotkou. 201. aj 202. cifra sú jednotky podľa prvého a druhého tvrdenia. 202. cifra je jednotka, teda aj 2. cifra je jednotka z prvého tvrdenia. 2. cifra je jednotka, a teda 203. cifra je jednotka kvôli druhému tvrdeniu...

Takto môžeme pokračovať v tvorení čísla Jančiho bankového účtu ďalej, pridávajúc jednotky do radu začínajúceho 1. cifrou (jednotkou) aj do radu začínajúceho 201. cifrou (jednotkou). Nemôžeme to však robiť donekonečna. Keď sa týmto spôsobom dostaneme do situácie, že prvých 100 cifier sú jednotky a zároveň 201. až 300. cifra sú jednotky, nastáva problém. Medzi prvými 200 ciframi je totiž teraz 100 jednotiek na prvých 100 miestach, teda zvyšných 100 cifier musia byť nuly.

Teraz už nemožno pokračovať v tvorbe čísla, keďže podľa 201. cifry (jednotky) a prvého tvrdenia by 301. cifra mala byť jednotka, ale podľa 200. cifry (nuly) a druhého tvrdenia by 301. cifra mala byť nulou.

Ak by sme číslo Jančiho účtu začali nulou, uvažovali by sme úplne rovnako, iba by sme na konci namiesto čísla $111\ldots111000\ldots000111\ldots111$ dostali $000\ldots000111\ldots111000\ldots000$. Obe tieto čísla spĺňajú podmienky zadania a obe majú dĺžku 300.

Mamut

Mamut je matematická súťaž organizovaná Združením STROM a Prírodovedeckou fakultou Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach pre žiakov 4. až 6. ročníka základných škôl a prímy osemročných gymnázií. V roku 2024 sa koná už 22. ročník tejto súťaže a prvýkrát sa súťaž organizuje aj v meste Poprad.

Trvanie súťaže je 120 minút. Úlohy sú rozdelené podľa obťažnosti na 1-bodové (ľahké), 3-bodové (stredné) a 5-bodové (ťažké). Na začiatku súťaže každé družstvo dostane prvých päť úloh: tri ľahké, jednu strednú a jednu ťažkú. Súťažiaci v tíme riešia ľubovoľnú z piatich úloh, ktoré majú k dispozícii. Po vyriešení úlohy súťažiaci odovzdá výsledok opravovateľovi, ktorý vyhodnotí jeho správnosť. Ak je výsledok správny, tak súťažiaci úlohu odovzdá zadávateľovi, ktorý mu započíta body a vymení ju za novú úlohu zvolenej obtiažnosti. V opačnom prípade môže tím v riešení úlohy pokračovať a odovzdávať ju znova. Po treťom nesprávnom odovzdaní úlohy môže opravovateľ vyžadovať okrem výsledku aj postup riešenia. Tím, ktorý vyrieši všetky súťažné úlohy pred uplynutím časového limitu, dostane za každú ušetrenú minútu 1 bod. Počas súťaže nie je dovolené používať kalkulačky, rysovacie pomôcky a ani žiadnu literatúru.

Spolu so zadaniami úloh dostane na začiatku súťaže každý tím tri žetóny. Každý žetón žiakom umožňuje v druhej polovici súťaže (od konca 60. minúty až do konca súťaže) vymeniť úlohu za inú úlohu zvolenej obtiažnosti. Po použití tohto žetónu sa tím nemôže vrátiť k riešeniu úlohy, ktorú odovzdal spolu so žetónom. Okrem matematických úloh žiaci môžu počas súťaže absolvovať aj 3 športové úlohy, ktoré sú vyhlasované po 30, 60 a 90 minútach od začiatku súťaže. Za splnenie každej športovej úlohy získajú súťažiaci 1 úlohu navyše podľa zvolenej obtiažnosti.

Aby sa vyrovnali vekové rozdiely medzi súťažiacimi, na začiatku súťaže získajú družstvá za každého štvrtáka 5 bodov, za každého piataka 3 body a za každého šiestaka 1 bod.

Pri zhodnom počte bodov dvoch tímov bude rozhodovať počet bodov za úlohy, ak aj tu nastane rovnosť, bude rozhodovať počet vyriešených úloh. V prípade, že ani toto kritérium nerozhodne, poradie sa určí podľa času odovzdania poslednej vyriešenej úlohy.

Zadania starších ročníkov nájdete na `malynar.strom.sk/mamut`.

autori:	Alena Bálintová, Nina Anna Betáková, Oskar Cacara, Martin Dudjak, Bianka Gurská, Matej Hanus, Miriam Horváthová, Sarah Klopstock, Eva Krajčiová, Tomáš Lang, Matúš Libák, Martin Mihálik, Lujza Milotová, Benjamín Mravec, Erik Novák, Natália Poliačiková, Richard Prikler, Ján Richnavský, Oliver Seman, Kalista Semancová, Tomáš Sukeľ, Ľubomír Vargovčík, Richard Vodička, Veronika Vodičková
recenzia a úprava:	Bianka Gurská, Lenka Hake, Matej Hanus, Miriam Horváthová, Lucia Kleščová, Matúš Libák, Michal Masrna, Martin Mihálik, Lujza Milotová, Erik Novák, Ján Richnavský, Kalista Semancová, Štefan Vašak
názov:	**Mamut – 31. 5. 2024**
vydavatelia:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta Združenie STROM
web:	`malynar.strom.sk/mamut` `www.upjs.sk/prirodovedecka-fakulta/`