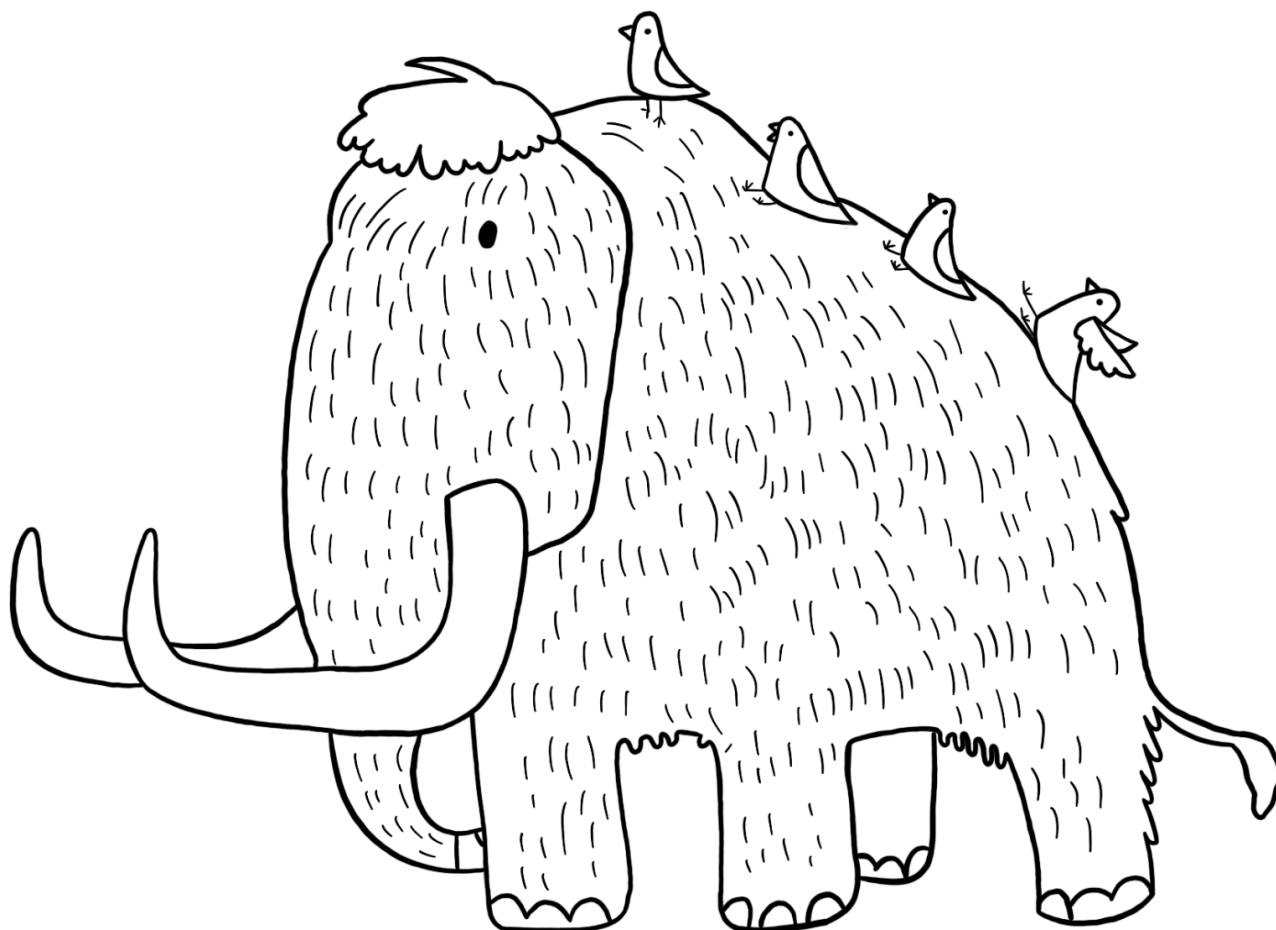




Mamut

Košice & Poprad, 30. 5. 2025

Rozcvička

Rozcvička 1:

Holub Ľubo zje každý deň okrem nedele 2 chleby, v nedeľu zje o jeden menej. Koľko chlebov zje za celý týždeň?

Výsledok: 13

Riešenie:

Ak by každý deň jedol 2 chleby, za týždeň, ktorý má 7 dní, by zjedol $7 \cdot 2 = 14$ chlebov. V nedeľu však zje o 1 menej, preto zje za celý týždeň $14 - 1 = 13$ chlebov.

Rozcvička 2:

Lubov jediný brat má dvoch súrodencov. Koľko sestier má Ľubo?

Výsledok: 1

Riešenie:

Keďže je v zadaní uvedené, že je to Ľubov **jediný** brat, vieme, že Ľubo okrem tohto jedného brata už žiadnych iných nemá. To znamená, že ani tento brat okrem Ľuba nemá žiadneho ďalšieho brata. Keďže má však súrodencov dvoch a jedným z nich je Ľubo, druhý musí byť ich jediná sestra.

Rozcvička 3:

Na streche sedí niekoľko holubov. Vieme, že ich je viac ako 5, no menej ako 20. Ciferný súčet ich počtu je 4. Koľko holubov sedí na streche?

Výsledok: 13

Riešenie:

Jediné číslo, ktoré je väčšie ako 5 a menšie ako 20 také, že je jeho ciferný súčet 4, je 13. To znamená, že na streche sedí 13 holubov.

Rozcvička 4:

V cirkuse vystupuje holub, ktorému každý rok vypadnú 3 pierka a 10 mu ich dorastie. O koľko viac pierok bude mať o 3 roky?

Výsledok: 21

Riešenie:

V rámci jedného roka mu 3 pierka vypadnú, no ďalších 10 dorastie – to znamená, že za rok mu pribudne $10 - 3 = 7$ nových pierok. Za tri roky bude mať preto o $3 \cdot 7 = 21$ pierok viac.

Rozcvička 5:

V meste sa konal turnaj v hokeji, v ktorom proti sebe hrali tímy holubov. Každý tím hral s každým iným tímom práve raz. V jednom tíme hrali 4 holuby. Koľko holubov sa zúčastnilo turnaja, keď Ľubov tím hral proti ďalším štyrom tímom?

Výsledok: 20

Riešenie:

Ľubov tím, ktorý má 4 členov, hral proti ďalším štyrom tímom, ktoré majú dokopy $4 \cdot 4 = 16$ holubov. Dokopy sa preto turnaja zúčastnilo $4 + 16 = 20$ holubov.

Ľahké

Ľahké 1:

Holub Ľubo zje každý deň 5 rožkov. Koľko rožkov zje holub Ľubo cez víkend?

Výsledok: 10

Riešenie:

Vieme, že víkend má dva dni – sobotu a nedeľu. Teda holub Ľubo bude jesť rožky dva dni, v prvý deň zje 5 rožkov a v druhý deň zje tiež 5 rožkov. Dokopy zje za víkend $5 + 5 = 10$ rožkov.

Ľahké 2:

Holub Ľubo má o 9 súrodencov viac ako holubica Alica. Dokopy majú 37 súrodencov. Koľko súrodencov má holub Ľubo, ak s Alicou nie sú súrodenci?

Výsledok: 23

Riešenie:

Ak by sme odčítali 9 od počtu Ľubových súrodencov, mal by Ľubo rovnako veľa súrodencov ako Alica. Dokopy by mali tiež o 9 menej, teda $37 - 9 = 28$. V takom prípade by mal Ľubo rovnako veľa súrodencov ako Alica, takže každý z nich by mal $28 : 2 = 14$ súrodencov. Alica preto musí mať 14 súrodencov. Vráťme sa do pôvodného zadania, kde má Ľubo o 9 viac súrodencov, teda $14 + 9 = 23$.

Ľahké 3:

V parku na každé 3 holuby pripadá 5 vrabcov. Koľko je v parku vrabcov, ak je tam celkovo 80 holubov a vrabcov dokopy?

Výsledok: 50

Riešenie:

Vtákov v parku si vieme rozdeliť do niekoľkých skupín. Keďže na každé 3 holuby pripadá 5 vrabcov, každá zo skupín bude obsahovať 3 holuby a 5 vrabcov. To je dokopy $3 + 5 = 8$ vtákov, ktoré obsahuje každá skupinka. Takýchto skupín je v parku $80 : 8 = 10$. Máme 10 skupín a vieme, že v každej skupine sa nachádza 5 vrabcov. Vrabcov je teda dokopy v parku $5 \cdot 10 = 50$.

Ľahké 4:

Holubica Alica vystupuje v cirkuse. Za skok dostane 5 omrvíniek, za premet dostane 65 omrvíniek. Tento týždeň dostala 300 omrvíniek a urobila iba 3 premety. Koľko skokov urobila Alica tento týždeň?

Výsledok: 21

Riešenie:

Tento týždeň dostala Alica za premety spolu $3 \cdot 65 = 195$ omrvíniek. Zvyšných $300 - 195 = 105$ omrvíniek dostala za všetky skoky, ktoré spravila tento týždeň. Keďže $105 : 5 = 21$, Alica tento týždeň urobila 21 skokov.

Ľahké 5:

V meste sa konal veľký medzinárodný holubí pretek. Ľubo, ktorý skončil dve miesta pred posledným holubom, obsadil miesto tesne pred holubom, ktorý skončil šiesty. Koľko holubov sa zúčastnilo preteku?

Výsledok: 7

Riešenie:

Lubo skončil tesne pred šiestym miestom, z čoho vyplýva, že obsadil piate miesto. Zároveň vieme, že horšie ako Lubo sa umiestnili iba dva holuby. Spočítame štyroch holubov, ktorí sa umiestnili lepšie ako Lubo, Luba a dvoch holubov, ktorí sa umiestnili horšie ako Lubo. Pretekov sa teda zúčastnilo $4 + 1 + 2 = 7$ holubov.

Lahké 6:

Traja kamaráti Albatros, Bocian a Chochláč si spolu kupovali loptu, pričom nikto nezaplatil viac ako polovicu toho, čo spolu zaplatili zvyšní dvaja. Koľko zaplatil Bocian, ak lopta stála 18 €?

Výsledok: 6 €

Riešenie:

Keďže žiaden z kamarátov nezaplatil viac ako polovicu z toho, čo zaplatili zvyšní dvaja, znamená to, že zvyšní dvaja zaplatili aspoň dvojnásobok toho, čo prvý kamarát.

To znamená, že nikto nemohol zaplatiť viac ako 6 €, lebo potom zvyšní dvaja by museli zaplatiť viac ako 12 € – teda spolu by zaplatili viac ako 18 €, ale lopta stála presne 18 €.

Ak všetci traja zaplatili po 6 €, spolu zaplatili 18 € a zároveň každý z nich zaplatil polovicu zvyšných dvoch. To je správna odpoveď.

Keby jeden z nich zaplatil menej, tak už spolu nezaplatia 18 €, ale menej, lebo nikto z nich nemohol zaplatiť viac ako 6 €, aby to vyrovnal. Existuje teda jediné správne riešenie, v ktorom každý z kamarátov (vrátane Bociana) zaplatil presne 6 €.

Lahké 7:

Holuby Lubo, Bubo a Kubo si v reštaurácii dali žemličky, za ktoré platili stravnými lístkami. Keď dojedli, Lubo položil na stôl 20 lístkov, Bubo 15 a Kubo len 10 lístkov. Čašník si zobral lístky a každému vrátil 3 späť. Ak všetci traja mali platiť rovnako, koľko lístkov musí neskôr Kubo vrátiť Lubovi?

Výsledok: 5

Riešenie:

Spolu zaplatili $20 + 15 + 10 = 45$ lístkov. Keď každému čašník vrátil 3 lístky, spolu im vrátil $3 \cdot 3 = 9$ lístkov. Cena žemličiek bola tým pádom $45 - 9 = 36$ lístkov. Žemlička jedného vyšla na $36 : 3 = 12$ lístkov. Keď berieme do úvahy aj vrátené lístky, Lubo zaplatil $20 - 3 = 17$, Bubo $15 - 3 = 12$ a Kubo $10 - 3 = 7$. Keďže Lubo aj Kubo mali platiť 12, Kubo musí vrátiť Lubovi $12 - 7 = 5$ lístkov.

Lahké 8:

Sud s vodou pre holuby má tvar valca a s hladinou vo výške 60 cm váži 170 kg. Ak by v ňom bola voda do výšky 80 cm, vážil by 220 kg. Koľko váži prázdny sud?

Výsledok: 20 kg

Riešenie:

Najprv sa zamyslime nad tým, ako taký sud vyzerá. Je to valec, čo znamená, že je vo všetkých výškach rovnako široký.

Ďalej vieme vypočítať, ako sa zmení hmotnosť suda odliatím vody, ktorá zníži hladinu o 20 cm. Ak v sude, v ktorom je hladina vo výške 80 cm, odobratím vody znížime jej hladinu na 60 cm, hmotnosť suda sa zmení o $220 \text{ kg} - 170 \text{ kg} = 50 \text{ kg}$. Zistili sme, že na každú zmenu hladiny o 20 cm pripadá 50 kg vody.

V sude s hmotnosťou 170 kg sa nachádza voda s hladinou vo výške 60 cm. Ak z neho trikrát odoberie 50 kg vody, sud bude úplne prázdny, pretože v ňom znížime hladinu vody o $3 \cdot 20 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$. Z jeho pôvodnej hmotnosti 170 kg ubudne $3 \cdot 50 \text{ kg} = 150 \text{ kg}$ vody. Hmotnosť prázdneho suda potom bude $170 \text{ kg} - 150 \text{ kg} = 20 \text{ kg}$.

Lahké 9:

Holub Ľubo a holubica Alica sa dohodli, že sa stretnú pri fontáne o 12:00. Alica má hniezdo o polovicu bližšie k fontáne ako Ľubo. Ľubo vyrazil na stretnutie o 11:50. Kedy vyrazila Alica, ak vieme, že je trikrát pomalšia ako Ľubo a k fontáne prišli obaja presne o 12:00?

Výsledok: 11:45

Riešenie:

Ľubovi cesta od jeho hniezda k fontáne trvala 10 minút (od 11:50 do 12:00). Vzdialenosť od Alicinho hniezda k fontáne je polovicou vzdialenosti od Ľubovho hniezda k fontáne. Keďže Ľubo prejde polovicu svojej cesty za $10 : 2 = 5$ minút, od Alicinho hniezda k fontáne by mu to trvalo presne toľko. Alica je trikrát pomalšia, preto prejsť rovnakú vzdialenosť jej bude trvať trikrát dlhšie. Teda Alica dôjde k fontáne za $5 \cdot 3 = 15$ minút. Aby tam prišla presne o 12:00, musela vyraziť 15 minút pred 12:00, čo je o 11:45.

Lahké 10:

Ľubo sedí pri moste, ktorý je dlhý 100 metrov. Na most vošiel vlak o dĺžke 200 metrov. Za koľko sekúnd od tohto momentu most opustí posledný vagón, ak vlak prejde 50 metrov za 5 sekúnd?

Výsledok: 30

Riešenie:

Vlak vchádza na most, ktorý je dlhý 100 metrov. Samotný vlak má dĺžku 200 metrov. Aby posledný vagón opustil most, vlak musí prejsť celú dĺžku mosta (100 metrov) a k tomu ešte aj svoju vlastnú dĺžku (200 metrov). Dôvod je ten, že v momente, keď predok vlaku prejde celý most, koniec vlaku sa ešte stále nachádza 200 metrov za ním, takže musí prejsť aj túto vzdialenosť, aby opustil most. Spolu teda vlak musí prejsť 300 metrov.

Vlak prejde 50 metrov za 5 sekúnd a potrebuje prejsť 300 metrov. 300 metrov si môžeme rozdeliť na úseky dlhé 50 metrov, ktorých bude $300 : 50 = 6$. Teda vlak musí prejsť šesť úsekov po 50 metroch a každý tento úsek trvá 5 sekúnd. Preto celkový čas bude $6 \cdot 5 = 30$ sekúnd.

Lahké 11:

Rodinka holuba Ľuba má doma veľké a malé poháre. Celý objem džbánu dokáže presne naplniť 9 malých pohárov a 4 veľké poháre. Celý objem džbánu by namiesto toho mohol naplniť taktiež 6 malých pohárov a 6 veľkých pohárov. Ak sa celý objem džbánu použije na naplnenie iba veľkých pohárov, aký je maximálny počet veľkých pohárov, ktoré je možné úplne naplniť?

Výsledok: 10

Riešenie:

Džbán vieme naplniť dvoma spôsobmi, a to 9 malými pohármi a 4 veľkými pohármi alebo 6 malými pohármi a 6 veľkými pohármi.

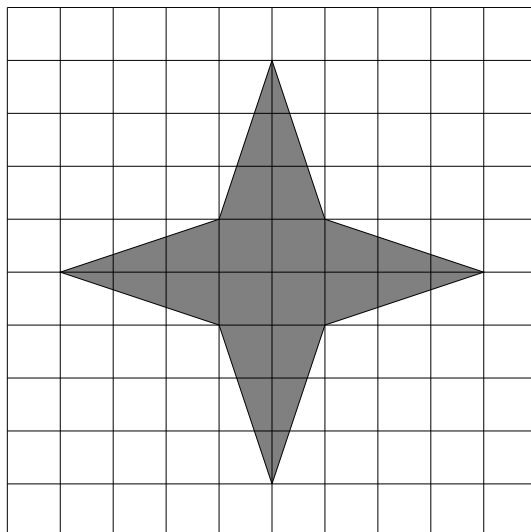
Všimnime si, že na naplnenie toho istého džbánu v oboch prípadoch využijeme 6 malých a 4 veľké poháre. Rozdiel v možnostiach je, že v prvom prípade využijeme navyše 3 malé poháre a v druhej 2 veľké poháre. Preto vieme, že 3 malé poháre majú rovnaký objem ako 2 veľké poháre.

Keďže 3 malé poháre majú rovnaký objem ako 2 veľké poháre, tak 9 malých pohárov má rovnaký objem ako 6 veľkých pohárov. Z druhej vety vieme, že džbán vieme naplniť 9 malými pohármi a

4 veľkými pohármi. 9 malých pohárov má rovnaký objem ako 6 veľkých pohárov, preto ich vieme zameniť. Džbán teda vieme naplniť $4 + 6 = 10$ veľkými pohármi.

Ľahké 12:

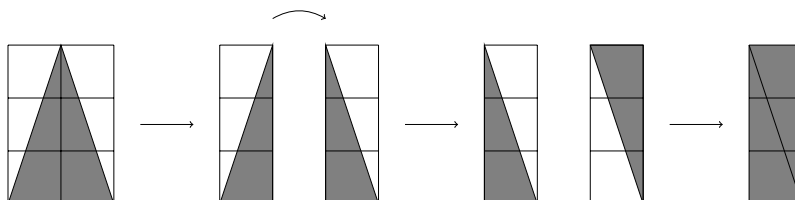
Holubicu Alicu v noci zaujala hviezda, ktorá vyzerá ako na obrázku. Aký obsah má hviezda, ak obsah jedného štvorčeka je 1 cm^2 ?



Výsledok: 16 cm^2

Riešenie:

Hviezdu na obrázku si vieme rozdeliť na niekoľko častí – na stred, ktorý sa skladá zo štyroch štvorčiek, a na 4 zhodné trojuholníky okolo stredu. Každý z týchto trojuholníkov vieme ešte rozdeliť na dva malé trojuholníky s výškou 3 cm a šírkou 1 cm.



Tieto dva malé trojuholníky vieme k sebe priložiť najdlhšou stranou tak, aby spolu vytvárali obdĺžnik s obsahom $3 \cdot 1 = 3 \text{ cm}^2$. Na obrázku máme 4 väčšie trojuholníky, teda 4 takéto dvojice malých trojuholníkov. Preto ich obsah dokopy bude $4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2$.

Keď k tomu pripočítame obsah stredu, čiže 4 cm^2 , dostávame $12 + 4 = 16 \text{ cm}^2$. Obsah celej hviezdy je preto 16 cm^2 .

Ľahké 13:

Máme 5 holubov postupne s počtom pierok 300, 500, 700, 900 a 1100, ktorým určujeme, ako sedia v rade na streche. Určte ich poradie, ak viete, že:

- všetky holuby sedia na streche,
- sú presne 2 holuby medzi holubmi s počtom pierok 300 a 900,
- holub so 700 pierkami sedí ako druhý v rade,

- žiaden holub nesedí medzi 2 holubmi, ktorí majú viac pierok ako on.

Výsledok: 300, 700, 1100, 900, 500

Riešenie:

Už zo zadania nám presne vyplýva pozícia holuba, ktorý má 700 pierok. Holub s počtom pierok 300 musí sedieť na okraji, aby sme zaistili, že nesedí medzi holubmi, ktorí majú viac pierok ako on.

Ak holub s 300 pierkami sedí na piatej alebo prvej pozícii a holub s 900 pierkami sedí o tri miesta ďalej ako on, znamená to, že bude sedieť na pozícii buď druhej, alebo štvrtej. Na druhej pozícii už ale sedí holub so 700 pierkami, teda holub s 300 pierkami musí sedieť na prvom mieste a holub s 900 pierkami na štvrtom.

Pre zvyšné dva holuby nám ostávajú len pozície medzi holubmi so 700 a 900 pierkami na treťom mieste v rade alebo na piatom mieste v rade za holubom s 900 pierkami. Holub s 500 pierkami nemôže sedieť medzi holubmi s väčším počtom pierok, teda bude na piatom mieste a na posledné miesto, ktoré nám ostalo, si sadne holub s 1100 pierkami.

Lahké 14:

Holuby hrajú turnaj v holubom basketbale. Ľubo dal v zápase 23 košov. Aký je súčet všetkých možných skóre, ktoré mohol Ľubo za zápas nahrať? Košom v basketbale môžeme získať 2 alebo 3 body.

Výsledok: 1380

Riešenie:

Začneme tým, aké najmenšie a aké najväčšie skóre by vedel Holub Ľubo nahrať. Ak by hodil 23 košov po 2 body, tak by mal $2 \cdot 23 = 46$ bodov. Ak by hodil 23 košov po 3 body, mal by $3 \cdot 23 = 69$ bodov. Ďalej by vedel hodiť 22 košov po 2 body a 1 koš po 3 body (spolu $2 \cdot 22 + 3 = 47$), 21 košov po 2 body a 2 koše po 3 body ($2 \cdot 21 + 3 \cdot 2 = 48$), ... Takto zistíme, že Holub Ľubo by mohol hodiť všetky skóre od 46 po 69. Ich súčet je teda $46 + 47 + 48 + \dots + 69 = 1380$.

Lahké 15:

Holub Ľubo zistil, že súčet cifier v roku 2025 je 9. Najbližšie o koľko rokov bude súčet cifier v roku dvakrát toľko?

Výsledok: 54

Riešenie:

Potrebuje najst najbližší rok, v ktorom bude súčet cifier $2 \cdot 9 = 18$.

Aby bol daný rok čo najbližší, budeme postupne zväčšovať cifry na mieste jednotiek, prípadne desiatok, stovák a tisícov, až kým nedosiahneme ciferný súčet 18. Ak by sme totiž začali od tisícok, hľadali by sme najvzdialenejší možný rok (napr. rok 2029 je určite bližšie ako rok 9025).

Ako prvú teda zmeníme cifru na mieste jednotiek za cifru 9. Dostaneme rok 2029, kde je ciferný súčet 13. Už nám ostáva iba zvýšiť ciferný súčet o 5, a preto zväčšíme cifru na mieste desiatok o 5, čím dostaneme rok 2079. Teda najbližší rok, kedy bude ciferný súčet 18, je rok 2079, čo nastane o $2079 - 2025 = 54$ rokov.

Lahké 16:

Holub Ľubo a holubica Alica majú dve malé holúbätá, ktoré majú 5 a 7 rokov. Všetci štyria majú dokopy 84 rokov. Aký bol súčet vekov členov ich rodiny pred ôsmimi rokmi?

Výsledok: 56

Riešenie:

Vieme povedať, že súčet veku Luba a Alice je $84 - 5 - 7 = 72$ rokov. Osem rokov dozadu ich dve holúbätá ešte neboli vyľahnuté, tak budeme počítať len so súčtom vekov Luba a Alice. Pred 8 rokmi boli obaja spolu mladší o $8 + 8 = 16$ rokov, teda súčet ich vekov bol $72 - 16 = 56$ rokov.

Lahké 17:

Holub Lubo sa hrá s číslami. Všetky čísla, ktoré každú cifru obsahujú maximálne raz, nazýva *Lubočísla* (najväčšie dvojciferné *Lubočíсло* je teda 98). Lubo od najväčšieho možného trojciferného *Lubočísla* odčítal najmenšie možné trojciferné *Lubočíсло*. Aký výsledok dostal?

Výsledok: 885

Riešenie:

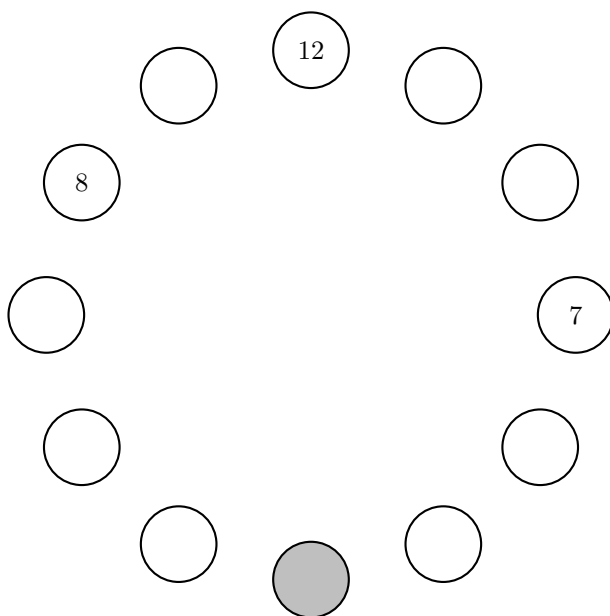
Aby sme našli najväčšie možné trojciferné číslo, prvá cifra (na mieste stoviek) bude najväčšia možná, teda 9. Potom hľadáme druhú najväčšiu cifru, ktorá sa ešte nepoužila, to je 8, tú dáme na miesto desiatok. Nakoniec vyberieme tretiu najväčšiu možnú cifru, ktorá sa tiež ešte nepoužila, teda 7, a tú dáme na miesto jednotiek. Takto dostaneme číslo 987, ktoré je najväčším možným trojciferným *Lubočíslom*.

Teraz chceme nájsť najmenšie trojciferné číslo. Na miesto stoviek musíme dať najmenšiu možnú cifru, ale ak by sme začali cifrou 0, tak by to nebolo trojciferné číslo, takže musíme začať cifrou 1. Následne na miesto desiatok chceme dať najmenšiu možnú cifru, ktorú sme ešte nepoužili, a to bude 0. Na miesto jednotiek dáme najmenšiu nepoužitú cifru 2.

Výsledok získame odčítaním menšieho od väčšieho a dostaneme $987 - 102 = 885$.

Lahké 18:

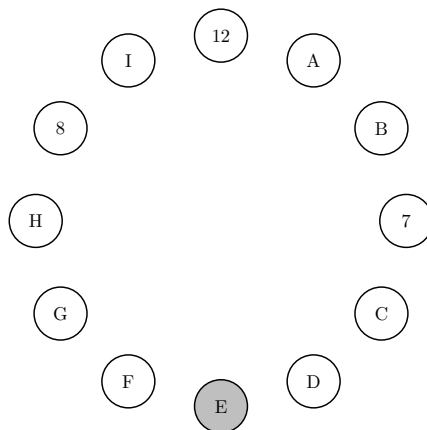
Na každom tanieri na stole bol počet omrvínok od 1 do 12 (každý počet práve raz). Pre každú dvojicu susedných tanierov platí, že počty omrvínok na nich sa líšia najviac o 2. Na obrázku vidíme taniere so 7, 8 a 12 omrvinkami. Koľko omrvínok je na tanieriku, ktorý je zafarbený sivou farbou?



Výsledok: 1

Riešenie:

Pre zjednodušenie vysvetľovania si doposiaľ nevyplnené krúžky označme písmenami od A po I, pričom začíname v krúžku napravo od krúžku s číslom 12 a pokračujeme v smere hodinových ručičiek ako na obrázku:



Najprv určíme počet omrvíniek na tanieriku *I*. Keďže tento tanierik susedí s tanierikmi, na ktorých je 8 a 12 omrvíniek, a vieme, že rozdiel počtov omrvíniek na susedných tanierikoch musí byť maximálne 2, potom na tanieriku *I* musí byť 10 omrvíniek ($12 - 10 = 2$, $10 - 8 = 2$). Inak sa to nedá, pretože potom by bol rozdiel počtu omrvíniek na tanieriku *I* a aspoň jednom z tanierikov s 8 alebo 12 omrvinkami väčší ako 2.

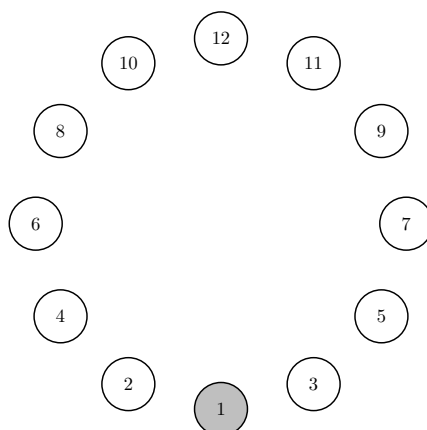
Ďalej môžeme určiť počet omrvíniek na tanieriku *A*. Tanierik, na ktorom je 12 omrvíniek, môže susediť iba s tanierikmi, na ktorých je 10 alebo 11 omrvíniek, pretože inak by bol rozdiel väčší ako 2. Ale my už vieme, že 10 omrvíniek sa nachádza na tanieriku *I*, preto sa na tanieriku *A* musí nachádzať 11 omrvíniek.

Pri tanieriku *B* postupujeme podobne ako pri tanieriku *I*. Keďže tento tanierik susedí s tanierikmi, na ktorých je 7 a 11 omrvíniek, musí byť na ňom 9 omrvíniek ($11 - 9 = 2$, $9 - 7 = 2$), pretože inak by bol rozdiel počtu omrvíniek na tanieriku *B* a aspoň jednom z tanierikov so 7 alebo 11 omrvinkami väčší ako 2.

Teraz môžeme pokračovať tanierikom *H*. Podľa pravidla zo zadania vieme, že tanierik s 8 omrvinkami (ktorý susedí s tanierikom *H*) môže susediť s tanierikmi so 6, 7, 9 a 10 omrvinkami. Avšak všetky tieto počty okrem 6 už sú zabraté, preto na tanieriku *H* musí byť 6 omrvíniek.

Podobne môžeme postupovať pri tanieriku *C*. Vieme, že tanierik so 7 omrvinkami (ktorý susedí s tanierikom *C*) môže susediť s tanierikmi s 5, 6, 8 a 9 omrvinkami, ale jediný momentálne nezabratý počet z vyššie uvedených je 5, teda tanierik *C* bude obsahovať 5 omrvíniek.

Napokon, podobným postupom môžeme pokračovať aj pri zvyšných tanierikoch. Môžeme teda v poradí zistiť, že na tanieriku *G* budú 4 omrvinky, na tanieriku *D* budú 3 omrvinky a na tanieriku *F* budú 2 omrvinky, pričom teraz nám už zostáva iba posledný tanierik *E* (ktorý je zároveň náš hľadaný tanierik) a počet omrvíniek 1, teda na sivom tanieriku bude práve 1 omrvinka.



Lahké 19:

Holub Lubo chce rozdeliť 2 červené, 2 žlté, 2 zelené a 2 modré bobuľky do škatuliek červenej, žltej, zelenej a modrej farby, do každej škatuľky po 2 bobuľky. Určte, aké bobuľky sú v červenej škatuľke, ak platí, že:

- ani jedna bobuľka nie je v škatuľke vlastnej farby,
- v jednej škatuľke je červená a žltá bobuľka,
- v zelenej škatuľke je modrá bobuľka,
- v červenej a žltej škatuľke je po jednej bobuľke z tej istej farby,
- v žltej škatuľke nie je červená bobuľka.

Výsledok: zelená, žltá

Riešenie:

Z 1. a 2. podmienky vieme, že červená a žltá bobuľka musia byť spolu v škatuľke, ktorá nie je červená ani žltá. Teda môžu byť v modrej alebo zelenej škatuľke.

Z 3. podmienky vieme, že v zelenej škatuľke je modrá bobuľka. To znamená, že červená a žltá bobuľka nemôžu byť spolu v zelenej škatuľke, lebo platí, že v každej škatuľke sú práve dve bobuľky a nie tri, takže musia byť v modrej škatuľke.

Zo 4. podmienky vieme, že v červenej a žltej škatuľke je po jednej bobuľke tej istej farby. Zo všetkých farieb okrem zelenej sme už jednu bobuľku dali do škatuľky. Zelená je teda jediná farba, z ktorej máme k dispozícii dve bobuľky. Preto do červenej aj do žltej škatuľky dáme po jednej zelenej bobuľke.

Pozrime sa teraz na to, aká môže byť druhá bobuľka v žltej škatuľke. K dispozícii máme už len červenú, žltú a modrú bobuľku. Z 5. podmienky vieme, že v nej nesmie byť červená bobuľka. Z 1. podmienky vieme, že v nej nemôže byť ani žltá bobuľka. Preto do žltej škatuľky ako druhú bobuľku dáme modrú.

Nakoniec nám zostali 1 červená a 1 žltá bobuľka, červená škatuľka (už má zelenú bobuľku) a zelená škatuľka (už má modrú bobuľku). Červená bobuľka nemôže ísť do červenej škatuľky (1. podmienka), takže ju dáme do zelenej škatuľky. Nakoniec žltá bobuľka ide do červenej škatuľky.

V červenej škatuľke sú zelená a žltá bobuľka.

Lahké 20:

Každé ráno sa 9 holubov pozdraví každý s každým podaním krídel. Dnes však 2 neprileteli. O koľko menej podaní krídel sa dnes udialo oproti bežnému ránu?

Výsledok: 15

Riešenie:

Nás zaujíma iba počet podaní krídel, o ktorý sme prišli. Teda ak máme 9 holubov a jeden nepriletí, tak stratíme všetky jeho podania krídel, ktorých je 8 (s každým zostávajúcim holubom).

Ak nepriletí druhý holub, je to taká istá situácia, ako keby sme mali holubov zo začiatku iba 8 a jeden by nepriletel. Teda stratíme 7 podaní krídel (zase s každým zostávajúcim holubom).

Dokopy sme stratili $8 + 7 = 15$ podaní krídel.

Lahké 21:

Na koľko najviac skupiniek vedia holuby rozdeliť celé čísla od 1 po 10 tak, aby súčet čísel v každej skupinke **nebol** deliteľný číslom 3?

Výsledok: 7

Riešenie:

Keďže nechceme, aby v ktorejkoľvek skupinke bol súčet čísel deliteľný číslom 3, nemôžu byť v žiadnej skupine len násobky čísla 3. Čiže v každej vytvorenej skupinke musí byť aspoň jedno číslo nedeliteľné číslom 3. Takýchto čísel je v povolenom rozmedzí 7. Skupiniek teda nemôže byť viac ako 7. Práve 7 skupiniek vieme tiež vytvoriť napríklad takto: $\{\{1,3,6,9\},\{2\},\{4\},\{5\},\{7\},\{8\},\{10\}\}$. Holuby vedia teda rozdeliť čísla na najviac 7 skupín.

Lahké 22:

Holuby Lubo a Peťo spolu hrajú šach. Každý má na začiatku na svojom časovači 15 minút. Časovače fungujú tak, že počas ťahu jedného z hráčov sa z jeho časovača odrátavajú sekundy a po dokončení ťahu sa príslušnému holubovi na jeho časovači prirátajú 3 sekundy. Ich hra sa skončila po tom, čo každý z holubov vykonal 20 ťahov. Lubovi na konci hry na časovači ukazovalo 5 minút a Peťovi 8 minút. Koľko minút trvala hra?

Výsledok: 19

Riešenie:

Každý hráč ma na začiatku na svojom časovači 15 minút, čo je $15 \cdot 60 = 900$ sekúnd. Keďže Lubovi na konci hry na časovači ukazovalo 5 minút, teda $5 \cdot 60 = 300$ sekúnd, podľa časovača zápas odohral za $900 - 300 = 600$ sekúnd. Avšak, na konci každého ťahu sa Lubovi na jeho časovači prirátali 3 sekundy, ktoré teraz nie sú započítané v čase jeho hry. Preto mu ich musíme naspäť pripočítať. Lubo vykonal 20 ťahov, takže mu pripočítame $20 \cdot 3 = 60$ sekúnd. To znamená, že Lubove ťahy dokopy trvali $600 + 60 = 660$ sekúnd.

Podobne postupujeme aj pri Peťovi, ktorému na konci hry ostalo 8 minút, čo je $8 \cdot 60 = 480$ sekúnd. Podľa jeho časovača bol čas Peťových ťahov $900 - 480 = 420$ sekúnd. Peťo tiež odohral 20 ťahov, takže mu k jeho času prirátame $20 \cdot 3 = 60$ sekúnd. Peťove ťahy trvali $420 + 60 = 480$ sekúnd. Celá hra sa skladala z Peťových aj Lubových ťahov, takže trvala $480 + 660 = 1140$ sekúnd, čo je $1140 : 60 = 19$ minút.

Lahké 23:

Holubica Alica si myslí trojciferné číslo. Všetky jeho cifry sú väčšie ako 1. Cifra na mieste desiatok je násobkom čísla 3. Cifra na mieste stoviek je väčšia ako cifra na mieste desiatok. Keď odčítame cifru na mieste jednotiek od cifry na mieste desiatok, dostaneme číslo 4-krát väčšie, ako keď odčítame cifru na mieste desiatok od čísla na mieste stoviek. Aké číslo si myslí?

Výsledok: 762

Riešenie:

Pretože cifra na mieste desiatok musí byť násobkom 3, môžu to byť iba cifry 0, 3, 6, 9. Všetky cifry však musia byť väčšie ako 1, takže 0 túto podmienku nespĺňa. Cifra na mieste stoviek je ale väčšia ako tá na mieste desiatok. Z toho vyplýva, že na mieste desiatok nemôže byť 9, lebo 9 je najväčšia cifra. Na mieste desiatok preto môžu byť cifry 3 alebo 6.

Rozdiel medzi cifrou na mieste desiatok a na mieste jednotiek je 4-krát väčší ako rozdiel medzi cifrou na mieste stoviek a desiatok. Rozdiel medzi cifrou na mieste stoviek a jednotiek môže byť najviac 2 ($2 \cdot 4 = 8$). Aby bol rozdiel medzi ciframi 8, musela by to byť jedna z dvojíc 9,1 a 8,0. Na mieste

desiatok je však cifra 3 alebo 6, ktorá nepatrí ani do jednej z týchto dvojíc, takže rozdiel medzi cifrou na mieste desiatok a na mieste jednotiek je 4 a rozdiel medzi cifrou na mieste stoviek a desiatok je 1.

Ak by sme na mieste desiatok mali 3 a odčítali od neho 4, dostali by sme výsledok menší ako 0 (konkrétne -1), čo nie je cifra. Od cifry 6 je možné číslo 4 odčítať a dostaneme $6 - 4 = 2$. Vidíme, že číslo 762 spĺňa všetky podmienky.

Lahké 24:

Lubo sa rozhodol zamestnať sa. Za rok by dostal 100 omrvíniek a jednu slanú tyčinku. Po siedmich mesiacoch sa ale rozhodol odísť, a tak dostal len tyčinku a 20 omrvíniek. Hodnotu koľkých omrvíniek má jedna tyčinka?

Výsledok: 92

Riešenie:

Ak by Lubo odpracoval celý rok, dostal by oproti odpracovaným 7 mesiacom o $100 - 20 = 80$ omrvíniek viac. Keďže má rok 12 mesiacov, znamená to, že Lubo pracoval o $12 - 7 = 5$ mesiacov menej, za ktoré dostal o 80 omrvíniek menej. Z toho vyplýva, že za 1 mesiac navyše by dostal $80 : 5 = 16$ omrvíniek.

Ak by za 1 mesiac dostal 16 omrvíniek, za celý rok by ich mal dostať $12 \cdot 16 = 192$. Namiesto toho by však dostal 100 omrvíniek a jednu slanú tyčinku. Z toho vyplýva, že jedna slaná tyčinka má hodnotu 92 omrvíniek.

Lahké 25:

Holub Lubo má kartičky s ciframi 2, 4, 6 a 8. Vždy vyberie tri kartičky s ciframi a zloží z nich dvojciferné a jednociferné číslo. Aký je **rozdiel** najväčšieho a najmenšieho súčinu, ktorý vie takto Lubo dostať?

Výsledok: 420

Riešenie:

Najväčší súčin Lubo dosiahne vtedy, keď vyberie kartičky s tromi najväčšími číslami, čiže 4, 6 a 8. Vytvorme z kartičiek tri súčiny tak, aby každý z nich mal rôzneho jednociferného činiteľa, a zo zvyšných dvoch kartičiek zostavme väčšie dvojciferné číslo: $4 \cdot 86 = 272$; $6 \cdot 84 = 504$; $8 \cdot 64 = 512$. Z týchto troch súčinov je 512 najväčší. Súčiny, kde by dvojciferné činitele mali prehodené cifry, by nadobúdali menšie hodnoty. Z dvojice cifier sme totiž zostavovali väčšie dvojciferné čísla. Najväčší súčin, ktorý vieme dosiahnuť, je teda 512.

Pozrime sa na najmenší súčin. Na jeho dosiahnutie bude Lubo potrebovať kartičky s tromi najmenšími číslami, čiže 2, 4 a 6. Vytvorme z kartičiek tri súčiny tak, aby každý z nich mal rôzneho jednociferného činiteľa, a zo zvyšných dvoch cifier zostavme menšie dvojciferné číslo: $4 \cdot 26 = 104$; $6 \cdot 24 = 144$; $2 \cdot 46 = 92$. Z týchto troch súčinov je 92 najmenší. Súčiny, kde by dvojciferné činitele mali prehodené cifry, by nadobúdali väčšie hodnoty. Z dvojice cifier sme totiž zostavovali menšie dvojciferné čísla. Najmenší súčin, ktorý vieme dosiahnuť, je teda 92.

Teraz odčítajme najväčší súčin od najmenšieho: $512 - 92 = 420$, čím dostávame hľadaný rozdiel.

Lahké 26:

Lubo raz zisťoval, koľko je dvojíc cifier A, B takých, že trojciferné číslo $\overline{ABA}$ je deliteľné číslom 4 a súčasne trojciferné číslo $\overline{BAB}$ je deliteľné číslom 3. Koľko je takých dvojíc, kde A a B sú rôzne cifry? (Pozn.: číslo, ktoré značíme ako $\overline{XYZ}$, je trojciferné číslo, ktoré má na mieste stoviek cifru X , na mieste desiatok cifru Y a na mieste jednotiek cifru Z .)

Výsledok: 4

Riešenie:

Začneme s rozborom oboch podmienok.

Podmienka deliteľnosti číslom 4 hovorí, že číslo tvorené jeho poslednými dvoma číslicami musí byť deliteľné 4. V čísle $\overline{ABA}$ preto musí byť číslo $\overline{BA}$ deliteľné 4.

Podmienka deliteľnosti číslom 3 hovorí, že súčet cifier čísla musí byť deliteľný 3. V čísle $\overline{BAB}$ musí preto byť súčet jeho cifier $B + A + B = 2 \cdot B + A$ deliteľný 3.

V tabuľke nižšie sú v prvom riadku všetky možné $\overline{BA}$, ktoré sú deliteľné 4 (B sa nesmie rovnať 0, inak by číslo $\overline{BAB}$ nebolo trojciferné). V druhom riadku je pre každé z nich vypočítaná hodnota ciferného súčtu čísla $2 \cdot B + A$ podľa toho, aké cifry v danej možnosti máme na miestach A a B .

$\overline{BA}$	12	16	20	24	28	32	36	40	48	52	56	60	64	72	76	80	84	92	96
$A + 2 \cdot B$	4	8	4	8	12	8	12	8	16	12	16	12	16	16	20	16	20	20	26

Z tabuľky vyberieme tie čísla, pri ktorých hodnota v druhom riadku je deliteľná 3, teda spĺňajú podmienku deliteľnosti číslom 3. Následne už iba z danej možnosti vyrobíme číslo v tvare $\overline{ABA}$.

Po prejdení všetkých možností dostaneme tieto platné trojciferné čísla: 464, 525, 636 a 828, platné dvojice cifier A a B sú preto 4.

Lahké 27:

Pred Lubovo obľúbené štvorciferné číslo napísala Alica cifru 5 a škrtila jeho poslednú cifru. Dostala tak číslo 3-krát väčšie ako to pôvodné. Aké bolo pôvodné číslo?

Výsledok: 1724

Riešenie:

V tejto úlohe opäť využijeme zápis, ktorým nahrádzame cifry písmenami (napr. číslo, ktoré značíme ako $\overline{YZ}$, je dvojciferné číslo, ktoré má na mieste desiatok cifru Y a na mieste jednotiek cifru Z).

Označme Lubovo obľúbené číslo ako $\overline{ABCD}$. Vieme, že Alica z neho vyškrtnutím poslednej cifry a dopísaním cifry 5 pred neho vytvorila číslo $5\overline{ABC}$. O tomto čísle vieme, že je trikrát väčšie ako $\overline{ABCD}$.

Všimnime si, že ak by cifra A bola rovná alebo väčšia ako 2, trojnásobok čísla $\overline{ABCD}$ by začínal aspoň cifrou 6 ($2000 \cdot 3 = 6000$). To sa však nezhoduje s číslom, ktoré vytvorila Alica. Zároveň, keďže je číslo $\overline{ABCD}$ štvorciferné, nemôže začínať nulou. Z toho vyplýva, že $A = 1$.

Teraz už vieme, že Lubovo obľúbené číslo má tvar $1\overline{BCD}$ a číslo, ktoré vytvorila Alica, má tvar $51\overline{BC}$.

Ak by bolo B rovné alebo menšie ako 5, tak by trojnásobok čísla $1\overline{BCD}$ začínal najviac cifrou 4, čo sa nezhoduje s číslom, ktoré vytvorila Alica ($1599 \cdot 3 = 4797$). Zároveň, ak by bolo B rovné 6, tak by trojnásobok tohto čísla nemal na mieste tisícok cifru 5 alebo na mieste stoviek cifru 1 ($1600 \cdot 3 = 4800$, $1699 \cdot 3 = 5097$). B okrem toho ani nesmie byť 8 alebo väčšie, lebo by jeho trojnásobok mal na mieste stoviek najmenej cifru 4 ($1800 \cdot 3 = 5400$). Z toho vyplýva, že $B = 7$.

Teraz vieme, že Lubovo obľúbené číslo má tvar $17\overline{CD}$ a číslo, ktoré vytvorila Alica, má tvar $517\overline{C}$.

Keď skúsime číslo $517\overline{C}$ vydeliť postupne číslom 3, zistíme, že prvé tri cifry Lubovho obľúbeného čísla musia byť $517\overline{C} : 3 = 172\overline{D}$ (hodnotu cifry D zatiaľ nepoznáme, ale s určitostou vieme určiť prvé tri cifry, keďže postupne $5 : 3 = 1$, zv. 2, ďalej $21 : 3 = 7$, zv. 0, na záver $7 : 3 = 2$, zv. 1, ktorý by sme preniesli na štvrtú cifru, ktorú ale nepoznáme).

Keď teda vydelíme číslo $517\overline{C}$ číslom 3, dostaneme Lubovo obľúbené číslo, o ktorom teraz vieme, že má tvar $172\overline{D}$. Z toho vyplýva, že $C = 2$.

Teraz už poznáme celé číslo, ktoré vytvorila Alica – 5172. Keď ho predelíme číslom 3, dostaneme Lubovo obľúbené číslo, ktorým je číslo $5172 : 3 = 1724$.

Lahké 28:

Lubo si v obchode kúpil zrno. Tlačiareň na bločky sa ale pokazila a nevytlačila desatinnú čiarku. Kvôli tejto chybe zaplatil Lubo o 400,95 € viac ako mal. Koľko mal pôvodne zaplatiť?

Výsledok: 4,05 €

Riešenie:

Keďže tlačiareň nevytlačila desatinnú čiarku, suma, ktorú Lubo zaplatil, bola určite celé číslo. Lubo zaplatil o 400,95 € viac, ako mal, a teda vieme, že pôvodná cena zrna mala dve desatinné miesta (aby pôvodná a nová cena spolu dávali celé číslo – číslo bez cifier na desatinných miestach). Z toho vyplýva, že Lubo musel zaplatiť 100-násobok pôvodnej ceny, lebo keď sa potrebujeme zbaviť cifier na dvoch desatinných miestach, musíme číslo vynásobiť číslom 100.

To znamená, že Lubo zaplatil 100-násobok pôvodnej sumy. Mal zaplatiť len za 1-násobok pôvodnej sumy, teda zaplatil o 99 násobkov viac. Týchto 99 násobkov má hodnotu 400,95 €. Jeden násobok, a teda suma, ktorú mal zaplatiť, je preto $400,95 € : 99 = 4,05 €$.

Lahké 29:

V meste žije toľko holubov, že ak by sme ich rozdelili do 4, 5, 6 alebo 9 krdľov po rovnako veľa holubov, vždy by zvýšil práve 1. Zároveň vieme, že ide o najmenší taký počet holubov, ktorý je väčší ako 1. Koľko holubov žije v meste?

Výsledok: 181

Riešenie:

Uvedomme si, že 1 holub ostane vždy práve vtedy, keď počet všetkých holubov zmenšený o 1 (bez toho zvyšného) je deliteľný číslami 4, 5, 6 a 9. Hľadáme teda najmenšie kladné celé číslo, ktoré je deliteľné všetkými týmito číslami.

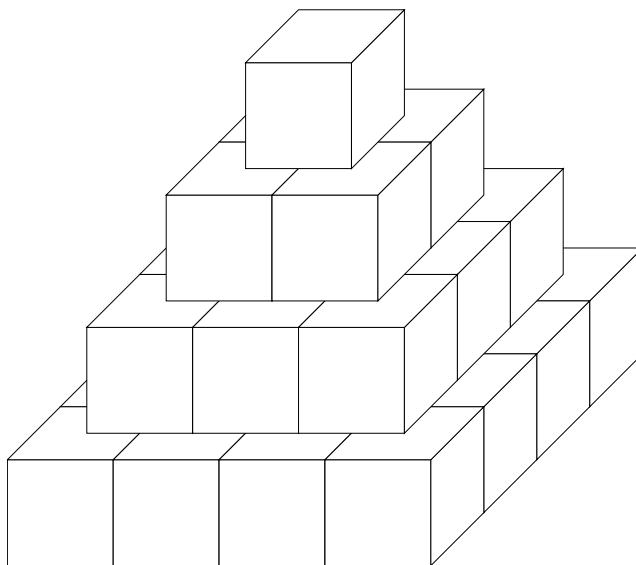
Podme ho hľadať postupne. Najmenším takým číslom, ktoré je deliteľné dvojicou čísel 4 a 5, je číslo 20. To znamená, že ďalej nám stačí hľadať najmenšie číslo, ktoré je deliteľné číslami 20, 6 a 9. Najmenším číslom, ktoré je deliteľné číslami 20 a 6, je 60 (pretože 20 a 40 číslom 6 deliteľné nie sú). Na záver sa nám stačí pozrieť už len na dvojicu čísel 60 a 9 – najmenším číslom, ktoré je deliteľné týmito dvoma číslami, je 180 (pretože 60 a 120 nie sú deliteľné číslom 9).

Toto číslo sme mohli nájsť aj pomocou najmenšieho spoločného násobku – najprv si určíme prvočíselný rozklad každého z čísel (prvočíslom je číslo, ktoré je deliteľné len číslom 1 a samým sebou): $4 = 2 \cdot 2$, $5 = 5$, $6 = 2 \cdot 3$, $9 = 3 \cdot 3$. Najmenší spoločný násobok je také číslo, ktoré vo svojom prvočíselnom rozklade obsahuje aspoň tie prvočísla, ktoré sú v rozklade každého z čísel, a neobsahuje žiadne navyše. Najmenšie také číslo je teda $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180$.

Keď k tomuto počtu pridáme toho jedného, ktorý sa nám zvýšil, zistíme, že v meste žije $180 + 1 = 181$ holubov.

Ľahké 30:

Holub Ľubo vyrobil holubici Alici hračku ako na obrázku tak, že zlepil kocky o hrane dĺžky 1 cm. Aby sa Alici zapáčila, namaľoval všetky steny hračky naružovo. Koľko cm^2 je namaľovaných naružovo?



Výsledok: 72

Riešenie:

Každá zo stien malých kociek má $1 \cdot 1 = 1 \text{ cm}^2$. Steny hračky si môžeme rozdeliť podľa toho, z akého pohľadu ich vidíme.

Pyramída vyzerá rovnako zo všetkých bočných pohľadov (na obrázku spredu, zozadu, sprava a zľava). V každom z bočných pohľadov vidíme postupne po poschodiach zhora dole 1, 2, 3 a 4 steny kociek. Dokopy teda vidíme 10 stien. Bočné pohľady máme 4, zatiaľ preto máme $4 \cdot 10 = 40 \text{ cm}^2$.

Teraz sa pozrime na pohľady zhora a zdola. Zdola vidíme štvorec 4×4 tvorený stenami kociek, čiže vidíme 16 cm^2 . Uvedomme si, že pohľad zhora má rovnaký obsah. Nezáleží totiž, na ktorom poschodí sa jednotlivé kocky nachádzajú, pri pohľade zhora nám splynú do 4×4 štvorca. V týchto dvoch pohľadoch teda máme dokopy $16 + 16 = 32 \text{ cm}^2$.

Spolu má povrch útvaru $40 + 32 = 72 \text{ cm}^2$.

Stredné

Stredné 1:

Holuby Lubo, Alica, Peťo, Kubo a Mirka sa zúčastnili pretekov. Všetky nasledujúce tvrdenia sú pravdivé:

- Alica skončila na 7. mieste,
- medzi Lubom a Alicou skončil práve jeden pretekár a Lubo skončil pred Alicou,
- Mirka a Lubo mali medzi sebou 3 iných pretekárov,
- Peťo a Kubo mali medzi sebou 1 iného pretekára,
- medzi Mirkou a Kubom skončili práve šiesti pretekári a Kubo skončil pred Mirkou.

Na ktorom mieste skončil Peťo?

Výsledok: 4.

Riešenie:

Na začiatku vieme, že Alica skončila na 7. mieste.

Zo zadania vieme, že medzi Lubom a Alicou bol jeden pretekár a Lubo bol pred Alicou. Keďže Alica bola na 7. mieste, tak Lubo bude na 5. mieste.

Mirka a Lubo mali medzi sebou tri miesta. Z toho vyplýva, že Mirka bude na 1. alebo 9. mieste.

Vieme, že medzi Mirkou a Kubom skončili práve šiesti pretekári a Kubo skončil pred Mirkou. Keby Mirka bola na 1. mieste, Kubo by sa pred ňou umiestniť nemohol. Z toho vyplýva, že Mirka bude na 9. mieste a Kubo na 2. mieste.

Nakoniec vieme, že Peťo a Kubo mali medzi sebou jedno miesto. Kubo bol na 2. mieste. Pred Kubom sa umiestnil len 1 pretekár, no s Peťom majú medzi sebou práve jedného pretekára, a teda Peťo pred ním skončiť nemohol. Skončil preto za ním na 4. mieste.

Stredné 2:

Holub Lubo 41-krát obletel námestie. Jeden oblet mu trvá 30 sekúnd. Po každom 7. oblete oddychuje a po každom 5. kole pije vodu. Oddychom strávi vždy 10 sekúnd a pije 5 sekúnd. Počas oddychu sa vie aj napiť. Koľko mu trvalo takto pooblieť námestie?

Výsledok: 1315 sekúnd alebo 21 minút a 55 sekúnd

Riešenie:

Pozrime sa na čas, ktorý letel. Ten vieme vypočítať jednoducho, je to $41 \cdot 30 = 1230$ sekúnd, lebo každý prelet trvá 30 sekúnd a preletov je 41.

Teraz sa pozrime na oddych. Oddychuje po každom 7. oblete, teda oddych si dá po 7., 14., 21., 28. a 35. oblete. Oddych by si dal aj po 42. oblete, lenže toľko obletov neabsolvoval. Keďže si spravil 5 prestávok, dokopy nimi strávil $5 \cdot 10 = 50$ sekúnd.

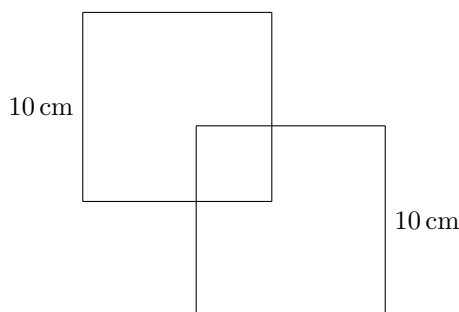
Podobne vypočítame dobu pitia. Pil vždy po 5. oblete, teda pil po 5., 10., 15., 20., 25., 30., 35. a 40. oblete. Pil by aj po 45. oblete, no toľko obletov neabsolvoval. Keďže absolvoval 8 páuz na pitie, celkový čas pitia je $8 \cdot 5 = 40$ sekúnd.

Všimnime si však, že po 35. oblete Lubo aj oddychoval, aj pil. Keďže však vie počas oddychu piť, znamená to, že po 35. oblete neminul 15 sekúnd, ale len 10 (pretože počas 10-sekundového oddychu 5 sekúnd pil). To znamená, že od sekúnd, ktoré sme doteraz nazbierali, musíme ešte 5 odčítať.

Celkovo mu to trvalo $1230 + 50 + 40 - 5 = 1315$ sekúnd alebo 21 minút a 55 sekúnd.

Stredné 3:

Holub Lubo nakreslil dva štvorce, každý so stranou dlhou 10 cm, ktoré sa prekrývajú ako na obrázku. Ich spoločná plocha má tvar štvorca, ktorý má obsah 16 cm^2 . Aký je obvod celého útvaru?



Výsledok: 64 cm

Riešenie:

Vieme, že náš útvar sa skladá z 2 veľkých štvorcov. Všimnime si na obrázku, že obvod celého útvaru je obvod dvoch veľkých štvorcov, od ktorého odčítame obvod menšieho štvorca, ktorý vznikol prekrytím veľkých štvorcov. O malom štvorci vieme, že jeho obsah je 16 cm^2 . Vieme, že obsah štvorca dostaneme vynásobením jeho dvoch strán, ktoré sú rovnaké. Keďže je obsah 16 cm^2 , strana malého štvorca bude dlhá 4 cm (pretože $4 \cdot 4 = 16$). Keďže jedna strana malého štvorca má 4 cm a štvorec má 4 také strany, celý obvod tohto štvorca bude $4 + 4 + 4 + 4 = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}$.

Obvod jedného veľkého štvorca bude rovný štvornásobku jeho strany, teda $4 \cdot 10 = 40 \text{ cm}$, obvod dvoch takých štvorcov bude $2 \cdot 40 \text{ cm} = 80 \text{ cm}$.

Teraz stačí odčítať obvod malého štvorca od obvodu veľkých štvorcov a zistíme, že obvod nášho útvaru je $80 - 16 = 64 \text{ cm}$.

Stredné 4:

Holub Lubo má dva displeje, každý z nich dookola vypisuje svoj text - prvý *MAMUTÍK* a druhý *2025*, pričom v každom posune sa posunie celý text o jednu pozíciu doľava a znak na prvej pozícii sa zjaví na konci. Prvé tri vypísania displejov vyzerali nasledovne:

1. AMUTÍKM 0252
2. MUTÍKMA 2520
3. UTÍKMAM 5202

Pri ktorom vypísaní prvýkrát prečítame *MAMUTÍK 2025*?

Výsledok: 28

Riešenie:

Ak je prvé vypísanie AMUTÍKM 0252, môžeme si všimnúť, že posunutím textu o jednu pozíciu doprava dostaneme „nulté“ vypísanie, ktoré je MAMUTÍK 2025, teda vypísanie, ktoré hľadáme.

Keďže slovo MAMUTÍK sa skladá zo siedmich písmen, uvidíme ho preto vždy po každom 7. vypísaní (teda po 7., 14. 21., atď.). Číslo 2025 sa skladá zo štyroch cifier, uvidíme ho preto vždy po každom 4. vypísaní (teda po 4., 8. 12., atď.). Oba texty sa správne vypíšu naraz po toľkom vypísaní, ktoré je deliteľné aj číslom 7, aj číslom 4. Najmenším takým číslom je 28. To znamená, že vypísanie MAMUTÍK 2025 sa v rovnakej podobe opäť zobrazí po 28 vypísaniach.

Stredné 5:

Do zápisu $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5$ holub Ľubo doplnil jeden pár zátvoriek. Koľko rôznych výsledkov mohol takto dostať?

Výsledok: 4

Riešenie:

Pri počítaní so zátvorkami si treba uvedomiť, že zátvorky majú vždy prednosť – preto v príklade, v ktorom máme zátvorky, najprv počítame to, čo je v nich. Následne má prednosť násobenie a delenie, až potom počítame sčítanie a odčítanie (v rámci zátvorky má tiež násobenie a delenie pred sčítaním a odčítaním prednosť). Môžeme si to ukázať na príklade $(3 + 2) \cdot 3 + 4$. Najprv musíme vypočítať to, čo je v zátvorke, čím dostaneme $5 \cdot 3 + 4$. Teraz, keď už nemáme žiadne zátvorky, môžeme vypočítať súčin, teda dostaneme $15 + 4$. Až teraz, keď nemáme žiadne zátvorky ani násobenie, môžeme príklad dopočítať a zistiť, že výsledkom je číslo 19.

Vráťme sa k nášmu zadaniu. Ak v zátvorke budú štyri čísla alebo menej ako dve čísla, zátvorka bude nepodstatná, lebo bude v sebe skrývať buď žiadnu, alebo všetky operácie. Takto dostaneme výsledok $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 26$.

Teraz skúsme dať do zátvorky dve čísla. Na to máme tri možnosti:

- $(2 \cdot 3) + 4 \cdot 5 = 6 + 4 \cdot 5 = 26$
- $2 \cdot (3 + 4) \cdot 5 = 2 \cdot 7 \cdot 5 = 70$
- $2 \cdot 3 + (4 \cdot 5) = 2 \cdot 3 + 20 = 26$

Ostáva nám teda preveriť možnosti, kde budú tri čísla v zátvorke:

- $(2 \cdot 3 + 4) \cdot 5 = (6 + 4) \cdot 5 = 10 \cdot 5 = 50$
- $2 \cdot (3 + 4 \cdot 5) = 2 \cdot (3 + 20) = 2 \cdot 23 = 46$

To sú všetky formy zápisu, aké môžeme dostať. Rôzne výsledky sú 26, 70, 50, 46. Celkovo teda mohol dostať 4 rôzne výsledky.

Stredné 6:

Holub Ľubo hrá s 2 kamarátmi hru. V každom kole práve jeden z holubov prehrá a následne musí zvyšným dvom holubom vyrobiť toľko hniezd, aby zdvojnásobil počet hniezd, ktoré majú. Po troch kolách majú všetky tri holuby práve 24 hniezd, pričom každý prehral práve raz. Koľko hniezd mal každý z holubov na začiatku hry?

Výsledok: 6

Riešenie:

Zo zadania vieme, že hrali tri kolá a každý holub prehral práve raz. Z toho vieme, že každý z holubov raz prehral a dvakrát vyhral. To znamená, že sa každému holubovi dvakrát zdvojnásobil počet hniezd

a raz zostal rovnaký. Počet hniezd každého holuba sa teda zoštvornásobil (ak dvojnásobok zdvojnásobíme, dostaneme štvornásobok). Hľadáme číslo, ktoré keď vynásobíme 4, dostaneme konečný počet hniezd, teda 24. Toto číslo je 6, lebo $6 \cdot 4 = 24$. Každý holub mal na začiatku 6 hniezd.

Stredné 7:

Holubovi Ľubovi a holubici Alici začalo na jar vypadávať zimné perie, aby im mohlo narásť letné. Pierka im začali vypadávať striedavo po jednom. Každé štvrté Ľubovo a každé piate Alicino pierko padlo na chodník. Na chodníku je 17 pierok. Koľko pierok spolu padlo mimo chodník?

Výsledok: 62

Riešenie:

Predstavme si situáciu, keď práve spadlo pierko na chodník Ľubovi a hneď potom alebo predtým aj Alici. Keďže každému z nich padajú pierka na chodník stále rovnako často (Ľubovi jedno pierko z každých 4 po sebe padajúcich a Alici jedno pierko z každých 5), táto situácia (vrátane poradia, v ktorom im spadli pierka na chodník) sa po niekoľkých spadnutých pierkach musí zopakovať. Najmenším číslom, ktoré je deliteľné číslami 4 a 5, je 20, takže najbližšie sa zopakuje po tom, čo spadne holubom po 20 pierok.

Kým spadne holubom po 20 pierok, na chodník spadne Ľubovi $20 : 4 = 5$ pierok a Alici $20 : 5 = 4$ pierka a mimo chodníka Ľubovi $20 - 5 = 15$ pierok a Alici $20 - 4 = 16$ pierok, teda dokopy $5 + 4 = 9$ na chodník a $15 + 16 = 31$ mimo chodníka.

Keby sme nechali holubom spadnúť dvakrát toľko pierok, dokopy by spadlo na chodník $2 \cdot 9 = 18$ pierok a mimo chodníka $2 \cdot 31 = 62$ pierok. V takej situácii by obom holubom spadlo 40 pierok, pričom posledné, keďže je deliteľné aj číslom 4, aj číslom 5, by obom spadlo na chodník. Posledné z nich by bolo 18. pierko na chodníku a predposledné by bolo 17. pierko na chodníku. Zo zadania vyplýva, že my sa nachádzame v čase medzi ich spadnutiami, a teraz vidíme, že mimo chodníka už musí ležať všetkých 62 pierok.

Stredné 8:

Holub Ľubo našiel papierik, na ktorom písalo: „Pre cifry A , B a C platí, že $\overline{AB} \cdot \overline{AB} = \overline{CCB}$ a $A \cdot B = B$. Aké je číslo $\overline{ACB}$?“ (Pozn.: číslo, ktoré značíme ako $\overline{XYZ}$, je trojciferné číslo, ktoré má na mieste stoviek cifru X , na mieste desiatok cifru Y a na mieste jednotiek cifru Z .)

Výsledok: 125

Riešenie:

Pozrime sa na súčin $A \cdot B = B$. Aby sa nejaké číslo po vynásobení iným rovnalo opäť samému sebe, buď musí byť ono 0 (lebo ak ľubovoľné číslo vynásobíme 0, výsledok bude vždy 0) alebo to druhé číslo musí byť 1. To znamená, že musí platiť $A = 1$ alebo $B = 0$.

Z podmienky $\overline{AB} \cdot \overline{AB} = \overline{CCB}$ vieme, že $\overline{CCB}$ dostaneme, ak číslo vynásobíme samým sebou ($\overline{AB} \cdot \overline{AB}$). Ak by platilo $B = 0$, tak by sme násobili dve čísla končiace nulou. Takto by sme ale dostali číslo, ktoré sa končí na dve nuly (napríklad $20 \cdot 20 = 400$). Aby potom platilo, že súčin vieme zapísať ako $\overline{CCB}$, aj prvá cifra by musela byť 0, a teda výsledné číslo by bolo 000, čo nie je trojciferné číslo. Z toho vyplýva, že $A = 1$.

Súčin $\overline{CCB}$ sa vždy končí na rovnakú cifru, ako súčin posledných cifier čísel, ktoré násobíme, takže B môže byť iba 1, 5 alebo 6, pretože len tieto čísla, ak ich vynásobíme samé sebou, majú vo výsledku na mieste jednotiek rovnakú cifru ($1 \cdot 1 = 1$, $5 \cdot 5 = 25$ a $6 \cdot 6 = 36$). Potom zostávajú len 3 možnosti: $11 \cdot 11 = 121$, $15 \cdot 15 = 225$ alebo $16 \cdot 16 = 256$.

Vieme ale, že súčin má byť v tvare $\overline{CCB}$, teda prvé dve cifry musia byť rovnaké. Tomuto vyhovuje iba 225, takže $A = 1$, $B = 5$ a $C = 2$. Z toho vyplýva, že $\overline{ACB} = 125$.

Stredné 9:

Holub Lubo kúpil holubici Alici náhrdelník s deviatimi perlami. Potom zistil, že jedna z perál na náhrdelníku je falošná. Perly vyzerali navonok úplne rovnako, teda sa falošná od pravých mohla líšiť iba svojou hmotnosťou. Lubo urobil 3 váženia:

- perly číslo 1, 2, 3 a 4 - vážia spolu 16 g,
- perly číslo 5, 6, 7 a 8 - vážia spolu 20 g,
- perly číslo 2, 6 a 9 - vážia spolu 16 g.

Kolko gramov váži falošná perla?

Výsledok: 8

Riešenie:

Keďže žiadna perla sa nenachádza naraz v štvorici (1, 2, 3, 4) a aj v štvorici (5, 6, 7, 8), tak jedna z týchto štvoríc určite obsahuje len pravé perly. To znamená, že pravá perla váži buď $16 \text{ g} : 4 = 4 \text{ g}$, alebo $20 \text{ g} : 4 = 5 \text{ g}$. Ak by všetky perly v trojici (2, 6, 9) boli pravé, tak by teda dokopy vážili buď $3 \cdot 4 \text{ g} = 12 \text{ g}$, alebo $3 \cdot 5 \text{ g} = 15 \text{ g}$, ani jedna z týchto možností ale nevyhovuje zadaniu, keďže majú spolu vážiť 16 g. Preto jedna z týchto troch perál je falošná. Rozoberme všetky možnosti:

- Ak by bola perla 2 falošná, tak perly 5, 6, 7 a 8 by boli pravé, teda pravá perla by vážila 5 g. Keďže perly 6 a 9 by boli pravé, tak spolu by vážili 10 g a perla 2 by musela vážiť 6 g, aby perly v trojici (2, 6, 9) dokopy vážili 16 g. Potom by ale perly 1, 2, 3 a 4 spolu vážili $5 \text{ g} + 5 \text{ g} + 5 \text{ g} + 6 \text{ g} = 21 \text{ g}$, ale majú mať podľa zadania 16 g. Táto možnosť teda nefunguje.
- Ak by bola perla 6 falošná, tak perly 1, 2, 3 a 4 by boli pravé a pravá perla by vážila 4 g. Perly 2 a 9 by teda spolu vážili 8 g a perla 6 preto tiež musí vážiť 8 g, aby spolu mali 16 g. Potom v štvorici (5, 6, 7, 8) by boli tri perly pravé a jedna falošná, teda spolu by vážili $4 \text{ g} + 4 \text{ g} + 4 \text{ g} + 8 \text{ g} = 20 \text{ g}$, čo je presne tá váha, ktorú podľa zadania majú mať. V tejto možnosti sú teda splnené všetky podmienky a 8 gramov je jediná váha, ktorú môže mať falošná perla.
- Ak by bola perla 9 falošná, tak všetky perly s číslami 1 až 8 sú pravé. To by ale znamenalo, že pravá perla váži naraz 4 g aj 5 g. Preto táto možnosť nemôže nastať.

Postupne sme rozobrali všetky možnosti a zistili sme, že falošná perla môže vážiť len 8 g.

Stredné 10:

Starý holub Baltazár potrebuje zistiť, kto zo skupiny Peťo, Martin a Jano je holub a kto vrabec. Vie, že holub vždy hovorí pravdu a vrabec vždy klame. Prítomní povedali:

- Peťo: „Medzi nami je presne jeden vrabec a ja to nie som.“
- Martin: „Peťo je holub.“
- Jano: „Peťo aj Martin sú holuby.“

Kto z tejto trojice je holub a kto vrabec? (Pozn.: Akonáhle niektorá časť vety neplatí, znamená to, že daný vták klame.)

Výsledok: Peťo, Martin aj Jano sú vrabce

Riešenie:

Ak by Peťo hovoril pravdu, bol by holubom a medzi Martinom a Janom by musel byť jeden vrabec. Martin, ktorý povedal „Peťo je holub,“ by v tomto prípade hovoril pravdu, a teda tiež by musel byť holub. Tým pádom na základe Peťovej vety by Jano musel klamať (pretože Peťo vraví, že je tam jeden vrabec, a vieme, že Peťo s Martinom to nie sú), ale to neplatí, pretože Jano hovorí pravdu. A keďže neexistuje možnosť, v ktorej by Peťo mohol mať pravdu, musí klamať, teda je určite vrabec.

Keď vieme, že Peťo je vrabec, tak vrabec bude určite aj Martin, pretože jeho veta určite neplatí. Keďže Peťo aj Martin sú vrabce, Janova veta tiež nie je pravdivá a tým pádom sú všetci traja vrabce.

Stredné 11:

Lubo sa išiel pozrieť na preteky, v ktorých preteká 7 holubov označených písmenami A až G a tipol si poradie, v ktorom by mali podľa neho skončiť: 1. A, 2. B, 3. C, ... 7. G. Reálne však preteky dopadli úplne inak – každý, kto mal podľa neho skončiť 2 pozície pred niekým iným, nakoniec skončil 2 pozície za ním. V akom poradí dorazili pretekári do cieľa?

Výsledok: 1. G, 2. F, 3. E, 4. D, 5. C, 6. B, 7. A

Riešenie:

Podľa skutočného poradia skončil holub A dve miesta za holubom C. Holub C skončil dve miesta za holubom E, holub E dve miesta za holubom G. Keď tieto rozdiely sčítame, zistíme, že rozdiel konečného umiestnenia holuba A a holuba G je $2 + 2 + 2 = 6$. Celkový počet súťažiacich holubov je 7. Jediná vyhovujúca dvojica miest, ktorých rozdiel je 6 je 1. a 7. miesto. Keďže holub A skončil za holubom G, holub G obsadil 1. miesto, holub A 7. miesto.

Holub E skončil na 3. mieste, dve miesta za holubom G. Holub C dorazil do cieľa dve miesta za holubom E, čiže na 5. mieste.

Zostali nám holuby B, D a F. Vieme, že holub B skončil dve miesta za holubom D a holub D dve miesta za holubom F. Celkový rozdiel umiestnenia holuba B a holuba F je $2 + 2 = 4$. Voľné zostali už len 2., 4. a 6. miesto. Preto je jediná vyhovujúca dvojica miest pre holuby B a F 2. a 6. miesto. Keďže holub B skončil za holubom F, holub B obsadil 6. miesto a holub F 2. miesto. Holub D skončil dve miesta za holubom F, čiže na 4. mieste. Výsledné poradie je teda 1. G, 2. F, 3. E, 4. D, 5. C, 6. B, 7. A.

Stredné 12:

Holub Lubo si počíta, koľkokrát preletel ponad jazero. Napísal si na papier všetky čísla od 1 po počet preletov. Cifru 1 napísal 175-krát a cifru 2 napísal 174-krát. Aký je počet jeho preletov?

Výsledok: 341

Riešenie:

Pozrime sa najprv na čísla 1 až 99. Uvedomme si, že v tomto rozmedzí sa cifra 1 nachádza na mieste jednotiek 10-krát (1, 11, 21, ..., 91) a rovnako aj cifra 2 sa na mieste jednotiek nachádza 10-krát (2, 12, 22, ..., 92). Na mieste desiatok sa cifra 1 tiež vyskytuje práve 10-krát (10, 11, 12, ..., 19), rovnako aj cifra 2 (20, 21, 22, ..., 29). V rozmedzí od 1 po 99 teda zapíšeme obe cifry presne 20-krát.

V rozmedzí od 100 do 199 napíšeme obe cifry na mieste jednotiek a na mieste desiatok rovnako veľakrát, teda 20-krát. Avšak, v každom čísle sme napísali navyše jednu cifru 1 na mieste stoviek, preto je v tomto rozmedzí $20 + 100 = 120$ cifier 1 a 20 cifier 2. Dokopy je od čísla 1 do 199 až $20 + 120 = 140$ cifier 1 a $20 + 20 = 40$ cifier 2.

V rozmedzí od 200 do 299 napíšeme obe cifry na mieste jednotiek a na mieste desiatok opäť rovnako veľakrát, teda 20-krát. Avšak, v tomto prípade sme v každom čísle napísali navyše jednu cifru 2 na

mieste stoviek, preto je v tomto rozmedzí 20 cifier 1 a $20 + 100 = 120$ cifier 2. Dokopy je od čísla 1 do 299 až $140 + 20 = 160$ cifier 1 a $40 + 120 = 160$ cifier 2.

V rozmedzí od 300 do 399 je opäť z každej cifry 20 výskytov na mieste jednotiek a desiatok, to už je však príliš veľa, pretože dokopy by sme mali 180 výskytov cifry 1 aj 2. Vieme preto, že počet Lubových preletov sa nachádza niekde medzi 300 až 399.

Do 175 cifier 1 nám chýba ešte $175 - 160 = 15$ výskytov cifry 1 a $174 - 160 = 14$ výskytov cifry 2.

V rozmedzí od 300 do 339 napíšeme obe cifry práve 14-krát, štyrikrát na mieste jednotiek (301, 311, 321, 331, resp. 302, 312, 322, 332) a 10-krát na mieste desiatok (310, 311, 312, ..., 319, resp. 320, 321, 322, ..., 329). V tomto momente máme napísaných $160 + 14 = 174$ cifier 1 a $160 + 14 = 174$ cifier 2.

Chýba nám už len jedna cifra 1, ktorú nájdeme v najbližšom čísle 341. Ak by spravil Lubo viac preletov (342 a viac), napísal by minimálne o jednu cifru 2 v čísle 342 viac, čo sa však stať nemôže, keďže ich už 174 napísal. Z toho vyplýva, že Lubo musel spraviť presne 341 preletov.

Stredné 13:

Holuby žijú v 14 holubníkoch, ktoré sú pri sebe poukladané ako na obrázku. Súčin počtov v každých štyroch susedných holubníkoch je 120. Niektoré počty už máme vyplnené. Aký počet holubov žije v holubníku, ktorý je zafarbený sivou farbou?

		2			4						3		
--	--	---	--	--	---	--	--	--	--	--	---	--	--

Výsledok: 5

Riešenie:

Keďže je súčin každej štvorice holubníkov väčší ako 0, musí platiť, že v každom holubníku je aspoň 1 holub. Zamyslime sa najprv nad ľubovoľnou päticou susediacich holubníkov. V druhom, treťom a štvrtom holubníku sú nejaké počty holubov. Aby bol v prvej štvorici a druhej štvorici rovnaký súčin, musí byť v prvom a piatom holubníku rovnaký počet holubov, keďže súčin troch stredných holubníkov musíme pre rovnaký súčin vynásobiť tým istým číslom. Z tejto úvahy môžeme vypočorovať, že počet holubov sa v každom 4. holubníku opakuje, aby bol vždy v dvoch po sebe idúcich štvoricach súčin rovnaký.

To znamená, že počet holubov 2, ktorý je v 3. holubníku, bude aj v 7. a 11. holubníku.

Počet holubov 4 v 6. holubníku bude aj v 10. a 14. holubníku a spätne v 2. holubníku.

Počet holubov 3 v 12. holubníku bude aj spätne v 8. a 4. holubníku.

	4	2	3		4	2	3		4	2	3		
--	---	---	---	--	---	---	---	--	---	---	---	--	--

Pozrime sa teraz na štvoricu holubníkov č. 6, 7, 8 a 9. Súčin vyplnených hodnôt je $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$. V sivom políčku teda musí byť počet $120 : 24 = 5$.

Stredné 14:

Holub Lubo si napísal na papier najmenšie kladné celé číslo, ktorého ciferný súčet sa rovná 8000. Aký je ciferný súčet čísla, ktoré je od napísaného čísla o 1 väčšie?

Výsledok: 9

Riešenie:

Ak potrebujeme, aby to bolo najmenšie kladné číslo s ciferným súčtom 8000, potrebujeme, aby malo čo najmenej cifier. Aby ich bolo čo najmenej, musíme používať tie najväčšie – deviatky. Číslo 8000 má zvyšok 8 po delení 9, teda okrem niekoľkých deviatok musíme použiť ešte jednu osmičku, aby malo čo najmenej cifier. Osmičku dáme na začiatok, aby to číslo bolo čo najmenšie, teda toto číslo vyzerá takto 899999... Keď k tomu pripočítame 1, tak dostaneme 900000... Súčet cifry 9 s ľubovoľným počtom cifier 0 je vždy 9.

Stredné 15:

Minulý mesiac holubica Alica minula 24 € na zrno, pričom každý balíček stál 0,80 €. Tento mesiac minula tiež 24 € na zrno, ale každý balíček stál 1,20 €. Aká bola priemerná cena balíčka? (Pozn.: priemer je hodnota, ktorú dostaneme, keď sčítame všetky hodnoty a výsledok vydelíme ich počtom.)

Výsledok: 0,96 €

Riešenie:

Keď Alica minula 24 €, pričom jeden balíček stál 0,80 €, tak kúpila $24 € : 0,80 € = 30$ balíčkov. Keď potom znova minula 24 €, ale jeden balíček stál 1,20 €, kúpila $24 € : 1,20 € = 20$ balíčkov. Dokopy teda kúpila 50 balíčkov zrna. Spolu zaplatila 48 €, priemerná cena balíčka preto bola $48 € : 50 = 0,96 €$.

Stredné 16:

Holub Lubo si napísal na papier číslo, ktoré je v tvare $\overline{ALALAAALALA}$ (A a L sú rôzne nenulové cifry). Súčet jeho cifier je $\overline{AL}$. Aké sú všetky možné hodnoty cifier A a L ? (Pozn.: číslo, ktoré značíme ako $\overline{XYZ}$, je trojciferné číslo, ktoré má na mieste stoviek cifru X , na mieste desiatok cifru Y a na mieste jednotiek cifru Z .)

Výsledok: $A = 3$ a $L = 4$ alebo $A = 6$ a $L = 8$

Riešenie:

Súčet cifier čísla $\overline{ALALAAALALA}$ je $A + L + A + L + A + A + L + A + L + A$, teda $6 \cdot A + 4 \cdot L$. Budeme ho ďalej nazývať „ciferný súčet“ čísla.

Zo zadania ešte vieme, že $\overline{AL}$ je rovné A -desiatok a L -jednotiek, teda $A \cdot 10 + L \cdot 1$. Budeme ho teda nazývať „dekadický zápis“ čísla.

Pozrime sa najskôr na *ciferný súčet*. $6 \cdot A$ je určite párne číslo, lebo keď ľubovoľnú cifru vynásobíme párnym číslom, dostaneme párne číslo. Z rovnakého dôvodu je aj $4 \cdot L$ párne. Súčet dvoch párných čísel je tiež párny, teda celý *ciferný súčet* je tiež párne číslo.

Zo zadania vieme, že *ciferný súčet* je rovný *dekadickému zápisu* $A \cdot 10 + L \cdot 1$, teda aj ten musí byť párny. To nastane práve vtedy, keď jeho posledná cifra, teda L , je jedna z cifier 0, 2, 4, 6, 8.

Môžeme sa teraz pozrieť na možné hodnoty L a následne aj A v oboch číslach (pričom dávame pozor na to, že A nemôže byť 0, lebo je to prvá cifra oboch čísel v zadaní):

- $L = 0$, potom *ciferný súčet* je $6 \cdot A + 4 \cdot 0$ a *dekadický zápis* je $A \cdot 10 + 0 \cdot 1$. Dostávame, že $6 \cdot A$ má vyjsť rovnako ako $A \cdot 10$. To sa môže stať iba vtedy, keď $A = 0$, čo sme si zakázali.
- $L = 2$, potom *ciferný súčet* je $6 \cdot A + 4 \cdot 2$, *dekadický zápis* je $A \cdot 10 + 2 \cdot 1$. Dostávame, že $6 \cdot A + 8$ má vyjsť rovnako ako $A \cdot 10 + 2$.

Pre $A = 1$ je *ciferný súčet* väčší ako *dekadický zápis*, pre zvyšné možnosti ($A \geq 2$) je *dekadický zápis* väčší ako *ciferný súčet*. My ale chceme rovnosť, takže táto možnosť nám nevyhovuje.

Pozn.: Všimnime si, že keď zvýšime A o 1 (napríklad zo 4 na 5), tak *dekadický zápis* sa zvýši o 10, ale *ciferný súčet* len o 6. Teda keď už je *dekadický zápis* raz väčší ako *ciferný súčet*, bude

väčší stále (a nemusíme skúšať ďalšie možnosti). Pozor, toto nemusí platiť všeobecne, ale určite to platí v tejto úlohe.

- $\underline{L=4}$, potom *ciferný súčet* je $6 \cdot A + 4 \cdot 4$, *dekadický zápis* je $A \cdot 10 + 4 \cdot 1$. Dostávame, že $6 \cdot A + 16$ má vyjsť rovnako ako $A \cdot 10 + 4$.

Pre $A = 1$ alebo 2 je *ciferný súčet* väčší ako *dekadický zápis*, pre $\underline{A=3}$ dostávame rovnosť, teda ďalej nemusíme skúšať (pretože v ďalších možnostiach bude *ciferný súčet* menší).

- $L = 6$, potom *ciferný súčet* je $6 \cdot A + 4 \cdot 6$ a *dekadický zápis* je $A \cdot 10 + 6 \cdot 1$. Dostávame, že $6 \cdot A + 24$ má vyjsť rovnako ako $A \cdot 10 + 6$.

Prejdeme všetky možnosti pre A , rovnosť tu nenastane.

- $\underline{L=8}$, potom *ciferný súčet* je $6 \cdot A + 4 \cdot 8$, a *dekadický zápis* je $A \cdot 10 + 8 \cdot 1$. Dostávame, že $6 \cdot A + 32$ má vyjsť rovnako ako $A \cdot 10 + 8$.

Prejdeme všetky možnosti pre A , rovnosť nastane vtedy, keď $\underline{A=6}$.

Týmto sme dostali platné riešenia a vylúčili ostatné možnosti.

Stredné 17:

Holub Lubo raňajkuje vždy jednu dážďovku alebo jednu húsenicu. Raňajkoval 6 dní za sebou, nikdy však nemal húsenicu dva dni po sebe. Koľko je rôznych možností, ako mohol vyzeráť Lubov raňajkový jedálniček počas týchto šiestich dní?

Výsledok: 21

Riešenie:

Úlohu by sme mohli riešiť aj postupným rozoberaním možností, koľko húseníc mohol Lubo zjesť, ale môžeme sa na to pozrieť aj postupne po dňoch.

V prvý deň mohol zjesť aj dážďovku, aj húsenicu, to sú dve možnosti. V druhý deň musíme rozlíšiť, či predchádzajúci deň zjedol dážďovku alebo húsenicu. Ak zjedol v prvý deň dážďovku, v druhý deň môže zjesť aj dážďovku, aj húsenicu. Ak zjedol v prvý deň húsenicu, v druhý deň môže zjesť len dážďovku, aby nemal húsenicu dva dni po sebe.

To môžeme zovšeobecniť – z toho, čo sme zistili v predchádzajúcom odseku, vyplýva, že pre každú možnosť, kedy si včera Lubo dal dážďovku, má dnes dve možnosti – môže si dať aj dážďovku, aj húsenicu. Pre každú možnosť, kedy si včera dal húsenicu, má dnes len jednu možnosť – dať si len dážďovku.

To znamená, že dnes má možností, že zje dážďovku, toľko, koľko bolo možností raňajok dokopy včera, a počet možností, že dnes zje húsenicu, je toľko, koľko bolo včera možností, že zjedol dážďovku.

Od druhého dňa teda vieme vyplniť tabuľku tak, že do počtu možností, že v daný deň zjedol dážďovku, napíšeme súčet možností predchádzajúceho dňa, a do počtu možností, že v daný deň zjedol húsenicu, opíšeme počet možností z predchádzajúceho dňa, v ktorých zjedol dážďovku.

	1. deň	2. deň	3. deň	4. deň	5. deň	6. deň
Počet možností, že zjedol dážďovku	1	2	3	5	8	13
Počet možností, že zjedol húsenicu	1	1	2	3	5	8
Počet možností spolu	2	3	5	8	13	21

Takýmto postupným vyplnením tabuľky pridáme na to, že na 6 dní má až 21 rôznych možností jedálnička.

Stredné 18:

Turnaja, ktorý práve prebieha, sa zúčastňuje 7 tímov holubov. Práve teraz má každý tím odohraných 0, 1 alebo 3 zápasy. Koľko najviac zápasov sa doteraz mohlo odohrať?

Výsledok: 9

Riešenie:

V každom zápase hrali dva tímy, teda keď sčítame počet zápasov, ktoré odohrali všetky tímy spolu, musíme dostať párne číslo (lebo každý zápas sa počíta obom tímom, ktoré ho hrajú).

Najväčší možný teoretický súčet zápasov odohraný všetkými tímami dostaneme, ak zvažíme, že každý zo 7 tímov má absolvované 3 zápasy, celkový počet zápasov je v takom prípade $3+3+3+3+3+3+3 = 21$. V každom zápase ale hrali dva tímy, teda reálny počet odohraných zápasov by v tomto prípade bol $21 : 2 = 10,5$, čo zrejme nemôže nastať.

Z toho nám vyplýva, že aspoň jeden tím musel hrať 0 zápasov. V opačnom prípade by každý zo 7 tímov odohral nepárny počet zápasov (1 alebo 3), teda súčet zápasov, ktorý odohrali všetky tímy, by bol nepárny, čo, ako sme povedali na začiatku, nemôže nastať.

Najväčší možný súčet je teda teoreticky $0 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18$. Znova, každý zápas sa počítal do súčtu dvakrát, teda počet zápasov je $18 : 2 = 9$.

Musíme ale ešte overiť, či sa takéto zápasy mohli naozaj odohrať. Označme tímy ako A, B, C, D, E, F, G . Zápasy mohli byť odohrané napríklad takto:

$$\begin{aligned} &AB, CD, EF, \\ &AD, CF, EB, \\ &AF, CB, ED, \end{aligned}$$

kde tím G neodohral žiaden zápas a ostatné tímy odohrali 3 zápasy. Keďže existuje možnosť, v ktorej 6 tímov odohralo po 3 zápasy a viac sa ich udiť nemohlo, je toto naše správne riešenie, a teda zápasov sa celkovo odohralo 9.

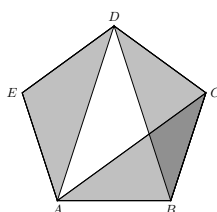
Stredné 19:

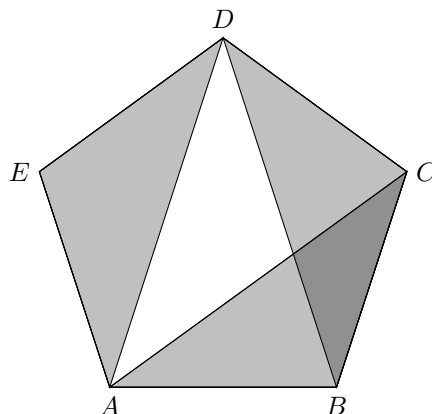
Strecha holubníka má tvar pravidelného päťuholníka $ABCDE$. Aký je rozdiel veľkostí uhlov BDA a BCA ?

Výsledok: 0

Riešenie:

Aby sme vedeli úlohu vyriešiť, musíme najprv zistiť, aká je veľkosť vnútorného uhla pravidelného päťuholníka. Akýkoľvek päťuholník si vieme rozdeliť na 3 trojuholníky (v našom prípade napríklad na BCD , ABD a ADE). Každý z týchto trojuholníkov má rovnaký súčet vnútorných uhlov – 180° . Dokopy majú tieto tri trojuholníky súčet vnútorných uhlov $180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$. Vnútorné uhly týchto troch trojuholníkov dokopy skladajú vnútorné uhly päťuholníka, preto aj súčet vnútorných uhlov ľubovoľného päťuholníka je 540° . Keďže je náš päťuholník $ABCDE$ pravidelný, veľkosť jedného uhla bude $540^\circ : 5 = 108^\circ$.





Trojuholník, ktorý sa skladá z dvoch susediacich strán päťuholníka, nazvime *malý trojuholník* (takým trojuholníkom je napr. trojuholník ABC). Každý *malý trojuholník* je rovnoramenný, lebo všetky strany päťuholníka sú rovnako dlhé. V rovnoramennom trojuholníku platí, že uhly pri základni sú rovnaké, teda $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BCA|$. Súčet vnútorných uhlov trojuholníka je 180° , pričom uhol pri vrchole päťuholníka $|\sphericalangle ABC| = 108^\circ$. Zostávajúce dva rovnaké uhly majú spolu $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$. Keďže sú rovnaké, jeden z nich má polovicu z tohto súčtu, teda $|\sphericalangle BCA| = 72^\circ : 2 = 36^\circ$. Toto môžeme zovšeobecniť pre všetky *malé trojuholníky* – platí, že uhly pri základni majú veľkosť 36° a uhol medzi stranami päťuholníka má 108° .

Trojuholníky BCD a DEA sú tiež *malé trojuholníky*. Z toho môžeme vyvodit, že uhly $\sphericalangle BDC$ a $\sphericalangle ADE$ majú po 36° .

Potom uhol $\sphericalangle BDA$, ktorý je medzi týmito dvoma rovnakými uhlami, môžeme vypočítat ako

$$|\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle EDC| - |\sphericalangle EDA| - |\sphericalangle CDB| = 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 36^\circ.$$

Oba uhly zo zadania majú veľkosť 36° , a teda rozdiel ich veľkostí je 0.

Stredné 20:

Holubica Alica našla na zemi napísaný príklad sčítania, kde jednotlivé cifry štvorciferných a päťciferných čísel boli nahradené písmenami. Aký je výsledok, keď rovnaké písmená označujú rovnaké cifry a rôzne písmená rôzne cifry?

$$\begin{array}{rcccc}
 & V & E & D & A \\
 & M & O & R & E \\
 \hline
 M & O & D & E & L
 \end{array}$$

Výsledok: 10652

Riešenie:

Stĺpce si budeme číslovať zľava doprava, teda stĺpec, v ktorom je iba M , bude prvý stĺpec.

Súčet dvoch štvorciferných čísel nikdy nevie byť viac ako $9999 + 9999 = 19998$, teda M je určite 1.

To ale znamená, že druhý stĺpec zľava musel prejsť cez desiatku (v prvom stĺpci sčítavame dve nuly). Keďže v druhom stĺpci už máme $M = 1$, vieme, že spolu s V bude mať súčet najviac 10, s prenesenou desiatkou z tretieho stĺpca by mohol mať 11. To znamená, že O môže byť buď 0, alebo 1. Keďže sú však všetky cifry rôzne a už $M = 1$, vieme, že $O = 0$.

	V	E	D	A
	1	0	R	E
1	0	D	E	L

Mohlo ale v treťom stĺpci dôjsť ku prechodu cez desiatku? Ak by sa to stalo, tak nutne E by bolo 9 a D by bolo 0, čo ale nemôže nastať, lebo O už je 0, teda nie, nedošlo ku prechodu.

Druhý stĺpec preto musí vyjsť priamo (bez pomoci tretieho stĺpca), teda nutne $V = 9$.

	9	E	D	A
	1	0	R	E
1	0	D	E	L

Keďže v treťom stĺpci nedošlo k prechodu cez desiatku, ale zároveň E je rôzne od D , nutne musí byť D o jedna väčšie ako E a v štvrtom stĺpci muselo dôjsť k prechodu cez desiatku.

To nám dáva pre štvrtý stĺpec dve možnosti (vdaka tomu, že D je o 1 väčšie ako E): aby vyšiel priamo, tak R by muselo byť 9, a aby vyšlo nepriamo (s pomocou piateho stĺpca), tak R by bolo 8. 9 už ale je využitý, čiže $R = 8$ a v piatom stĺpci došlo k prechodu cez desiatku.

	9	E	D	A
	1	0	8	E
1	0	D	E	L

Ďalej sa pozrieme na L . Vieme, že $A + E$ musí prejsť cez desiatku, a že čísla 8 a 9 sú už zabrané. Najväčší súčet $A + E$ teda je $6 + 7 = 13$, teda L je z 0, 1, 2, 3.

0 a 1 sú ale už zabrané, teda L je z 2, 3. Ak L by bolo 3, tak A a E musia byť v nejakom poradí 6 a 7, ale potom D by nemalo voľnú cifru, ktorou by sa mohlo stať.

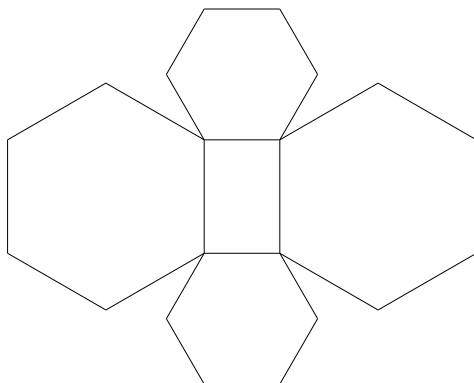
Ostáva nám $L = 2$. Možné A a L tu sú iba 6 a 6, čo nemôže nastať, lebo musia byť rôzne, alebo 5 a 7.

Aby sme ale vedeli nájsť cifru pre D , tak nutne $E = 5$, $A = 7$, potom $D = 6$, čo nám dáva riešenie. Po dosadení všetkých cifier do slova *MODEL* dostaneme výsledok 10652.

Ťažké

Ťažké 1:

Holubník mal pôdorys taký, ako je na obrázku. Je to tvar zložený z obdĺžnika a štyroch pravidelných šesťuholníkov (teda šesťuholníkov, ktoré majú všetky strany rovnako dlhé a vnútorné uhly rovnako veľké). Vieme, že obvod obdĺžnika je 17 centimetrov. Aký je obvod celého útvaru v centimetroch?



Výsledok: 85

Riešenie:

Môžeme si na začiatku všimnúť, že každý zo šesťuholníkov sa dotýka obdĺžnika práve jednou stranou. To znamená, že táto strana šesťuholníka a ani strana obdĺžnika sa nebude započítavať do celkového obvodu útvaru. Zato zvyšných 5 strán každého šesťuholníka sa bude započítavať do celkového obvodu, lebo sa nedotýkajú žiadnej inej strany. To znamená, že každý šesťuholník pridá do obvodu celého útvaru 5-násobok dĺžky jednej (nepoužitej) strany. Teda obvod celého útvaru bude 5-krát väčší ako súčet dĺžok nepoužitých strán. Zo zadania vieme, že nepoužité strany tvoria obdĺžnik s obvodom 17. Obvod celého útvaru bude preto $17 \cdot 5 = 85$.

Ťažké 2:

Holuby majú niekoľko omrvíniek. Omrvinky si rovnomerne delia. Ak by boli holuby tri, po delení im ostane 0 omrvíniek. Ak by boli holuby štyri, po delení im ostane tiež 0 omrvíniek. Ak by bolo holubov päť, po delení im ostanú ešte 3 omrvinky. Koľko najmenej omrvíniek majú holuby, ak vieme, že majú viac ako 50 omrvíniek?

Výsledok: 108

Riešenie:

Zo zadania vieme o počte omrvíniek, že je deliteľný číslami 3 aj 4, keďže po rozdelení medzi daný počet holubov nám nezostane ani jedna omrvinka. Najmenšie číslo, ktoré je deliteľné číslami 3 a 4 zároveň, je 12. To znamená, že počet omrvíniek musí byť násobkom čísla 12.

Z toho, že po delení 5 dostaneme zvyšok 3, vieme, že číslo sa musí končiť na cifru 3 alebo 8. Je to preto, lebo všetky čísla deliteľné číslom 5 sa končia na jednu z cifier 0, 5. Takže hľadáme najmenšie číslo väčšie ako 50, deliteľné číslom 12 a končiace sa cifrou 3 alebo 8. Teraz si vypíšeme násobky 12 a nájdeme prvý vyhovujúci:

12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, **108**.

Prvé, a teda najmenšie číslo, ktoré vyhovuje našim podmienkam, je 108.

Ťažké 3:

Holub Lubo písal na tabuľu zaradom čísla od 1 tak, že v každom riadku napísal práve 7 čísel (*čiže v prvom riadku sú čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, v druhom riadku sú čísla 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, atď.*). Potom ku každému riadku napísal súčet čísel v tom riadku. V ktorom riadku bude tento súčet najbližšie k číslu 2025?

Výsledok: 42

Riešenie:

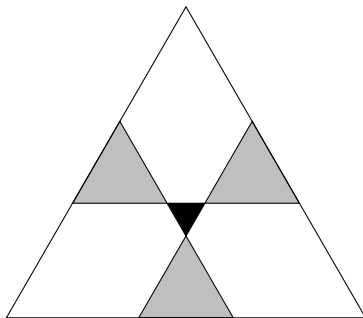
V prvom riadku je súčet 28. V každom ďalšom riadku sa nachádza ďalších 7 čísel, teda každé zo siedmich čísel v novom riadku sa zväčší o 7 oproti predchádzajúcemu. To znamená, že celkový súčet v každom ďalšom riadku bude o $7 \cdot 7 = 49$ väčší než v predchádzajúcom. Potrebujeme zistiť, na koľkom riadku bude súčet najbližšie k 2025, teda koľkokrát sa musí 28 zväčšiť o 49, aby sme boli čo najbližšie k 2025. Ak si od 2025 odmyslíme súčet prvého riadku $2025 - 28 = 1997$, vieme delením číslom 49 zistiť, kedy bude súčet čo najväčší, no stále menší ako 2025:

$$1997 : 49 = 40 \text{ zv. } 37$$

Teda na 40. riadku (ak pridáme odmyslený prvý riadok, tak 41.) bude náš súčet o 37 menší ako 2025 (každý súčet predtým bude menší). To znamená, že na 42. riadku bude súčet o 12 väčší ako 2025. A keďže každý ďalší súčet bude väčší (teda ďalej od 2025), najbližšie k 2025 bude súčet práve na 42. riadku.

Ťažké 4:

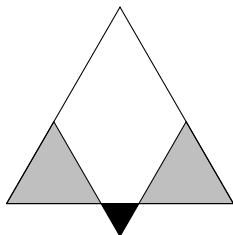
Lubovo hniezdo vyzerá ako rovnostranný trojuholník, ktorý je rozdelený 3 čiarami na niekoľko menších útvarov. Sivé trojuholníky sú tiež rovnostranné so stranou dĺžkou 5 a čierny trojuholník je rovnostranný so stranou dĺžkou 2. Aká je dĺžka strany veľkého trojuholníka?



Výsledok: 19

Riešenie:

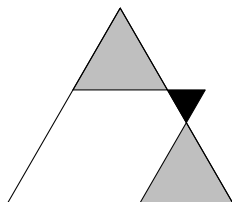
Najprv si z pôvodného obrázku vyberieme tento menší trojuholník:



V ňom vidíme, že spodná strana sa skladá z 2 strán sivých trojuholníkov a jednej strany čierneho trojuholníka. Ich dĺžky poznáme, a teda dĺžka strany vybratého trojuholníka je $5 + 2 + 5 = 12$.

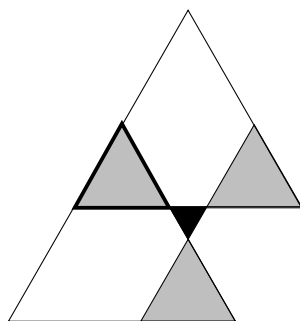
Ďalej sa pozrime na veľkosti uhlov v tomto trojuholníku. Vidíme, že dva z jeho uhlov sú totožné s uhlami sivých trojuholníkov, o ktorých zo zadania vieme, že majú 60° (sivé trojuholníky sú rovnostranné). Posledný uhol je uhol totožný s uhlom z veľkého trojuholníka, o ktorom tiež vieme, že je rovnostranný. Teraz vidíme, že tento menší trojuholník má všetky uhly veľkosti 60° , takže vieme, že tento trojuholník je rovnostranný.

Úplne rovnaké úvahy môžeme vykonať aj pre tento menší trojuholník:



Rovnako tu pridáme na to, že strana poskladaná z tmavších trojuholníkov je dlhá 12 a že je trojuholník rovnostranný (je to vlastne len pootočená verzia toho predchádzajúceho).

Keď tieto dva trojuholníky spojíme dokopy, vidíme, že sa prekrývajú v sivom trojuholníku (zvýraznený hrubou čiarou):



Stranu veľkého trojuholníka vieme zistiť tak, že sčítame strany dvoch nami vybraných rovnostranných trojuholníkov a následne odčítame stranu sivého trojuholníka, aby tam nebola pripočítaná dvakrát. Veľkosť strany Lubovho hniezda je preto je $12 + 12 - 5 = 19$.

Ťažké 5:

Pred holuba Ľuba hodil okoloidúci 100 omrvínek očíslovaných od 1 po 100. Ľubo je však veľmi vyberavý a zje len tie omrvinky, ktoré vznikli z nejakého kladného celého čísla vynásobením sebou samým (napríklad $5 \cdot 5 = 25$). Holubica Alica však chce, aby zjedol všetky omrvinky, a tak vždy, keď nechá niektoré na stole, mu ich znova očísľuje od 1 až po počet všetkých omrvínek a povie mu, nech ide jesť znova. Koľkokrát bude musieť holubica Ľubica prečíslovať omrvinky?

Výsledok: 18

Riešenie:

Všetkých čísel, ktoré vznikli vynásobením kladného celého čísla sebou samým, a zároveň sú menšie ako 100, je desať (nazvime ich *holubími* číslami): 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 a 100.

Všimnime si, že rozdiel medzi dvoma po sebe idúcimi *holubími* číslami vieme poskladať ako súčet tých čísel, z ktorých tieto *holubie* čísla vznikli.

Pôvodné číslo	1	2	3	4	5
Vzniknuté <i>holubie</i> číslo	1	4	9	16	25
Rozdiel medzi <i>holubími</i> číslami	3	5	7	9	11
Rozpísaný rozdiel	1 + 2	2 + 3	3 + 4	4 + 5	5 + 6

Pôvodné číslo	6	7	8	9	10
Vzniknuté <i>holubie</i> číslo	36	49	64	81	100
Rozdiel medzi <i>holubími</i> číslami	13	15	17	19	
Rozpísaný rozdiel	6 + 7	7 + 8	8 + 9	9 + 10	

Po prvom očíslovaní zje Ľubo 10 omrvíniok. Po prečíslovaní ostanú omrvinky 1 – 90, v ktorých sa nachádza len 9 *holubích* čísel. To znamená, že v tomto kroku Ľubo zje 9 omrvíniok a ostane ich presne 81, čo je ďalšie *holubie* číslo.

Ako môžeme vidieť v tabuľke, podobne to bude vyzeráť vždy – z každého *holubieho* čísla Ľubo najprv zje taký počet omrvíniok, aké je pôvodné číslo z tohto *holubieho* čísla (pravý sčítanec z rozpísaného rozdielu), v druhom kroku zje o 1 omrvinku menej (ľavý sčítanec z rozpísaného rozdielu), lebo zje o *holubie* číslo menej. To ho dostane presne na počet menšieho *holubieho* čísla.

Z toho vyplýva, že Alica musí pre každý zo sčítancov v rozpísaných rozdieloch v tabuľke omrvinky práve raz prečíslovať (okrem úplne posledného, pretože prvýkrát už mal Ľubo omrvinky očíslované od okoloidúceho). V rámci tabuľky ich prečíslovala 17-krát.

Je však dôležité si z tabuľky všimnúť, že sa postupnými krokmi takto dostane Ľubo na najmenšie *holubie* číslo 1, a teda 1 omrvinka ešte ostáva. Alica ju musí poslednýkrát prečíslovať, teda celkový počet prečíslovaní bude 18.

Ťažké 6:

Holub Ľubo rád cestuje, preto každý deň preletí o jeden kilometer viac než predchádzajúci deň. Prvý deň preletí jeden kilometer, druhý dva, tretí tri... Každú noc ho ale vietor odvane štyri kilometre naspäť. Na ktorý deň prekoná hranicu 100 kilometrov od miesta, z ktorého prvý deň začínal?

Výsledok: 18

Riešenie:

Prvý deň Ľubo preletí jeden kilometer, ale prvú noc ho odvane štyri kilometre naspäť. Takže za prvý deň a noc sa pohne dokopy o tri kilometre, ale dozadu, takže o –3 kilometre smerom k hranici. Druhý deň preletí až dva kilometre a stále ho odvane o štyri, takže za druhý deň a noc sa dokopy posunie o –2 kilometre k hranici. Každý ďalší cyklus jedného dňa a jednej noci sa toto číslo zväčší o 1. A tieto čísla budeme sčítavať, až kým súčet nepresiahne 100. $-3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 114$.

To je 19 cyklov dňa a noci. Môžeme si ale všimnúť, že po osemnástom cykle bol Ľubo 99 kilometrov od miesta kde začal. Tento cyklus ale končil nocou, počas ktorej ho odvialo 4 kilometre naspäť, čo znamená, že na konci osemnásteho dňa už bol 103 kilometrov od miesta, kde začal. Takže hranicu v skutočnosti prekonal už na osemnásty deň, napriek tomu, že ho počas nasledujúcej noci ešte odvialo znovu pred ňu.

Ťažké 7:

Holubica Alica vytvorila pre Ľuba dve päťciferné čísla tak, že spolu obsahujú všetky cifry od 0 po 9, každú práve raz. Aký najmenší rozdiel môžu tieto čísla mať?

Výsledok: 247

Riešenie:

Prvé cifry čísel musia byť rôzne, teda sa musia líšiť aspoň o 1. Najskôr si musíme uvedomiť, že najmenší rozdiel medzi číslami dostaneme práve vtedy, keď rozdiel medzi ich prvými ciframi bude 1. To je jediný spôsob, ako by sme mohli dostať rozdiel menší ako 1000. Zatiaľ ale ešte nevieme presne, ktoré dve cifry použijeme, vieme iba to, že ich rozdiel bude 1.

Volajme naše dve čísla zatiaľ A a B tak, že číslo A bude začínať tou menšou z týchto dvoch cifier, teda aj bude menšie ako číslo B .

Vezmime si tú väčšiu zo začínajúcich cifier (teda tú, ktorou začína číslo B) a uvedomme si, že číslo tvorené z tejto cifry a samých núl je akási hranica (napríklad keby číslo A začínalo na 6 a číslo B na 7, touto hranicou by bolo 70000). Táto hranica je určite väčšia ako číslo A a menšia ako číslo B . Číslo A má menšiu prvú cifru ako táto hranica, teda bude menšie. Číslo B má rovnakú prvú cifru ako táto hranica, ale zvyšné cifry nemôžu všetky byť nuly, preto bude väčšie.

Najmenší rozdiel dostaneme tak, že obe naše čísla čo najviac priblížime k tejto hranici. Teda tak, že číslo A bude čo najväčšie a číslo B bude čo najmenšie. To urobíme jednoducho – aby číslo A bolo čo najväčšie, na jeho druhú cifru dáme najväčšiu možnú cifru, teda 9, na tretiu cifru dáme druhú najväčšiu cifru, teda 8, na štvrtú cifru 7 a na piatu 6.

Aby číslo B bolo čo najmenšie, na jeho druhú cifru dáme najmenšiu možnú cifru, teda 0, na tretiu cifru dáme druhú najmenšiu cifru, teda 1, na štvrtú cifru 2 a na piatu 3. Ostali nám nepoužité už iba cifry 4 a 5, čo vyhovuje, pretože sme iba potrebovali dve cifry s rozdielom 1, ktoré môžeme dať na začiatky čísel. Naše čísla teda budú 49876 a 50123. Ich rozdiel je $50123 - 49876 = 247$.

Ťažké 8:

Pred volejbalom sa 9 holubov delí do dvoch tímov po 4 (a 1 rozhodca). Holubom nezáleží na tom, v ktorom tíme sú, iba s kým v ňom sú. Kolkými spôsobmi sa vedia rozdeliť?

Výsledok: 315

Riešenie:

Máme 9 možností, koho vyberieme za holuba-rozhodcu. Pre každú z týchto možností potrebujeme zistiť, koľko máme tímových rozdelení.

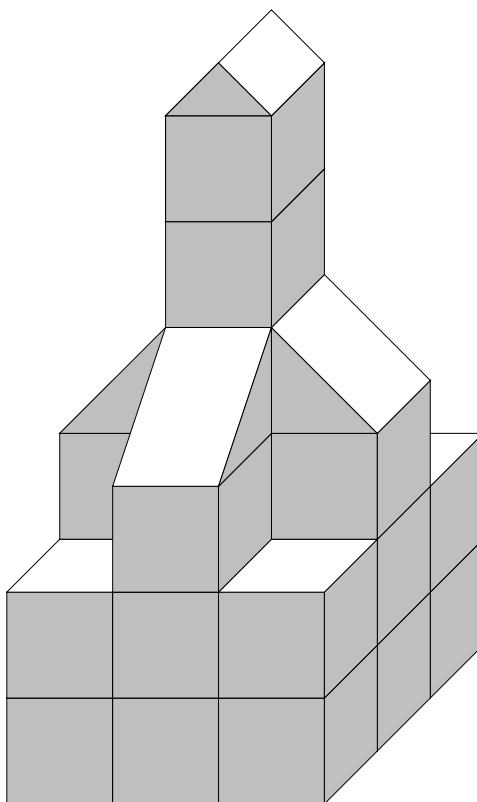
Podme poskladať prvý tím. Máme 8 možností, koho vyberieme za prvého hráča, potom už len 7 na druhého hráča, 6 na tretieho a 5 na štvrtého. Teda by sme mali $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ možností, ako zostaviť prvý tím (pre každého z 8 na prvom mieste máme 7 možností, ako vybrať niekoho na druhé miesto, následne pre všetky tieto možnosti máme 6 možností, ako vybrať niekoho na tretie miesto atď., preto čísla násobíme).

Ale všimnime si, že nás nezaujíma poradie, v ktorom sme holubov do tímu vybrali, ale započítali sme všetky možné poradia výberu (započítali sme napríklad aj poradie 1234, aj 4321, pričom to je tá istá možnosť, my potrebujeme tieto možnosti zlúčiť). Koľko je teda možností, ako vybrať ten istý tím štyroch holubov? Máme 4 možnosti, koho vyberieme za prvého hráča, potom už len 3 na druhého hráča, 2 na tretieho a štvrtý nám ostane. To je $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ možností. My však chceme započítať každý tím raz, nie 24-krát, teda počet možností, ako vybrať prvý tím, bude $1680 : 24 = 70$.

Každý výber prvého tímu (už pri vybratí rozhodcovi) nám rovno určuje druhý tím. Všimnime si, že vybrať prvý tím z istých hráčov a vybrať prvý tím z presne opačných hráčov (pôvodní hráči zostanú v druhom tíme) sú vlastne tá istá možnosť, lebo nám nezáleží na poradí tímov, teda každú možnosť sme započítali 2-krát, a to nechceme. Teda pre každú z deviatich možností na rozhodcu máme $70 : 2 = 35$ možností, ako rozdeliť tímy, to je dokopy $35 \cdot 9 = 315$ možností.

Ťažké 9:

Holub Ľubo sa presťahoval do nového holubníka, ktorý je na obrázku. Vypočítajte jeho objem, ak hrana jednej kocky má dĺžku 2. Zozadu vyzerá rovnako ako spredu.

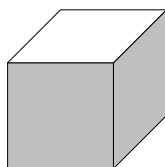


Výsledok: 226

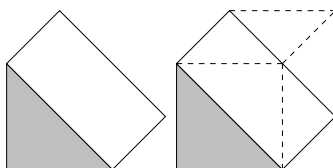
Riešenie:

Najprv si zistíme, aký objem majú útvary, z ktorých je holubník zložený, potom útvary spočítame.

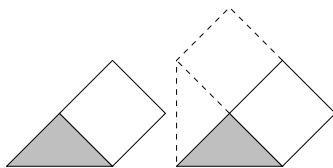
Objem základnej kocky je $strana \cdot strana \cdot strana$, v našom prípade $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.



Druhý útvar je rampa, ktorá je polovicou základnej kocky, lebo z dvoch rámp vieme zložiť pôvodnú kocku. Objem rampy je preto $8 : 2 = 4$.



Posledný útvar je strieška, ktorá je polovicou z rampy, pretože vieme z dvoch striešok zložiť celú rampu. Objem striešky je preto $4 : 2 = 2$.



Vieme, že holubník vyzerá spredu rovnako ako zozadu a je prirodzene vyplnený (nie je dutý). Pozrime sa teraz na jednotlivé poschodia holubníka:

1. je široké tri kocky a dlhé tri kocky, teda je zložené z $3 \cdot 3 = 9$ kociek.
2. je rovnaké ako prvé, teda je zložené tiež z **9** kociek.
3. v každom rohu chýba jedna kocka, teda obsahuje už len **5** plných kociek.
4. má **1** plnú kocku v strede a **4** rampy po bokoch.
5. je zložené len z **1** plnej kocky.
6. je tiež zložené len z **1** plnej kocky.
7. je iba iba **1** strieška.

Spočítajme si súčet všetkých útvarov. Celkovo máme $9 + 9 + 5 + 1 + 1 + 1 = 26$ plných kociek, 4 rampy a jednu striešku. Celkový objem teda je $26 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 226$.

Ťažké 10:

Holub Ľubo si napísal do radu čísla od 0 do 2025 vrátane v nejakom poradí. Pre každé číslo platí, že počet **menších** čísel pred ním a počet **väčších** čísel pred ním sa líšia najviac o 1 (*pre prvé číslo sú oba počty 0, pre druhé je jeden 0 a jeden 1 atď.*). Číslo napísané na 84. pozícii je menšie ako číslo, ktoré je na 363. pozícii. Aké čísla môžu byť napísané na 83. pozícii? **Ako odpoveď odovzdajte ich súčet.**

Výsledok: 1984

Riešenie:

Začnime tým, že sa pozrieme na čísla 0 a 2025. Žiadne číslo nie je menšie ako 0, preto, ak by 0 nebola na prvej alebo druhej pozícii, tak by pred ňou určite boli napísané aspoň dve väčšie čísla a žiadne menšie. Keďže to nemôže nastať, tak 0 je určite na prvej alebo druhej pozícii. To isté vieme povedať o čísle 2025, keďže žiadne číslo nie je väčšie ako 2025. Tým máme určené, že na prvej a druhej pozícii sú čísla 0 a 2025, len nevieme, v akom poradí.

Ďalej vieme to isté povedať pre čísla 1 a 2024. Tie majú len jedno číslo menšie, prípadne len jedno číslo väčšie než sú oni, a to sa nachádza na prvej alebo druhej pozícii. Tieto dve čísla môžu preto byť na tretej alebo štvrtej pozícii, keďže vtedy sa pred nimi nachádzajú spolu najviac tri čísla, čiže najviac dve čísla z každej kategórie. Opäť ale nemôžu byť na piatej pozícii a neskôr, pretože vtedy by pred nimi boli aspoň tri čísla z jednej kategórie a najviac jedno z druhej.

Túto myšlienku vieme rozšíriť na všetky čísla od 0 do 2025. Ak totiž pridáme k najmenšiemu ešte nenapísanému číslu, tak sme všetky menšie čísla už napísali. Taktiež sme napísali aspoň toľko väčších čísel. To znamená, že môžeme pred neho napísať už len jedno číslo väčšie ako je ono samé, inak by

sa už rozdiel menších a väčších čísel pred ním líšil o viac ako 1. Preto ho opäť môžeme napísať len na prvú alebo druhú pozíciu v momentálnej dvojici. To isté vieme povedať o najväčšom ešte nenapísanom čísle, keďže všetky väčšie čísla už boli napísané pred ním, ale taktiež bolo napísaných rovnako veľa menších čísel.

83. a 84. pozícia tvoria 42. dvojicu čísel. Keďže sme začínali číslami 0 a 2025, ktoré boli v 1. dvojici, tak na týchto dvoch pozíciách môžu byť umiestnené len čísla $0 + 41 = 41$ a $2025 - 41 = 1984$. V zadaní máme ale ešte podmienku, že číslo napísané ako 84. je menšie ako číslo, ktoré je na 363. pozícii. 363. pozícia spolu s 364. pozíciou tvorí 182. dvojicu čísel, preto sa na nej teda môže nachádzať len číslo $0 + 181 = 181$ alebo $2025 - 181 = 1844$. Obidve tieto čísla sú menšie ako číslo 1984, to teda nemôže byť napísané na 84. pozícii. Preto tam je určite číslo 41 a na 83. pozícii musí byť napísané číslo 1984. Keďže to je jediná možnosť, tak súčet všetkých možností je 1984.



Mamut

Mamut je matematická súťaž organizovaná Združením STROM a Prírodovedeckou fakultou Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach pre žiakov 4. až 6. ročníka základných škôl a prímym osemročným gymnáziám. V roku 2025 sa konal už 23. ročník tejto súťaže a druhýkrát sa súťaž organizovala aj v meste Poprad.

Trvanie súťaže bolo 120 minút. Úlohy boli rozdelené podľa obtiažnosti na 1-bodové (ľahké), 3-bodové (stredné) a 5-bodové (ťažké). Na začiatku súťaže každé družstvo dostalo prvých päť úloh: tri ľahké, jednu strednú a jednu ťažkú. Súťažiaci v tíme riešili ľubovoľnú z piatich úloh, ktoré mali k dispozícii. Po vyriešení úlohy súťažiaci odovzdali výsledok opravovateľovi, ktorý vyhodnotil jeho správnosť. Ak bol výsledok správny, súťažiaci úlohu odovzdali zadávateľovi, ktorý mu započítal body a vymenil ju za novú úlohu zvolenej obtiažnosti. V opačnom prípade mohol tím v riešení úlohy pokračovať a odovzdávať ju znova. Po treťom nesprávnom odovzdaní úlohy mohol opravovateľ vyžadovať okrem výsledku aj postup riešenia. Tím, ktorý vyriešil všetky súťažné úlohy pred uplynutím časového limitu, dostal za každú ušetrenú minútu 1 bod. Počas súťaže nebolo dovolené používať kalkulačky, rysovacie pomôcky a ani žiadnu literatúru.

Spolu so zadaniami úloh dostal na začiatku súťaže každý tím tri žetóny. Každý žetón žiakom umožňoval v druhej polovici súťaže (od konca 60. minúty až do konca súťaže) vymeniť úlohu za inú úlohu zvolenej obtiažnosti. Po použití tohto žetónu sa tím nemohol vrátiť k riešeniu úlohy, ktorú odovzdal spolu so žetónom. Okrem matematických úloh žiaci mohli počas súťaže absolvovať aj 3 športové úlohy, ktoré boli vyhlasované po 30, 60 a 90 minútach od začiatku súťaže. Za splnenie každej športovej úlohy získali súťažiaci 1 úlohu navyše podľa zvolenej obtiažnosti.

Aby sa vyrovnali vekové rozdiely medzi súťažiacimi, na začiatku súťaže získali družstvá za každého štvrtáka 5 bodov, za každého piataka 3 body a za každého šiestaka 1 bod.

Pri zhodnom počte bodov dvoch tímov rozhodol počet bodov za úlohy, ak aj tu nastala rovnosť, rozhodoval počet vyriešených úloh. V prípade, že ani toto kritérium nerozhodlo, poradie sa určilo podľa času odovzdania poslednej vyriešenej úlohy.

Pred začiatkom súťaže mali súťažiaci možnosť vypočítať rozcvičkovú sériu úloh, za ktorú dostávali malú odmenu vo forme pamätnej nálepky.

Zadania starších ročníkov nájdete na malynar.strom.sk/mamut.

autori:	Nina Anna Betáková, Katarína Farbulová, Michal Ferdinandy, Oskar Hritz, Nina Hudáková, Sarah Klopstock, Eva Krajčiová, Ondrej Králik, Tomáš Lang, Matúš Libák, Lívia Lukáčová, Matúš Masrna, Martin Mentel, Martina Osuská, Natália Poliačiková, Richard Prikler, Ján Richnavský, Oliver Seman, Sophia Sotáková, Tomáš Sukeľ, Lívia Sušková, Magdaléna Škriabová, Daniel Ryan Takáč, Natália Tkáčová, Ondrej Tóth, Michal Vodička, Richard Vodička, Veronika Vodičková
recenzia a úprava:	Bianka Gurská, Gertrúda Matej Hanusová, Miriam Horváthová, Branislav Ječim, Matúš Libák, Matúš Masrna, Lujza Milotová, Erik Novák, Patrik Pavlovčík, Ján Richnavský, Martin Šmilňák, Štefan Vašak
názov:	Mamut – 30. 5. 2025
vydavatelia:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta Združenie STROM
web:	malynar.strom.sk/mamut www.upjs.sk/prirodovedecka-fakulta/