

Lomihlav

Košice, 28.11.2025

Úlohy

Úloha 1:

V slove *SYR* každé písmeno nahradte číslom, ktoré predstavuje poradie tohto písmena v štandardnej 26-písmenovej (anglickej) abecede. Odovzdajte súčet týchto čísel.

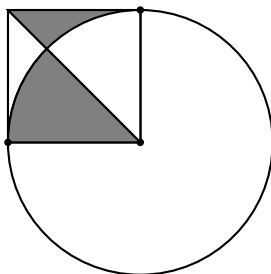
Výsledok: 62

Riešenie:

Písmeno *S* je v poradí devätnáste v abecede, nahradíme ho číslom 19. *Y* nahradíme 25 a *R* nahradíme 18. Súčet písmen bude teda $19 + 25 + 18 = 62$.

Úloha 2:

Na obrázku je zemiaková placka s priemerom 8 a štvorcový vyprážaný syr, ktorého jeden vrchol leží v strede kružnice a oba k nemu susedné vrcholy ležia na obvode kružnice. Aký je obsah vyfarbenej plochy?

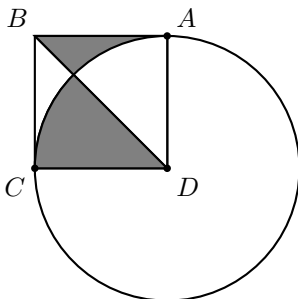


Výsledok: 8

Riešenie:

Štvorcový syr si označme $ABCD$. Uhlopriečka DB delí štvorec na polovicu, teda na dva zhodné trojuholníky ABD a CBD s rovnakým obsahom. Uhlopriečka preto rozdelí aj prienik kruhu so štvorcom na polovicu. Môžeme si všimnúť, že preklopením sivej časti prieniku kruhu so štvorcom získame trojuholník ABD , ktorý je polovicou štvorca.

Strana štvorca je rovnako dlhá ako polomer kruhu, teda $8 : 2 = 4$. Obsah štvorca je $4 \cdot 4 = 16$. Vyfarbená plocha má obsah ako polovica štvorca, teda $16 : 2 = 8$.



Úloha 3:

Otec Alojz chce do haluškárne nakúpiť počet stoličiek, o ktorom platí, že je to trojciferné číslo začínajúce cifrou 3, ktoré je deliteľné 9 a zároveň 5. Koľko stoličiek môže kúpiť? Nájdite všetky možnosti.

Výsledok: 315, 360

Riešenie:

Keďže číslo, ktoré hľadáme má byť deliteľné 5, tak posledná cifra musí byť 0 alebo 5. Zároveň má byť deliteľné 9, teda ciferný súčet musí byť deliteľný 9.

Ak bude posledná cifra 0, tak ciferný súčet, bez cifry na mieste desiatok, je $3+0=3$. My potrebujeme súčet deliteľný deviatimi, čiže súčet 9 (súčet 18 by sme už nevedeli dosiahnuť, keďže $18-3=15$), teda chýbajúca cifra musí byť $9-3=6$. Prvé číslo, ktoré spĺňa všetky podmienky je 360.

Ak bude posledná cifra 5, tak ciferný súčet, bez cifry na mieste desiatok, je $3+5=8$. My potrebujeme súčet deliteľný deviatimi, čiže súčet 9 (súčet 18 by sme už nevedeli dosiahnuť, keďže $18-8=10$), teda chýbajúca cifra musí byť $9-8=1$. Teda ďalšie číslo, ktoré spĺňa podmienky je 315.

Úloha 4:

Veľký Paľo si vymyslel kladné celé číslo. Najprv ho vydělil 2 a zaokrúhlil nadol, potom výsledok vydělil 3 a znova zaokrúhlil nadol. Nakoniec výsledok vydělil 4 a opäť zaokrúhlil nadol. Výsledok bol 0. Aké najväčšie číslo si mohol Veľký Paľo pôvodne vymyslieť? (Zaokrúhľovanie nadol znamená, že napríklad číslo 71,86 zaokrúhlime na 71.)

Výsledok: 23

Riešenie:

Ak výsledok zaokrúhlenia nadol bol 0, tak číslo pred zaokrúhlením bolo menšie ako 1, a teda pred delením štyrmi bolo menšie ako 4. Keďže predtým bolo zaokrúhlené, a teda tiež celé a najväčšie celé číslo menšie ako 4 je 3, tak toto číslo bolo pred delením štyrmi najviac 3. Opäť, ak výsledok zaokrúhlenia nadol bol najviac 3, tak číslo pred zaokrúhlením bolo menšie ako 4, a teda pred delením tromi bolo menšie ako 12, čiže najviac 11. Nakoniec, ak výsledok zaokrúhlenia nadol bol najviac 11, tak číslo pred zaokrúhlením bolo menšie ako 12, a teda pred delením dvoma bolo menšie ako 24. Najväčšie celé číslo menšie ako 24 je 23, preto najväčšie číslo, aké si Veľký Paľo mohol pôvodne vymyslieť, je 23, ktoré naozaj po vykonaní týchto krokov skončí na čísle 0.

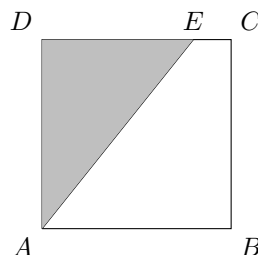
Úloha 5:

Máme štvorcový obrúsok $ABCD$ z Otcovej haluškárne so stranou dlhou 10. Na strane CD je bod E tak, že trojuholník AED má obsah 40. Aká je dĺžka DE ?

Výsledok: 8

Riešenie:

Keďže obsah trojuholníka je rovný polovici súčinu veľkostí jeho základne a výšky na ňu a zároveň sú strany v štvorci na seba kolmé, tak vieme, že obsah trojuholníka AED je rovný $|ED| \cdot |AD| : 2$. Zo zadania vieme, že je zároveň rovný 40 a že $|AD| = 10$. Teda $40 = |ED| \cdot 10 : 2$, z čoho $40 = |ED| \cdot 5$. Jediné číslo, po ktorého vynásobení 5 vznikne 40 je $40 : 5 = 8$, a teda dĺžka ED je 8.

**Úloha 6:**

Aká je najvyššia možná hodnota tohto výrazu, ak rôzne písmená predstavujú rôzne cifry?

$$\frac{M \cdot A \cdot T \cdot E \cdot M}{A \cdot T \cdot I \cdot K \cdot A}$$

Výsledok: 108

Riešenie:

Hneď na začiatku si môžeme všimnúť, že dvojice písmen, ktoré sa nachádzajú nad aj pod zlomkovou čiarou, nemenia hodnotu tohto zlomku, keďže sa navzájom vykrátia. V tomto prípade je to dvojica písmen A a T . Hodnota zlomku zo zadania je potom rovnaká ako hodnota zlomku:

$$\frac{M \cdot E \cdot M}{I \cdot K \cdot A}$$

Na to, aby mal výraz v tvare zlomku čo najvyššiu hodnotu, potrebujeme mať v čitateli čo najväčšiu hodnotu a v menovateli čo najmenšiu. Najväčšia cifra je 9 a teda ju dosadíme namiesto M , lebo to je v čitateli dvakrát, zatiaľ čo E len raz. Namiesto E potom dosadíme druhú najväčšiu cifru 8. V menovateli máme tri rôzne písmená, čiže nám nezáleží na tom, ako im priradíme tri najmenšie cifry. Cifra 0 to ale byť nemôže, lebo by to znamenalo, že menovateľ by bol 0, a teda to budú cifry 1, 2 a 3 v ľubovoľnom poradí.

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 108$$

Úloha 7:

V Otcovej haluškárni sú dvojce hodiny. Jedny idú rýchlejšie, a tak sa ručičky na nich posunú každú hodinu ešte o minútu ďalej. Druhé sú zasa pomalšie, a tak sa každú hodinu omeškajú o dve minúty. Včera ich Veľký Paľo obe nastavil na správny čas, ale keď sa na ne dnes pozrel, videl, že na jedných je 11:00 a na druhých 12:00. Koľko bolo hodín, keď Veľký Paľo nastavil obe hodiny?

Výsledok: 15:40

Riešenie:

Zo zadania vieme: rýchle hodiny pridávajú každú hodinu 1 minútu, pomalé hodiny stratia každú hodinu 2 minúty. Preto sa rozdiel medzi oboma hodinami zväčší každú hodinu o $1 + 2 = 3$ minúty. Z pozorovania vieme, že jedny hodiny ukazujú 11:00 a druhé 12:00, teda rozdiel je 60 minút. Ak sa rozdiel zväčšuje o 3 minúty za hodinu, potom od nastavenia uplynulo:

$$\frac{60}{3} = 20 \text{ hodín.}$$

Teraz si musíme uvedomiť, že na rýchlych hodinách už za týchto 20 hodín pribudlo 20 minút navyše. To znamená, že ak rýchle hodiny ukazujú 12:00, tak skutočný čas je o týchto 20 minút nižší, teda 11:40. Správny čas v okamihu, keď Paľo nastavil hodiny, bol:

$$11:40 - 20 \text{ h} = 15:40 \text{ (včera).}$$

Veľký Paľo nastavil obe hodiny včera o 15:40.

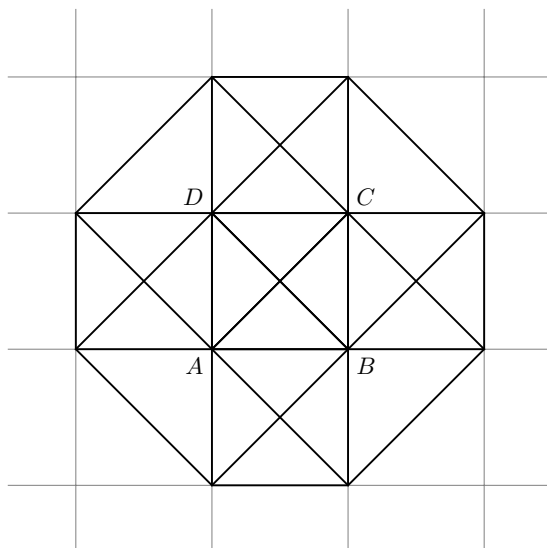
Úloha 8:

Máme knedľu v tvare štvorca $ABCD$ so stranou 1. Uvažujme všetky štvorce, ktoré zdieľajú aspoň dva vrcholy s vrcholmi knedle $ABCD$. Aký je obsah vzniknutej oblasti pokrytej všetkými takýmito štvorcami?

Výsledok: 7

Riešenie:

Predstavme si štvorčekovú mriežku. Najprv vieme zostrojiť 4 rovnaké štvorce na stranách štvorca. Ďalšie 4 štvorce vieme zostrojiť z jeho uhlopriečok AC a BD na obe strany, tak ako na obrázku. Tým sme pokryli všetky štvorce, ktoré obsahujú dva susedné aj dva protilahlé vrcholy štvorca $ABCD$. Ak by štvorec obsahoval až tri vrcholy štvorca $ABCD$, tak už by to bol ten istý štvorec, teda ďalšie možnosti nemusíme uvažovať.



Obsah jedného štvorca je $1 \cdot 1 = 1$, takže obsah piatich celých štvorčekov bude $5 \cdot 1 = 5$. Zvyšné 4 trojuholníky v mriežke vieme preusporiadať a vytvoriť z nich 2 štvorce s dĺžkou strany 1, a teda obsahom tiež 1. Celkový obsah nášho útvaru potom bude $5 + 2 = 7$.

Úloha 9:

Na stole je 9 parených buchiet a na každej je grankom vysypané prirodzené číslo od 1 do 9 práve raz. Rozdelíme ich do troch skupín po tri tak, že v každej skupine je súčet čísel rovnaký. Koľko rôznych takýchto rozložení existuje, ak nezáleží na poradí skupín ani čísel v skupinách?

Výsledok: 2

Riešenie:

Najprv sa pozrime na súčet čísel v každej skupinke, do ktorej sme buchty rozdelili. Súčet všetkých čísel na parených buchtách je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. Buchty sme rozdelili do troch skupín s rovnakým súčtom, súčet v každej skupinke teda bude $45 : 3 = 15$.

Skúsme teraz nájsť trojice čísel od 1 do 9, ktorých súčet je 15. Parená buchta s číslom 1 nemôže byť v skupinke s číslami 2, 3 ani 4, lebo ich súčet by bol prímalý a po pričítaní čísla z hocijakej inej buchty by bol súčet v skupinke menší ako 15. Možné skupinky, v ktorých číslo 1 môže byť, sú $1 + 5 + 9 = 15$ alebo $1 + 6 + 8 = 15$. V inej skupinke číslo 1 byť nemôže, pretože ak by sme ho sčítali s číslom 7, $1 + 7 = 8$, do súčtu 15 by sme opäť potrebovali pričítať číslo 7. Každé z čísel je ale grankom vysypané práve raz. A keďže na poradí čísel v skupinách nezáleží, skupinka $1 + 6 + 8 = 15$ je rovnaká ako $1 + 8 + 6$ (toto platí pre všetky skupinky buchiet s rovnakými číslami, ale ich iným poradím).

Teraz vieme, že číslo 1 môže byť v dvoch rôznych skupinkách. Pozrime sa ďalej na číslo 2. Rovnako ako na začiatku, číslo 2 nemôže byť v skupinke s číslami 1, 2 alebo 3, lebo ich súčet by bol prímalý a po pričítaní čísla z hocijakej inej buchty, by bol súčet v skupinke menší ako 15. Číslo 2 môže byť v skupinke $2 + 4 + 9$ a v skupinke $2 + 6 + 7$. Jediná ďalšia skupinka, v ktorej by číslo 2 mohlo byť, je skupinka $2 + 5 + 8$, ale číslo 5 je v jednej zo skupiniek, v ktorej môže byť číslo 1 a číslo 8 je v druhej, čo znamená, že ak by boli tieto čísla v skupinke s číslom 2, číslo 1 by sa nenachádzalo v žiadnej zo skupiniek.

Pozrime sa teraz na skupinky, o ktorých vieme. Skupinka čísel $1 + 5 + 9$ môže byť len so skupinkou $2 + 6 + 7$, lebo v skupinke $2 + 4 + 9$ sa tiež nachádza číslo 9. Tretia skupinka k týmto dvom bude vyzeráť takto: $3 + 4 + 8$. Skupinka čísel $1 + 6 + 8$ môže byť len so skupinkou $2 + 4 + 9$, lebo v skupinke $2 + 6 + 7$ sa tiež nachádza číslo 6. Tretia skupinka bude skupinka čísel $3 + 5 + 7$.

Týmto sme dokázali, že rôzne rozloženia buchiet do skupín s rovnakým súčtom sú práve 2.

Úloha 10:

Hugolínov vek je najmenšie zložené číslo, ktorým nie je číslo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9$ deliteľné. Koľko má Hugolín rokov?

Výsledok: 22

Riešenie:

Najmenšie prvočíslo, ktorým toto číslo nie je deliteľné, je 11. Keďže sa však úloha pýta na zložené číslo, treba číslo 11 ešte prenásobiť čo najmenším číslom väčším ako 1, teda 2. Takto dostaneme výsledok 22. Všetky čísla menšie ako 22 delia číslo zo zadania alebo sú to prvočísla, preto 22 je najmenšie možné hľadané číslo.

Úloha 11:

Kód od trezoru v Otcovej haluškáрни je štvorciferné kladné celé číslo také, že môžeme vyškrtnúť akékoľvek dve cifry a vždy dostaneme dvojciferné kladné celé číslo (05 nie je dvojciferné), pričom toto dvojciferné číslo je bezo zvyšku deliteľné 5. Koľko takých čísel existuje?

Výsledok: 18

Riešenie:

Aby kód bol deliteľný 5, jeho posledná cifra musí byť 0 alebo 5. Keďže posledná cifra po vyškrtaní nikdy nebude prvá, môže to byť aj 0 (nevznikne nám kvôli tomu dvojciferné číslo začínajúce 0). Na mieste jednotiek máme dve možnosti.

Cifra na mieste desiatok sa môže vyskytnúť po vyškrtaní aj na mieste jednotiek nového čísla, preto uvažujeme možnosti 0 a 5. Ak vyškrtame z pôvodného čísla prvú a druhú cifru, cifra na mieste desiatok sa ocitne na začiatku dvojciferného čísla, nemôže to preto byť 0. Na mieste desiatok máme len jednu možnosť.

Podobne, ako pri zisťovaní cifry na mieste desiatok, platí to isté aj pre cifru na mieste stoviek. V novom čísle sa môže vyskytnúť aj na mieste jednotiek, aj na mieste desiatok, preto to môže byť len 5. Máme len jednu možnosť.

Prvá cifra v kóde sa nikdy nevyskytne na mieste jednotiek po vyškrtaní, preto na jej miesto môžeme vybrať ktorúkoľvek cifru okrem 0, inak by kód nebol štvorciferný. Máme 9 možností.

Teraz vynásobíme všetky možnosti na jednotlivé cifry, aby sme zistili počet všetkých možných kombinácií. Na kód máme spolu $2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 = 18$ možností.

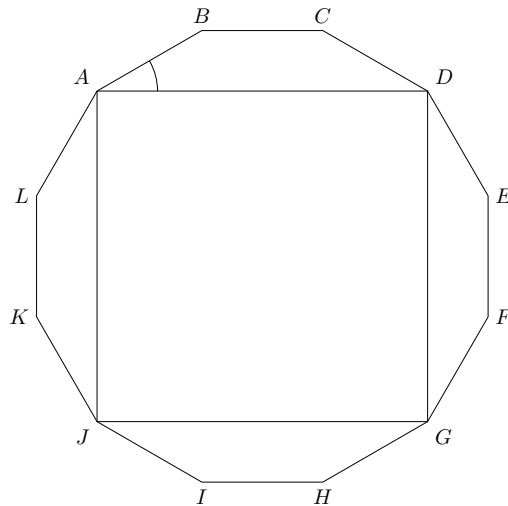
Úloha 12:

Zemiaková placka je v tvare pravidelného 12-uholníka $ABCDEFGHIJKL$ a je na nej položený syr v tvare štvorca $ADGJ$. Aká je veľkosť uhla BAD ?

Výsledok: 30°

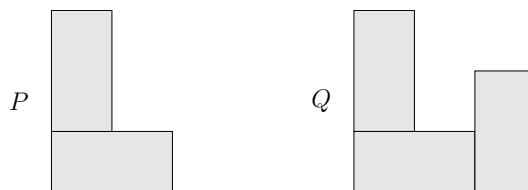
Riešenie:

Pomocou vzorca na výpočet uhlov v n -uholníku $180 \cdot (n - 2)$ zistíme, že súčet uhlov v 12-uholníku je 1800. To znamená, že uhol pri jednom vrchole je $1800 : 12 = 150^\circ$. Teraz od neho odrátame uhol štvorca, ktorý má 90° , aby sme dostali súčet zvyšných dvoch uhlov, čo je $150 - 90 = 60^\circ$. Môžeme vidieť, že nad každou stranou štvorca sa nachádzajú 3 strany 12-uholníka, a keďže máme pravidelný 12-uholník, tak všetky uhly vedľa uhlov štvorca sú rovnaké. Takže uhol BAD je rovnako veľký ako uhol LAJ , a teda veľkosť uhla BAD je $60 : 2 = 30^\circ$.



Úloha 13:

Deti si skladali tvary z obdĺžnikových Horalky. Všetky Horalky sú rovnako veľké. Tvar P má obvod 58 a tvar Q 85. Aký je obvod jednej Horalky?



Výsledok: 31

Riešenie:

Obvod tvaru P sa skladá z obvodu 2 Horalky, od ktorého odpočítame prekryv dlhšej a kratšej strany. Obvod tvaru Q sa skladá z obvodu 3 Horalky, od ktorého musíme odpočítať 2 prekryvy dlhšej a kratšej strany. Rozdiel obvodov tvarov Q a P je potom obvod jednej Horalky, od ktorej je odpočítaný jeden prekryv. Zo zadania vieme, že obvod P je 58 a obvod Q je 85. Ich rozdiel je preto $85 - 58 = 27$.

Môžeme si všimnúť, že obvod tvaru P a rozdiel obvodov Q a P sa líši iba o hodnotu obvodu jednej Horalky. Ten vieme dorátať ako $58 - 27 = 31$.

Obvod jednej Horalky je 31.

Úloha 14:

Čašníkoví Rudovi sa po zrážke so Zuzanou rozsypali pirohy na dlážku, ktorá vyzerá ako štvorec tvorený z deviatich štvorcových kachličiek, ako na obrázku. Na niektorých kachličkách videl, koľko pirohov na ne spadlo a zapísal to do obrázku, no na niektoré dopadla aj smotana, a teda nevie zrátať všetky pirohy. Zuzana má ale bystrejší zrak a prezradila mu, že v každom riadku, stĺpci a aj na diagonále je súčet pirohov rovnaký. Zistite, aký je súčet pirohov na kachličkách označených a, b, d .

a	13	b
19	c	11
12	d	16

Výsledok: 49

Riešenie:

Všimnime si, že v strednom riadku je okrem c , $19 + 11 = 30$ pirohov. Rovnako veľa pirohov musí byť v strednom stĺpci, v ktorom je okrem c , $13 + d$ pirohov. Keďže obidva stĺpce majú rovnaký súčet, tak musia mať aj rovnaký súčet bez c . Z toho potom vyplýva, že d musíme zvýšiť ešte o 13, aby sme dostali 30, teda d je 17.

Zo spodného riadku vieme, že súčet vo všetkých riadkoch, stĺpcoch a diagonálach je $12 + 17 + 16 = 45$. To znamená, že podľa prvého riadku je $a + 13 + b = 45$, a teda súčet $a + b$ musíme zvýšiť ešte o 13, aby sme dostali 45, čiže $a + b$ je 32.

Zhrnutím dostávame, že počet pirohov na kachličkách označených a, b, d je $(a + b) + d = 32 + 17 = 49$. Takéto rozloženie pirohov na kachličkách v súlade so zadáním naozaj existuje:

14	13	18
19	15	11
12	17	16

Úloha 15:

Hugolín jedol pirohy v tvare trojuholníkov a jeden bol príliš veľký pre jeho ústa, tak si ho rozkrojil. Rozkrojil ho rovnou čiarou, ktorá spájala stredy dvoch strán. Takto dostal štvoruholník s obvodom 14 a trojuholník s obvodom 8. Vypočítajte dĺžku jeho rezu.

Výsledok: 3

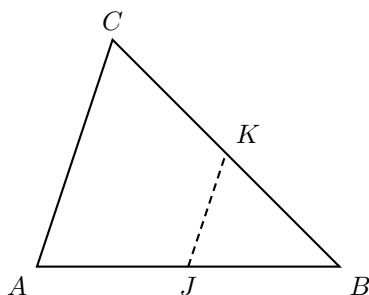
Riešenie:

Hugolínov piroh nám znázorňuje trojuholník ABC a čiara, ktorou ho rozkrojil, je priamka JK . Priamka JK rozdelí stranu AB aj AC na polovicu.

Vznikne nám trojuholník JKB , ktorý má zo zadania obvod 8 a štvoruholník $AJKC$ s obvodom 14.

Vieme, že $|CK| = |KB|$ a tiež, že $|AJ| = |JB|$. JK sa nachádza v oboch obvodoch. Všimnime si, že obvody útvarov sa preto líšia iba o úsečku AC . Preto $|AC| = 14 - 8 = 6$.

Strana JK je zároveň aj strednou priečkou trojuholníka ABC , preto sa strana JK rovná polovici strany BC , čiže $|JK| = 6 : 2 = 3$.



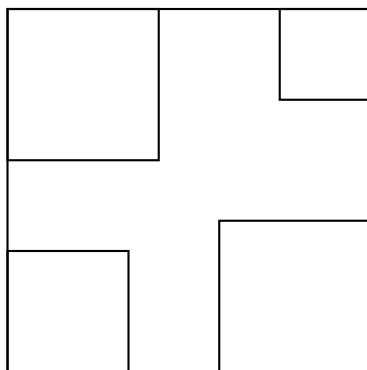
Úloha 16:

Babka Olga upiekla koláč v tvare štvorca s dĺžkou strany 12. Nakrájala ho pre hostí na 6 častí v tvare štvorcov, ktorých dĺžky strán sú celé čísla, avšak nie všetky štvorce majú rovnako dlhé strany. Aký je súčet obvodov všetkých šiestich štvorcov?

Výsledok: 112

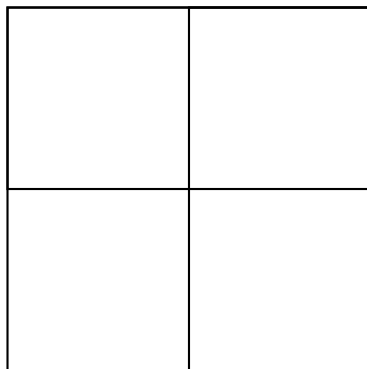
Riešenie:

V každom rohu koláča musí byť určite jeden štvorec:

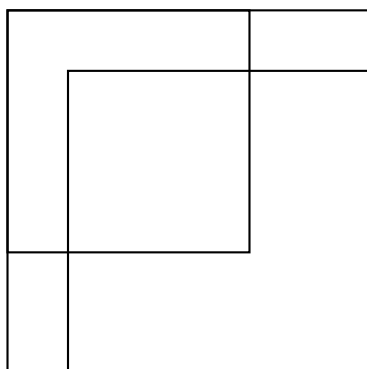


Takto nám zostanú ďalšie 2 štvorce, ktoré musia byť niekde na koláči. Tým pádom sa minimálne dvoch strán koláča dotýkajú práve dva štvorce (len tie umiestnené v rohoch). To môže nastať dvomi spôsobmi – buď budú tieto strany oproti sebe, alebo vedľa seba.

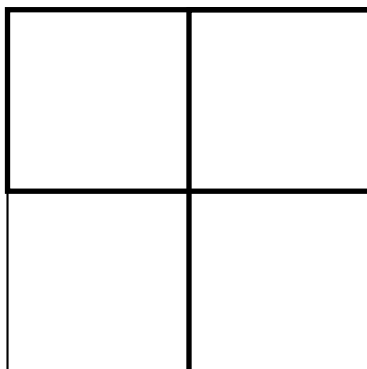
Pozrime sa najprv na prípad, keď by tieto strany boli oproti sebe. Na jednej strane budú buď oba štvorce rovnako veľké, alebo jeden štvorec bude väčší. Ak by boli oba rovnako veľké, tak by museli byť aj štvorce na opačnej strane rovnako veľké. Potom by nám nezostal priestor na zvyšné dva štvorce:



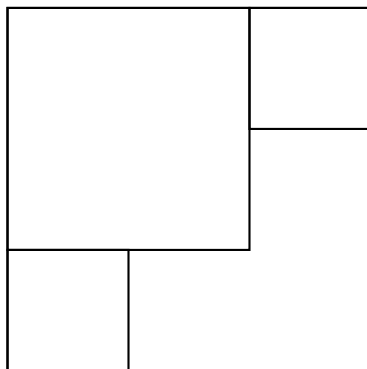
Ak by jeden štvorec bol väčší, tak by sa prekryval so štvorcom z opačnej strany:



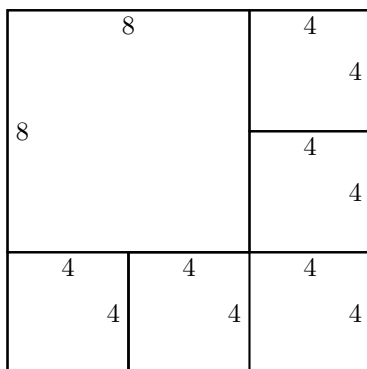
Z toho zisťujeme, že dve strany s práve dvoma štvorcami musia byť vedľa seba. Ak by tieto štvorce boli rovnako veľké, tak posledný štvorcový roh už nepokryjeme práve tromi štvorcami, keďže v každom rohu zvyšnej plochy musí byť iný štvorec:



Preto sú tieto štvorce rozdielne veľké:



Do zvyšného miesta vpravo dole musíme zmestiť ešte dva štvorce. Jeden musí byť pod veľkým štvorcom a druhý napravo od veľkého štvorca. Nesmú ho presahovať, ale ani nesmú byť menšie než zvyšok jeho strany, pretože potom by sme nevedeli umiestniť posledný štvorec do rohu. Preto musia mať dva malé štvorce spolu rovnakú dĺžku strany ako veľký štvorec. Do rohu potom zmestíme posledný malý štvorec. Keďže tri malé štvorce tvoria celú stranu, tak strana malého štvorca je $12 : 3 = 4$ a strana veľkého štvorca je dvojnásobok, teda 8:



Veľký štvorec má potom obvod $4 \cdot 8 = 32$. Malé štvorce majú spolu obvod $5 \cdot (4 \cdot 4) = 80$. Súčet obvodov všetkých šiestich štvorcov je preto 112.

Úloha 17:

Mária zostavuje štvormiestny kód tak, že každá cifra v ňom je číslo od 1 do 6. Koľkými rôznymi spôsobmi môže Mária zostaviť kód, ak:

- žiadne dve cifry nesmú byť rovnaké,
- prvá cifra musí byť väčšia ako posledná?

Výsledok: 180

Riešenie:

Rozoberme si, aké cifry môžu stáť na začiatku Máriinho kódu, aby boli splnené podmienky zadania. Máriin kód určite nemôže začínať cifrou 1, lebo je najmenšia, a tým pádom určite nebude väčšia ako posledná cifra.

Ak Máriin kód začne cifrou 2 (cifra 2 bude na mieste tisícok), na mieste jednotiek musí byť cifra 1 (aby bola splnená druhá podmienka zo zadania). Keďže sa čísla v kóde nesmú opakovať, cifru na mieste stoviek môže Mária vybrať zo 4 zvyšných cifier (cifry na mieste tisícok a jednotiek sú už pevne dané). Po vybratí cifry na mieste stoviek jej ostanú už len 3 cifry, z ktorých môže vyberať na miesto desiatok. Ak bude na mieste tisícok cifra 2, Mária môže zostaviť kód $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$ rôznymi spôsobmi.

Ak na mieste tisícok bude cifra 3, na mieste jednotiek môže byť jedna z dvoch cifier, ktoré sú menšie ako 3. Mária si teda vyberá z 2 možností (na výber má cifru 1 alebo cifru 2). Na mieste stoviek tak môže byť jedna zo 4 zvyšných, ešte nepoužitých cifier (všetkých okrem cifry 3, ktorou kód začína a poslednej cifry, ktorá musí byť menšia ako prvá) a na mieste desiatok má na výber už len z 3 rôznych cifier (jednu z cifier už Mária umiestnila na miesto stoviek). Ak bude na mieste tisícok cifra 3, Mária môže zostaviť kód $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ rôznymi spôsobmi.

Podobne, ak bude na mieste tisícok cifra 4, možností na kód bude $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$. Ak bude na mieste tisícok cifra 5, možností na kód bude $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$. A ak bude na mieste tisícok cifra 6, možností na kód bude $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Takto Mária postupne prešla všetky cifry, ktorými jej kód môže začínať. Mária svoj kód preto môže zostaviť $12 + 24 + 36 + 48 + 60 = 180$ rôznymi spôsobmi.

Úloha 18:

Otec Alojz poslal Veľkého Paľa do obchodu kúpiť 4 kusy syrov. Koľko možností má Veľký Paľo na výber, ak mali v ponuke parenicu, ementál a goudy?

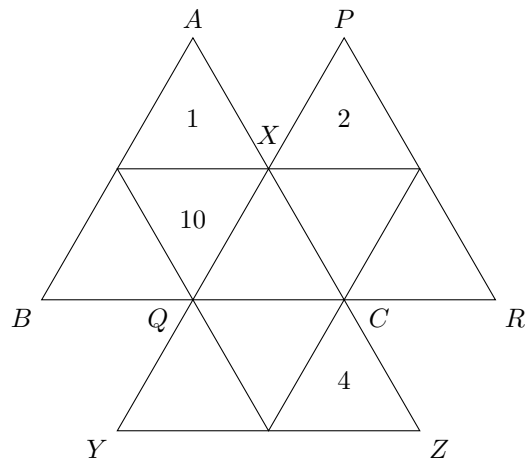
Výsledok: 15

Riešenie:

Rozdelíme si to na niekoľko možností podľa toho, koľko kusov každého druhu syra mohol Veľký Paľo kúpiť. Také trojice sú $4 + 0 + 0$, $3 + 1 + 0$, $2 + 2 + 0$ a $2 + 1 + 1$. Teraz pre každú trojicu čísel zistíme, koľkými spôsobmi ich vieme rozdeliť medzi jednotlivé druhy syrov. Možnosti $4 + 0 + 0$, $2 + 2 + 0$ a $2 + 1 + 1$ vieme rozdeliť iba 3 spôsobmi, lebo vyberáme, ktorého typu syra sme kúpili iný počet než zvyšných. Možnosť $3 + 1 + 0$ vieme rozdeliť 6 spôsobmi, keďže máme 3 spôsoby na počet kúpenej parenice, potom iba 2 spôsoby na počet kúpeného ementálu a nakoniec len 1 spôsob na počet kúpenej goudy, teda $3 \cdot 2 \cdot 1$. Ak všetky možnosti spočítame, zistíme že Veľký Paľo mal $3 + 3 + 3 + 6 = 15$ možností na výber pri kúpe syra.

Úloha 19:

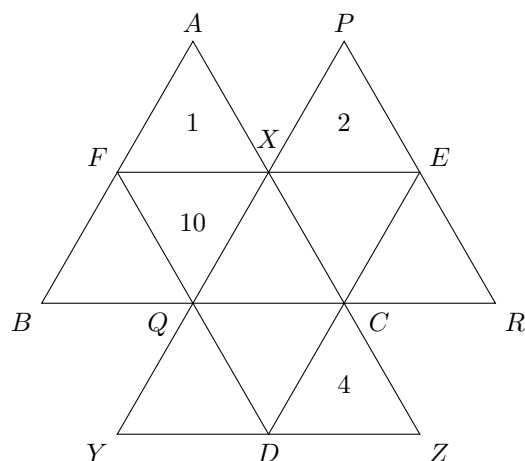
Veľký Paľo chce vpísať do políčok útvaru na obrázku ceny jedál v obedovom menu, čo sú čísla od 1 do 10 (každé práve raz). Koľkými spôsobmi vie útvar vyplniť, ak chce, aby trojuholníky ABC , QRP a YZX mali rovnaký súčet čísel?



Výsledok: 4

Riešenie:

Označme si pre jednoduchšie popisovanie ďalšie body ako na obrázku:



Súčet súčtov čísel v trojuholníkoch ABC , PQR , XYZ je rovný súčtu všetkých čísel od 1 po 10 zvýšený o dvojnásobok čísla napísaného v trojuholníku QCX (keďže toto číslo sa nachádza vo všetkých troch súčtoch). Tento súčet súčtov čísel musí byť deliteľný tromi, keďže ho chceme rovnomerne rozdeliť do trojuholníkov ABC , PQR , XYZ .

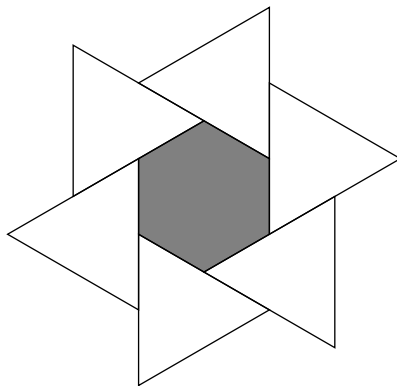
Súčet čísel od 1 po 10 je 55, čo má zvyšok 1 po delení číslom 3. To znamená, že na to, aby sme dostali číslo deliteľné tromi, musíme pripočítať číslo so zvyškom 2 po delení tromi. Čísla, ktorých dvojnásobok má zvyšok 2 po delení tromi, sú 1, 4, 7, 10. Tieto čísla by sa mohli nachádzať v strede. Z nich už ale sú čísla 1, 4 a 10 napísané a nie sú v strede, preto v strede bude číslo 7.

Tým pádom je súčet trojuholníkov ABC , PQR , XYZ rovný 69 a v jednom trojuholníku bude súčet $69 : 3 = 23$. V trojuholníku BQF bude teda číslo 5.

V štvoruholníku $CREX$ musí byť súčet 14 a v štvoruholníku $YDCQ$ musí byť súčet 12. Tieto dva súčty vieme naraz dostať z dostupných čísel iba ako $3 + 9$ a $6 + 8$. Pre štvoruholník $YDCQ$ máme dve možnosti, ako v ňom uložiť čísla 3 a 9. Pre štvoruholník $CREX$ máme dve možnosti, ako v ňom uložiť čísla 6 a 8. Dokopy máme $2 \cdot 2 = 4$ možnosti, ako vyplniť políčka.

Úloha 20:

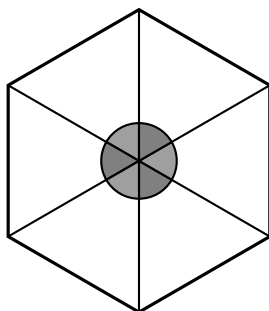
Na obrázku je šesť rovnakých rovnostranných trojuholníkov dobošovej torty, z ktorých každý má obsah 8. Medzi nimi vzniká pravidelný šesťuholník. Každá strana šesťuholníka je presne polovica strany trojuholníka. Aký je obsah sivého šesťuholníka?



Výsledok: 12

Riešenie:

Keďže zafarbený šesťuholník je pravidelný, tak sa skladá zo šiestich rovnakých trojuholníkov ako na obrázku.



Vyznačené uhly dokopy tvoria celých 360° , a keďže všetkých šesť trojuholníkov je rovnakých, tak každý z vyznačených uhlov je presne 60° . Každý trojuholník je rovnoramenný so základňou ako strana šesťuholníka, pričom jeden jeho uhol má 60° , teda uhly pri základni majú spolu 120° . Potom vieme, že tieto uhly pri základni majú všetky 60° , teda každý trojuholník je rovnostranný. Tieto trojuholníky majú polovičnú dĺžku strany oproti vonkajším trojuholníkom, takže majú aj polovičnú výšku. Číže oproti vonkajším trojuholníkom majú štvrtinový obsah, keďže obsah trojuholníka je $S = \frac{a \cdot V_a}{2}$. To znamená, že každý z týchto trojuholníkov má obsah 2, teda spolu majú obsah 12, čo je aj obsah zafarbeného šesťuholníka.

Úloha 21:

Otec Alojz zistil, že zisky a straty haluškárne za posledné dni sú celé čísla od -12 do 12 , každé práve raz, a vpísal ich do tabuľky 5×5 . Aký najväčší môže byť súčet súčtov riadkov, stĺpcov a oboch diagonál?

Výsledok: 84

Riešenie:

To, že v tabuľke sú vpísané čísla od -12 do 12 , znamená, že celkový súčet čísel vo všetkých políčkach tabuľky je 0. Súčet všetkých čísel v riadkoch je rovný súčtu všetkých čísel v tabuľke. To isté platí aj pre stĺpce. Preto súčet súčtov riadkov a stĺpcov je rovný nule.

Keďže je súčet súčtov riadkov a stĺpcov 0, najväčší možný súčet čísel na diagonálach je zároveň najväčším možným súčtom súčtov riadkov, stĺpcov a diagonál. Preto chceme, aby sa na diagonálach nachádzali čo najväčšie čísla.

Pozrime sa teraz na diagonály. Tie v tabuľke 5×5 majú spoločné jedno políčko, a to políčko, ktoré je v strede tabuľky. Na to, aby mohol byť súčet čísel na diagonálach čo najväčší, musí byť v strednom políčku najväčšie číslo, čiže 12. Na ostatných políčkach diagonál budú ležať najväčšie čísla, ktoré ostanú po tom, ako použijeme číslo 12. Budú to čísla 4 až 11. Súčet čísel na diagonálach bude $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 2 \cdot 12 = 84$.

Úloha 22:

Kačacie stehná sa predávajú v porciách po 6, 9 a 20 kusoch. Aký je najväčší počet stehien, pri ktorom nie je možné objednať si žiadnu kombináciu vyššie uvedených porcií, aby bol presne dosiahnutý?

Výsledok: 43

Riešenie:

Predstavme si nejaký počet stehien, ktorý si vieme objednať. Ak k nemu budeme pripočítavať jednu porciu (6, 9 alebo 20), tak dostaneme všetky väčšie počty s rovnakým zvyškom po delení vybranou porciou ako pôvodný počet. Preto ak pridáme na to, ako vyskladať všetky zvyšky po delení vybranou porciou, tak budeme vedieť, že všetky vyššie počty vieme objednať.

Vyberme si porciu po 6, pretože je to číslo s najmenším počtom zvyškov spomedzi 6, 9 a 20. Náš cieľ je teda zistiť, aké sú najmenšie objednatelné čísla s jednotlivými zvyškami po delení 6, pretože potom budeme vedieť, že všetky vyššie sa dajú. Preto sa pozrime na zvyšky porcií po delení 6. 6 má zvyšok 0, 9 má zvyšok 3 a 20 má zvyšok 2. Teraz sa pozrieme na to, ako vieme vyskladať jednotlivé zvyšky za použitia čo najmenšieho počtu stehien:

- zvyšok 0 dostaneme tak, že zoberieme 6,
- zvyšok 1 dostaneme ako súčet zvyškov $3 + 2 + 2$, teda najmenšie vyskladateľné číslo s takým zvyškom je $9 + 20 + 20 = 49$,
- zvyšok 2 dostaneme tak, že zoberieme 20,
- zvyšok 3 dostaneme tak, že zoberieme 9,
- zvyšok 4 dostaneme ako súčet zvyškov $2 + 2$, teda najmenšie vyskladateľné číslo s takým zvyškom je $20 + 20 = 40$,
- zvyšok 5 dostaneme ako súčet zvyškov $2 + 3$, teda najmenšie také číslo je $20 + 9 = 29$,

To sú najmenšie vyskladateľné čísla s jednotlivými zvyškami. To znamená, že keď od každého odčítame 6, tak dostaneme najväčšie nevyskladateľné čísla s jednotlivými zvyškami. Dostaneme tak čísla 0, 43, 14, 3, 34, 23. Najväčšie z nich je 43, a to je teda aj náš výsledok.

Úloha 23:

Hugolín si kúpil vyprášaný syr v tvare trojuholníka ABC s uhlom 72° pri vrchole C . Nech M je stred kruhu vpísaného do trojuholníka ABC . Obsah vpísaného kruhu je 120. Aký je obsah výseku kruhu ohraničeného úsečkami AM a BM ?

Výsledok: 42

Riešenie:

Z bodu M urobíme kolmice na jednotlivé strany trojuholníka. Platí, že všetky tri tieto kolmice sú rovnako dlhé ako polomer kruhu, keďže každá strana trojuholníka sa presne dotýka vpísaného kruhu. Priesečníky kolmíc so stranami AB , BC , CA nazveme X , Y , Z v tomto poradí.

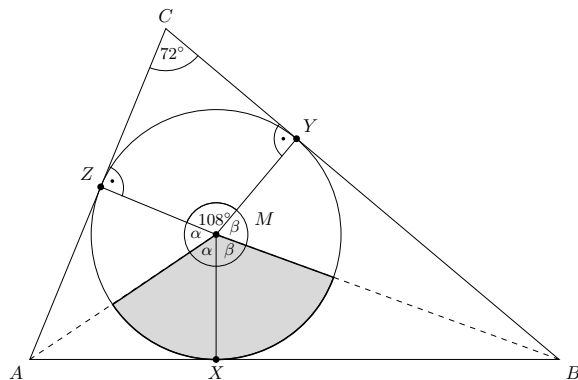
Pre štvoruholníky platí, že súčet vnútorných uhlov je 360° . V štvoruholníku $CYMZ$ je pri vrchole C uhol 72° , uhly pri vrchole Y a Z majú 90° , keďže MZ aj MY sú kolmice. Uhol pri vrchole M bude mať teda veľkosť $360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Trojuholník AXM je zhodný s trojuholníkom AZM , pretože ZM aj XM sú kolmice, a zároveň AM je os uhla ZAX , a teda aj os symetrie pre štvoruholník $ZAXM$. Preklopením trojuholníka AMZ cez túto os dostaneme trojuholník AMX , preto uhly AMZ a AMX sú rovnako veľké.

Rovnako zistíme, že aj trojuholník BXM a trojuholník BYM sú zhodné, preto aj uhly BMX a BYM budú rovnako veľké.

Vonkajší uhol ZMY štvoruholníka $CYMZ$ má $360^\circ - 108^\circ = 252^\circ$. Tento uhol je tvorený dvoma párami uhlov rovnakej veľkosti. Uhol AMB je tvorený uhlom AMX a uhlom BMX , má teda polovičnú veľkosť vonkajšieho uhla ZMY , preto má $252^\circ : 2 = 126^\circ$.

Obsah kruhového výseku ohraničeného úsečkami AM a BM vypočítame tak, že zistíme, aký obsah má časť kruhu s veľkosťou uhla 1° a vynásobíme veľkosťou uhla výseku. Obsah hľadaného výseku je teda $(120 : 360) \cdot 126 = 42$.



Úloha 24:

Otec Alojz si počas dvanástich po sebe idúcich dní zapisoval, koľko porcií halušiek sa v daný deň objednalo. Na konci si všimol, že každý deň sa objednalo o dve porcie viac ako predošlý deň a že dokopy sa za týchto dvanásť dní objednalo 684 porcií. Koľko porcií sa objednalo v prvý deň?

Výsledok: 46

Riešenie:

Nech x je počet porcií objednaných prvý deň. Každý deň sa objedná o 2 porcie viac než predchádzajúci, čo nám vytvorí postupnosť: $x, x + 2, x + 4, x + 6, \dots, x + 22$. (Posledný deň – 12. deň: $x + 2 \cdot (12 - 1) = x + 22$). Sčítame všetky dni:

$$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) + \dots + (x + 22) = 684$$

Najprv spočítame všetky x – je ich 12, takže spolu tvoria $12x$. Potom spočítame všetky čísla navyše: $2 + 4 + 6 + \dots + 22 = 132$. Tým pádom to môžeme zapísať ako:

$$12x + 132 = 684$$

Teraz od celkového počtu 684 odpočítame 132 porcií, ktoré sú navyše, aby sme zistili, koľko porcií by bolo každý deň, ak by sa neobjednávalo každý deň o 2 porcie viac ako predošlý:

$$684 - 132 = 552$$

Týchto 552 porcií rozdelíme rovnomerne na 12 dní:

$$552 : 12 = 46$$

V prvý deň sa objednalo 46 porcií halušiek.

Úloha 25:

Pastieri si delili syrovú niť, ktorá sa krásne natahuje a po pustení sa stiahne naspäť. Najprv ju zobral prvý a odrezal si 60 cm. Potom zvyšok zobral druhý, natiahol ju na pôvodnú dĺžku a odrezal si z nej 80 cm. Potom ju podal ďalšiemu, ten si z nej opäť urezal a tak pokračovali ďalej, až poslednému zostal zvyšok nite. Keďže sú pastieri spravodliví, každý dostal rovnako dlhý kus. Koľko bolo pastierov?

Výsledok: 4

Riešenie:

Dĺžku celej nite si označme x . Dĺžka nite, ktorú dostal druhý pastier je teda $x - 60$. V rovnakom pomere ako sa natiahne niť bez 60 cm na dĺžku celej nite, čo sa dá zapísať ako $(x - 60) : x$, sa natiahne aj 60 cm, ktoré mal každý z pastierov, na 80 cm, ktoré si urezal druhý pastier. To sa dá zapísať ako pomer $60 : 80$. Dokopy to dáva:

$$(x - 60) : x = 60 : 80$$

$$80x - 4800 = 60x$$

$$20x = 4800$$

$$x = 240$$

Keďže celá syrová niť mala dokopy 240 cm a každý dostal 60 cm, bolo všetkých pastierov $240 : 60 = 4$.

Úloha 26:

Máme grilovaciú mriežku tvaru obdĺžnika veľkosti 13×2 a ľubovoľný počet plátkov slaniny veľkosti 2×1 a 3×1 . Mriežku chceme pokryť takýmito slaninami bez medzier a bez prekrytia, pričom žiadna slanina nesmie presahovať cez okraj mriežky. Navyše musí platiť, že dlhšie strany všetkých slanín musia byť navzájom rovnobežné. Koľkými rôznymi spôsobmi vieme pokryť mriežku?

Výsledok: 257

Riešenie:

Nech je dlhšia strana grilovacej mriežky položená vodorovne. Ak sa dlhšie strany slaniny položia rovnobežne ku kratšej strane mriežky vedľa seba, môžu sa použiť iba kusy slaniny s rozmermi 2×1 a všetky kusy musia byť položené zvislo. Pre takéto pokrytie existuje iba jedna možnosť.

Ak sa dlhšie strany slaniny položia rovnobežne k dlhšej strane mriežky, musia byť všetky kusy položené vodorovne. Pozrime sa na to, koľko možností máme na pokrytie jedného riadka.

Nech x a y sú príslušne počty kusov slaniny veľkosti 2×1 a 3×1 , ktoré sa použijú na pokrytie riadka. Potom musí platiť $2x + 3y = 13$.

- Ak $y = 1$, tak $2x = 10$, teda $x = 5$. Táto možnosť vyhovuje.
- Ak $y = 2$, tak $2x = 7$, teda $x = 3,5$. Táto možnosť nevyhovuje.
- Ak $y = 3$, tak $2x = 4$, teda $x = 2$. Táto možnosť vyhovuje.
- Ak $y = 4$, tak $2x = 1$, teda $x = 0,5$. Táto možnosť nevyhovuje.

Ako riešenia máme dvojice $x = 2, y = 3$ a $x = 5, y = 1$. Pre každý riadok môžeme teda použiť buď $2 + 3 = 5$, alebo $5 + 1 = 6$ kúskov slaniny. Rôzne pokrytia riadka vznikajú rozdielnym poradím, v akom sú kusy veľkosti 2×1 a 3×1 položené.

Počet týchto usporiadaní zodpovedá v prvom prípade počtu možností, ako si vybrať 2 pozície pre kusy 2×1 spomedzi 5 možných, čo je 10. Takže máme 5 možností na umiestnenie prvého kúsku 2×1 , a následne 4 možnosti na umiestnenie druhého takéhoto kúsku, teda dokopy $4 \cdot 5$ možností. Tento počet ešte musíme vydeliť dvomi, keďže sme každú možnosť zarátali dvakrát. Podobne je to

v druhom prípade, tam nás zaujíma, ako rozmiestniť päť kusov 2×1 na 6 pozícií. Na to existuje 6 možností, keďže si musíme zvoliť, na ktorej zo šiestich pozícií je jeden kusok 3×1 . Spolu teda máme $10 + 6 = 16$ možností rozloženia slaniny na jeden riadok. Keďže pokrytie kúskami slaniny v oboch riadkoch môže byť rozdielne, dostaneme $16 \cdot 16 = 256$ možných pokrytí pre oba riadky.

Celkovo je možných $1 + 256 = 257$ pokrytí grilovacej mriežky kusmi slaniny.

Úloha 27:

Babka Oľga má 9 vnúčat. Spolu mali úlohu, aby v čo najkratšom možnom čase upiekli určitý počet bochníkov chleba. Počas jedného dňa vyrobilo každé z vnúčat 15 bochníkov. Babka Oľga vyrobila o 9 bochníkov viac, než každý z (desiatich) členov skupiny v priemere. Koľko bochníkov vyrobila za tento deň celá skupina dokopy?

Výsledok: 160

Riešenie:

Keďže každé z 9 vnúčat vyrobilo 15 bochníkov chleba, upiekli ich spolu $9 \cdot 15 = 135$ kusov. Označme si celkový počet vyrobených bochníkov spolu s Oľginými x . Priemer počtu bochníkov, koľko vyrobil každý zo skupiny, vrátane Oľgy, je teda $x/10$. Oľga upiekla o 9 bochníkov viac ako priemer, teda $x/10 + 9$. Vnúčatá a babka spolu vyrobili $135 + x/10 + 9$ bochníkov, a keďže vieme, že tento počet je x , môžeme si vytvoriť rovnicu.

$$\begin{aligned} 135 + \left(\frac{x}{10} + 9\right) &= x \\ 144 + \frac{x}{10} &= x \quad / - \frac{x}{10} \\ 144 &= \frac{9x}{10} \quad / \cdot 10 \\ 1440 &= 9x \quad / : 9 \\ 160 &= x \end{aligned}$$

Celá skupina upiekla dokopy 160 bochníkov chleba.

Úloha 28:

Mária si na svojom mobile nastavila 7-ciferný PIN kód v tvare $\overline{ABCDEFG}$, ale keďže má problém zapamätať si ho, napísala si na papier ako nápovedu dve čísla: 8355 a 3324. Platí, že prvé číslo je súčtom štvorciferného čísla $\overline{ABCD}$ a trojciferného čísla $\overline{EFG}$ a druhé číslo je súčtom trojciferného čísla $\overline{ABC}$ a štvorciferného čísla $\overline{DEFG}$. Zistite Máriin PIN kód.

Označenie $\overline{AB}$ označuje dvojciferné číslo, ktorého cifra na mieste desiatok má hodnotu A a cifra na mieste jednotiek má hodnotu B.

Výsledok: 7812543

Riešenie:

Pozrime sa na to, aké cifry môžu nahrádzať písmená A a D, teda cifry na mieste tisícok čísel $\overline{ABCD}$ a $\overline{DEFG}$. Keďže číslo $\overline{EFG}$ je trojciferné a s číslom $\overline{ABCD}$ tvorí súčet 8355, potom A musí byť buď 7, alebo 8, keďže trojciferné číslo po pričítaní k štvorcifernému číslu vie zvýšiť cifru na mieste tisícok o najviac 1. To znamená, že číslo $\overline{ABC}$ je minimálne 700 a maximálne 899, a ak ľubovoľné číslo z tohto číselného rozsahu odčítame od čísla 3324, dostaneme číslo s cifrou 2 na mieste tisícok, čo je zároveň číslo $\overline{DEFG}$. Teda písmeno D bude určite nahrádzať cifru 2.

Hodnoty ostatných písmen vieme zistiť postupným dopĺňaním do rovností. Keďže už vieme, že $D = 2$, tak dostávame rovnosť $\overline{ABC}2 + \overline{EFG} = 8355$, z čoho vyplýva $2 + G = 5$, a teda $G = 3$. Po doplnení získavame rovnosť $\overline{ABC} + 2\overline{EF}3 = 3324$, z čoho vyplýva $C + 3 = 4$, a teda $C = 1$. Pokračujeme ďalej a dostávame $\overline{AB}12 + \overline{EF}3 = 8355$, z čoho vyplýva $1 + F = 5$, a teda $F = 4$.

Ďalej získavame $\overline{AB1} + \overline{2E43} = 3324$, z čoho vyplýva $B + 4 = 12$ (pretože $B + 4$ nevie byť 2, teda potrebujeme využiť prechod cez desiatku), a teda $B = 8$. V predposlednom kroku dostávame rovnosť $\overline{A812} + \overline{E43} = 8355$, z čoho vyplýva $8 + E = 13$ (opäť potrebujeme použiť prechod cez desiatku), a teda $E = 5$. Ako posledné nám zostáva zistiť hodnotu písmena A , pričom nám zostávajú dve rovnosti: $\overline{A812} + 543 = 8355$ a $\overline{A81} + 2543 = 3324$, z čoho dostávame $A = 7$.

Na záver môžeme overiť platnosť vzniknutých rovností po doplnení hodnôt jednotlivých písmen:

$$\overline{ABCD} + \overline{EFG} = 7812 + 543 = 8355$$

$$\overline{ABC} + \overline{DEFG} = 781 + 2543 = 3324$$

Teda číslo $\overline{ABCDEFG}$ je 7812543.

Úloha 29:

Hugolín udrel Kapitána Korbáča panvicou po hlave. On teraz rozmýšľa, aký je súčet všetkých 5-ciferných palindrómov (čísel, ktoré sa čítajú rovnako odpredu aj odzadu). Pomôžte mu.

Výsledok: 49 500 000

Riešenie:

Palindrómy zo zadania budú mať tvar:

$$\overline{abcba} = 10\,000a + 1\,000b + 100c + 10b + 1a = 10\,001a + 1\,010b + 100c$$

Cifra a môže byť len od 1 po 9, pretože prvá cifra nemôže byť 0. Keďže je a aj poslednou cifrou, tak to platí aj pre poslednú cifru tohto čísla. Cifry b aj c môžu byť od 0 po 9.

Pre každé a existuje $10 \cdot 10 = 100$ možností pre cifry b a c , ako sa s cifrou a vedia vyskytovať v čísle zo zadania. Teda bude existovať 100 palindrómov, kde $a = 1$, ďalších 100, kde $a = 2$ atď. Teraz si zrátame súčet možných hodnôt a : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. Pre každú z týchto hodnôt existuje 100 palindrómov a každý z nich prispeje do celkového súčtu 10001-násobkom svojho a . Preto všetky cifry a dokopy dajú súčet:

$$10\,001 \cdot 45 \cdot 100 = 45\,004\,500$$

Podobne pre b , každé b prispieva hodnotou $1010b$. Počet možností pre cifry a a c je $9 \cdot 10 = 90$. Teda:

$$1010 \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 9) \cdot 90 = 4\,090\,500.$$

Nakoniec pre c . Každé c prispieva hodnotou $100 \cdot c$. Počet možností pre cifry a a b je $9 \cdot 10 = 90$. Teda:

$$90 \cdot 100 \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 9) = 405\,000.$$

Teraz to zrátame všetko dokopy:

$$45\,004\,500 + 4\,090\,500 + 405\,000 = 49\,500\,000$$

Úloha 30:

Máme medovník v tvare pravidelného päťuholníka $ABCDE$. Zostrojíme si dve kružnice, jednu so stredom A a druhú so stredom B , pričom obe majú polomer AB . Priesečník kružníc vnútri päťuholníka si označme X . Aká je veľkosť uhla DEX ?

Výsledok: 42°

Riešenie:

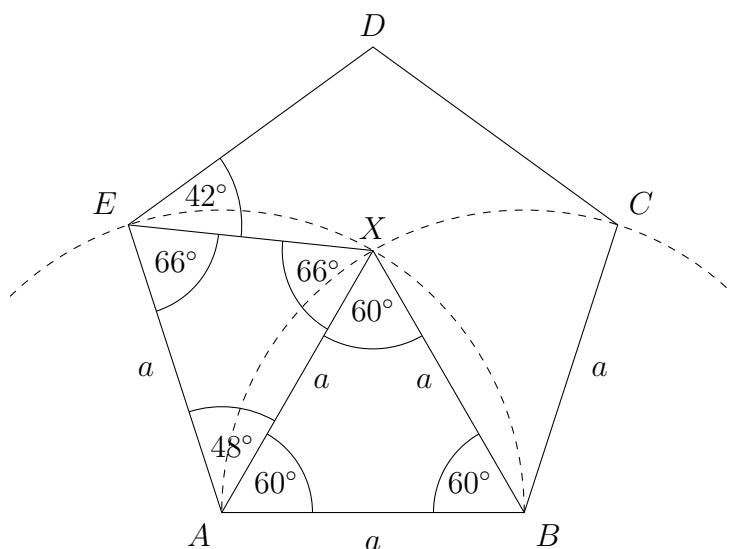
Keďže je päťuholník $ABCDE$ pravidelný, tak má všetky dĺžky strán rovnaké. Túto dĺžku si označme a . Keďže X leží na oboch kružniciach zo zadania, tak úsečky AX aj BX majú dĺžku polomeru kružníc, teda a .

Všimnime si, že v trojuholníku ABX sú všetky jeho strany dlhé a , takže je rovnostranný. to znamená, že všetky jeho vnútorné uhly musia mať veľkosť 60° .

Podľa vzorca na výpočet veľkosti vnútorného uhla v pravidelnom mnohoúhľaníku $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$, kde n je počet strán, si vypočítame, že pre päťuholník je to: $\frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$. Potom $|\angle EAX| = |\angle EAB| - |\angle XAB| = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$.

V trojuholníku EAX vidíme, že $|EA| = |XA| = a$, preto je EAX rovnoramenný trojuholník so základňou EX , a teda uhly pri nej musia byť zhodné. Ich súčet je $180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$. Veľkosti uhlov dopočítame ako $|\angle XEA| = |\angle AXE| = 132^\circ : 2 = 66^\circ$.

Keďže $|\angle DEA| = 108^\circ$, tak $|\angle DEX| = |\angle DEA| - |\angle XEA| = 108^\circ - 66^\circ = 42^\circ$.



Úloha 31:

Hugolín prišiel do Otcovej haluškárne, kde dostal dvojčiferné poradové číslo objednávky. Všimol si, že toto číslo je rozdielom druhých mocnín dvoch jednociferných čísel (druhá mocnina čísla je číslo vynásobené samým sebou). Zároveň menšie z týchto čísel je dvojnásobkom cifry označujúcej počet jednotiek v poradovom čísle objednávky. Zistite, aké všetky poradové čísla objednávky mohol dostať.

Výsledok: 13, 21

Riešenie:

Druhé mocniny jednociferných čísel sú 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 a 81. Menšie číslo má byť dvojnásobkom cifry označujúcej počet jednotiek v poradovom čísle objednávky, teda musí byť párne. Z toho vyplýva, že menšie číslo musí byť druhá mocnina 2, 4, 6 alebo 8.

Ak by menšie číslo bolo 8, tak nám zostane už iba 9 ako jediné väčšie jednociferné číslo. Rozdiel ich druhých mocnín je $81 - 64 = 17$. Cifra, označujúca jednotky v poradovom čísle objednávky, je 7, ale 8 nie je dvojnásobkom 7. Ak by menšie číslo bolo 6, tak potrebujeme, aby na mieste jednotiek v poradovom čísle bolo $6 : 2 = 3$. Druhá mocnina 6 je 36, teda číslo od ktorého budeme odpočítavať 36 sa musí končiť na 9. Preto to bude 49, čo je druhou mocninou 7. Vidíme, že to skutočne platí: $49 - 36 = 13$.

Ak by menšie číslo bolo 4, tak potrebujeme, aby na mieste jednotiek v poradovom čísle bolo $4 : 2 = 2$. Druhá mocnina 4 je 16, teda číslo od ktorého budeme odpočítavať 16 sa musí končiť na 8. Také číslo na výber nemáme, teda menšie z čísel nemôže byť 4.

Ak by menšie číslo bolo 2, tak potrebujeme, aby na mieste jednotiek v poradovom čísle bolo $2 : 2 = 1$. Druhá mocnina 2 je 4, teda číslo od ktorého budeme odpočítavať 4 sa musí končiť na 5. Takže to bude druhá mocnina 5. Vidíme, že platí: $25 - 4 = 21$.

Úloha 32:

Na stredovej kachličke štvorcovanej podlahy 21×21 na záchodoch Otcovej haluškárne sa nachádza mop. Za jeden ťah možno mop presunúť na susednú kachličku (susedné kachličky zdieľajú stranu). Zuzana urobila 10 ťahov mopom. Koľko existuje kachličiek, kde sa môže mop nachádzať?

Výsledok: 121

Riešenie:

Môžeme si všimnúť, že poloha mpu nezávisí od poradia, v ktorom si Zuzana jednotlivé smery vyberá, ale len od celkového počtu jednotlivých ťahov hore, doprava, dole alebo doľava. Napríklad, ak v Zuzana pôjde najprv dole a potom doľava, skončí mop na tom istom mieste, ako keby išla najprv doľava a potom dole.

Taktiež si môžeme všimnúť, že dvojice ťahov hore – dole a doprava – doľava sú navzájom opačné. Ak sa Zuzana rozhodne počas cesty mopom, že pôjde dole a hore alebo doľava a doprava, skončí mop na tom istom mieste, ako keby spravila dokopy o dva ťahy menej. Ťahy, ktoré ostanú, keď odstránime dvojice opačných ťahov, nazvime zmysluplné ťahy. Výsledná pozícia mpu teda závisí len od zmysluplných ťahov. V zmysluplných ťahoch sa nikdy nenachádzajú ťahy hore a dole naraz, a taktiež sa v nich nikdy naraz nenachádzajú ťahy doprava a doľava.

Počas ťahania mpu mohla Zuzana spraviť 0, 2, 4, 6, 8 alebo 10 zmysluplných ťahov. Podme sa zamyslieť na tým, na koľkých rôznych kachličkách môže skončiť mop po rôznych počtoch zmysluplných ťahov.

Po 0 zmysluplných ťahoch je situácia jednoduchá, pretože mop musel skončiť na tej istej kachličke ako začal.

Pri nenulovom počte zmysluplných ťahov si môžeme dosiahnuteľné kachličky rozdeliť do skupín podľa toho, ktorými smermi sa k nim dostaneme. Najprv sú tu kachličky, ku ktorým je možné sa dostať tak, že Zuzana bude celý čas robiť ťahy tým istým smerom. Takéto kachličky sú štyri, jedna pre každý smer.

Potom sú tu ešte kachličky, ku ktorým sa dostaneme tak, že Zuzana robí zmysluplné ťahy dvoma rôznymi smermi. Existujú štyri skupiny takýchto kachličiek – také ku ktorým sa dostaneme ťahmi len hore a vpravo, len vpravo a dole, len dole a vľavo a napokon len vľavo a hore.

Pozrime sa teraz na to, koľko kachličiek sa nachádza v jednej z týchto skupín, napríklad v tej, v ktorej mop pôjde len hore a doprava. Kachličky v tejto skupine sa líšia tým, koľko ťahov hore spravil mop, aby ich dosiahol. Zvyšné ťahy potom už nutne musia smerovať doprava. Keďže mop musí spraviť aspoň jeden ťah doprava, počet možností, pre množstvo ťahov hore, je vlastne o jedna menej ako počet ťahov. Ľahko si rozmyslíme, že to isté platí aj pre zvyšné tri skupiny.

Zopakujme si, na čo sme zatiaľ prišli. Sú štyri kachličky, na ktoré sa dostaneme tak, že budeme robiť ťahy len jedným smerom. Ďalej sú štyri dvojice smerov, ku každej dvojici prislúcha $4 \cdot (\text{počet ťahov} - 1)$ kachličiek. Keď to všetko spojíme dokopy, zistíme, že počet kachličiek na ktoré sa vieme dostať po konkrétnom počte zmysluplných ťahov je $4 \cdot (\text{počet ťahov} - 1) + 4 = 4 \cdot \text{počet ťahov}$.

Teraz nám už ostáva len spočítať počty dosiahnuteľných kachličiek pre jednotlivé počty zmysluplných ťahov, ktoré mohla Zuzana urobiť. Pre 0 ťahov je to 1 kachlička, pre 2 ťahy je to 8 kachličiek, pre 4 ťahy 16 kachličiek, pre 6 ťahov 24 kachličiek, pre 8 ťahov 32 kachličiek, pre 10 ťahov je to 40 kachličiek. Sčítaním získame výsledný počet kachličiek, ktorým je $1 + 8 + 16 + 24 + 32 + 40 = 121$.

Úloha 33:

Obsah podlahy v štvorcovej jedálni v Otcovej haluškárni je celé číslo a je rovný obsahu podlahy v obdĺžnikovej kuchyni, ktorej obvod je 386. Ak sú strany podlahy obdĺžnikovej kuchyne tiež celé čísla, aká je dĺžka strany podlahy štvorcovej jedálne?

Výsledok: 84

Riešenie:

Vieme, že obvod obdĺžnika je 386. Teda súčet dvoch jeho strán je 193, čo je prvočíslo. To znamená, že tieto dve dĺžky nemôžu mať spoločného deliteľa väčšieho než 1, lebo inak by aj ich súčet bol deliteľný týmto deliteľom, a to sa pri prvočíselnom súčte nemôže stať. Z toho vyplýva, že nemajú žiadneho spoločného prvočíselného deliteľa, teda v prvočíselnom rozklade nebudú mať dĺžky strán obdĺžnika žiadne rovnaké prvočísla.

Obsah štvorca získame, ako súčin dvoch rovnakých čísel. Teda keď sa pozrieme na jeho prvočíselný rozklad, tak musíme byť schopní rozdeliť tieto prvočísla na dve časti, ktoré reprezentujú tie dve rovnaké čísla. Keďže tieto čísla sú rovnaké, tak aj tieto časti musia byť rovnaké. Ak máme dve rovnaké časti, tak to znamená, že máme z každého prvočísla párny počet. Ak by z nejakého bol nepárny, tak by sme ho nevedeli rozdeliť rovnomerne do dvoch častí.

Toto platí aj o súčine našich dvoch strán obdĺžnika, keďže keď ich vynásobíme, tak dostaneme obsah štvorca. Zároveň už vieme, že strany obdĺžnika majú v prvočíselnom rozklade iba rôzne prvočísla. Takže keď chceme rozdeliť prvočíselný rozklad súčinu strán obdĺžnika na dve časti reprezentujúce dve jeho strany, tak tieto dve časti musia mať iba rôzne prvočísla. Preto všetky prvočísla rovnakej hodnoty musíme dať spolu do jednej časti, nemôžeme ich rozdeliť. Keďže každé prvočíslo je v celom súčine párny počet ráz (kvôli tomu, že to je stále ten istý súčin zo štvorca), tak aj v oboch častiach osobitne bude každé prvočíslo párny počet ráz.

My však vieme, že ak v prvočíselnom rozklade čísla je párny počet z každého prvočísla, tak sa rovná súčinu dvoch rovnakých čísel, teda obe dĺžky strán obdĺžnika sa dajú zapísať ako súčin dvoch rovnakých čísel. Zároveň súčet týchto dvoch dĺžok je 193. Čísla menšie ako 193, ktoré sú súčinom dvoch rovnakých prirodzených čísel sú: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169. Chceme vybrať dve z nich, ktoré majú súčet 193. Zistíme, že $193 = 49 + 144 = 7 \cdot 7 + 12 \cdot 12$. Preto obsah štvorca je $12 \cdot 12 \cdot 7 \cdot 7$, teda strana štvorca je $12 \cdot 7 = 84$.

Úloha 34:

V Otcovej haluškáрни je stôl v tvare trojuholníka ABC , ktorý má obsah 168. Vyznačme v ňom strednú priečku KL , kde K je stred strany AB a L stred strany BC . Strednou priečkou sme rozdelili trojuholník na štvoruholník a trojuholník. Priesečník uhlopriečok tohto štvoruholníka označme ako M . Určte obsah trojuholníka KLM .

Výsledok: 14

Riešenie:

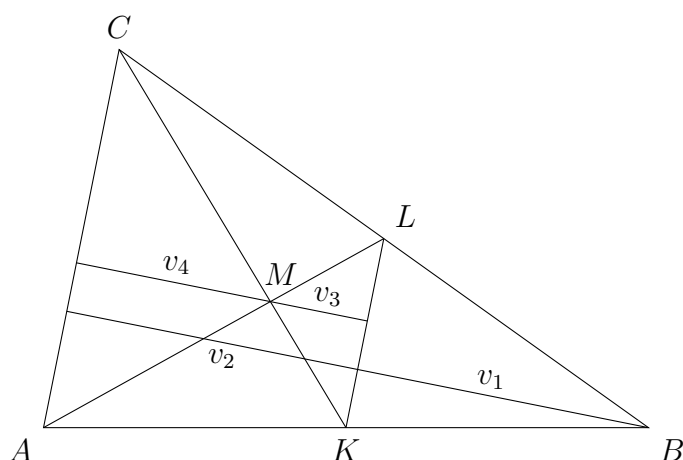
Úsečka KL je strednou priečkou v trojuholníku ABC , a teda je rovnobežná so stranou AC . Uhol KLB je preto súhlasný s uhlom ACB , a teda majú rovnakú veľkosť. Z rovnakého dôvodu majú uhly LKB a CAB rovnakú veľkosť. Trojuholníky ABC a KBL sú teda podobné podľa vety uu . Navyše podľa vlastností strednej priečky platí, že AC je dvakrát dlhšia ako KL – teda všetky dĺžky v trojuholníku ABC sú dvakrát dlhšie ako v trojuholníku KBL . Výšku v trojuholníku ABC na stranu AC označme v , výšku v trojuholníku KBL na stranu KL označme v_1 a výšku v štvoruholníku $AKLC$ na stranu AC označme v_2 . Podľa podobnosti spomínaných trojuholníkov platí $v_1 = \frac{1}{2}v$, a teda $v_2 = v - v_1 = \frac{1}{2}v$.

V trojuholníkoch KLM a CAM sú uhly KML a AMC vrcholové, a teda rovnako veľké. Keďže je KL rovnobežná s AC , tak uhly KLM a CAM sú striedavé a majú rovnakú veľkosť. Trojuholníky KLM a CAM sú teda podobné podľa vety uu . Navyše už vieme, že $|AC| = 2 \cdot |KL|$, takže všetky dĺžky v trojuholníku CAM sú dvakrát dlhšie ako v trojuholníku KLM .

Výšku v trojuholníku KLM na stranu KL označme v_3 a výšku v trojuholníku AMC na stranu AC označme v_4 . Platí:

$$\begin{aligned} v_2 &= v_3 + v_4 \\ &= v_3 + 2v_3 \\ &= 3 \cdot v_3 \\ \Rightarrow v_3 &= \frac{1}{3} \cdot v_2 \\ v_3 &= \frac{1}{6} \cdot v \end{aligned}$$

Obsah trojuholníka ABC vypočítame ako $\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot v$. Ako základňu trojuholníka KLM vezmeme stranu KL , ktorá má polovičnú dĺžku z $|AC|$. Výška na túto stranu je dlhá ako jedna šestina z výšky na stranu $|AC|$ v trojuholníku ABC . Dokopy má teda trojuholník KLM obsah rovný jednej dvanásťtine obsahu trojuholníka ABC , teda 14.



Úloha 35:

V Otcovej Haluškáрни môžeme platiť 3 rôznymi druhmi mincí. Každá z týchto mincí má v peniazoch kladnú celočíselnú hodnotu. Veľký Jano, Mária a Hugolín majú každý z každého typu mince aspoň jednu. Veľký Jano má spolu 4 mince v hodnote 28, Mária má 5 mincí v hodnote 21 a Hugolín má práve 3 mince. Akú hodnotu majú v súčte Hugolínove mince?

Výsledok: 17

Riešenie:

Označme si hodnoty mincí postupne a, b, c . Keďže každý z troch ľudí musí mať aspoň jednu mincu z každej hodnoty, tak musí mať Veľký Jano práve dve mince z jednej hodnoty a po jednej minci zo zvyšných dvoch hodnôt. Nech bez ujmy na všeobecnosti má dve mince hodnoty a . Potom platí $2a + b + c = 28$.

Mária nemôže mať viac než jednu mincu hodnoty a , inak by súčet hodnôt jej mincí prevýšil súčet hodnôt Veľkého Jana. Ak by mala Mária dve mince b a dve mince c , tak by pre súčet hodnôt jej mincí platilo $a + 2b + 2c = 21$. Súčtom hodnôt mincí Veľkého Jana a Márie potom dostaneme $(2a + b + c) + (a + 2b + 2c) = 3(a + b + c) = 21 + 28 = 49$. Ľavá strana rovnice je deliteľná číslom 3, ale pravá nie, čo znamená, že táto možnosť nemôže nastať.

Teraz ostáva prešetriť prípad, keď má Mária z jednej hodnoty 3 mince. Potom bez ujmy na všeobecnosti nech má 3 mince hodnoty b , čo znamená $a + 3b + c = 21$. Odpočítaním súčtov hodnôt mincí Veľkého Jana a Márie dostaneme $(2a + b + c) - (a + 3b + c) = a - 2b = 28 - 21 = 7$, takže $a = 2b + 7$.

Dosadením za a do súčtu hodnôt mincí Veľkého Jana dostávame $2a + b + c = 5b + c + 14 = 28$, teda $5b + c = 14$. Ak $b \geq 3$, tak $5b \geq 15$, takže nutne $b = 1$, alebo $b = 2$. V oboch prípadoch už vieme

jednoducho dopočítať hodnoty a, c . Pre $b = 1$ je $a = 9$ a $c = 9$, čo nemôže nastať, lebo by existovali iba dva rôzne druhy mincí. Pre $b = 2$ je $a = 11$ a $c = 4$.

Hugolín musí mať nutne zo všetkých troch druhov mincí práve jednu, takže jeho mince majú v súčte hodnotu $a + b + c = 17$.

Úloha 36:

Malý Riško si vymyslel postupnosť jedenia halušiek. Zaumienil si, že každý deň zje presne toľko halušiek ako predošlé dva dni dohromady, pričom každý deň zjedol kladný a celočíselný počet halušiek. Toto pravidlo však začal aplikovať až od tretieho dňa. Koľko najmenej halušiek zjedol Malý Riško v tretí deň, ak na ôsmy deň ich zjedol 400?

Výsledok: 35

Riešenie:

Označme si počet halušiek, ktoré zjedol v prvý deň a a počet, ktoré zjedol v druhý deň b . Postupne si pomocou týchto dvoch čísel vyjadríme počet, ktorý zjedol každý deň. V tretí deň to bude $a + b$, vo štvrtý $a + 2b$, v piaty $2a + 3b$, v šiesty $3a + 5b$, v siedmy $5a + 8b$ a na ôsmy deň to bude $8a + 13b$. Stačí už len zistiť, ako získať číslo 400 ako súčet a čísel 8 a b čísel 13 tak, aby bol ich súčet čo najmenší. Aby sme to dosiahli, použijeme čo najviac krát číslo 13. Súčet $a + b$ bude najmenší pre $11 \cdot 8$ a $24 \cdot 13$, z čoho vyplýva $a + b = 11 + 24 = 35$. Keďže najmenší spoločný násobok 8 a 13 je $8 \cdot 13$, ale okrem $24 \cdot 13$ máme v súčte $a + b$ už len $8 \cdot 11$, tak nemôžeme odčítať istý počet násobkov 8, a namiesto toho pripočítať iný počet násobkov 13, pretože žiadne číslo do $8 \cdot 13$ nie je deliteľné 8 aj 13. Preto b už nevie byť väčšie, a teda ani súčet $a + b$ už nevie byť menší. Celý rad bude potom v hľadanom prípade vyzeráť takto:

11 24 **35** 59 94 153 247 400

Úloha 37:

Časník Rudo robil uzávierku. Potreboval vypočítať koľko suchých chlebkov sa za mesiac minulo do cesnakovej polievky. Najprv si na papier napísal číslo 1. Potom písal ďalšie čísla, pričom každé číslo bolo určené predchádzajúcim číslom, a to tak, že striedal operácie „preusporiadať číslice tak, aby vytvorené číslo bolo čo najväčšie“, a „pričítaj 1,“ pričom po každej operácii zapísal nové číslo (teda ako druhé napísal opäť číslo 1, ako tretie číslo 2 a ako štvrté znovu číslo 2). Prestal, keď prvýkrát napísal 2025-ciferné číslo. Koľko čísel napísal pred ním?

Výsledok: $9 \cdot 2024 \cdot 2025 = 36887400$

Riešenie:

Pozrime sa na ciferný súčet čísla v zadanej postupnosti. Preusporiadaním číslic sa ciferný súčet nezmení. Po preusporiadaní budú tieto číslice zoradené od najväčšej po najmenšiu, keďže tak je vytvorené číslo čo najväčšie. Pripočítaním čísla 1 sa preto ciferný súčet buď zmení o 1, alebo sme pripočítavali ku číslu zloženého zo samých deviatok a zmení sa na 1. Ak teraz začneme na n -cifernom čísle tvorenom len jednotkou a samými nulami, tak musíme $(9n - 1)$ -krát zvýšiť ciferný súčet, aby sme ho dostali na samé deviatky. Keďže každé číslo ešte okrem pričítania aj preusporiadavame, tak dokopy napíšeme $2 \cdot 9n = 18n$ n -ciferných čísel. Následne musíme ešte raz pripočítať 1, aby malo nové číslo o cifru viac, čím dostaneme jednotku a o jednu nulu viac, než sme mali predtým. Keďže toto vykonáme pre každý počet cifier, tak dokopy pre jednociferné až 2024-ciferné čísla preto napíšeme $18 + 36 + 54 + \dots + 2024 \cdot 18 = 18 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2024) = 18 \cdot \frac{2024 \cdot 2025}{2} = 9 \cdot 2024 \cdot 2025 = 36887400$ čísel predtým, než napíšeme prvé 2025-ciferné číslo.

Úloha 38:

Koľko existuje štvorčekovaných obrúskov 7×7 , ktoré majú zafarbené 2 políčka na červeno a ostatné na bielo? Rovnaké obrúsky sú také, ktoré dostaneme otočením.

Výsledok: 300

Riešenie:

Najprv rozoberme stredovo súmerné zafarbenia červených políčok. Pre každé umiestnenie prvého políčka, okrem stredy tabuľky (na ktoré je teda $7 \cdot 7 - 1 = 48$ možností), je práve jedno políčko, ktoré je s ním stredovo súmerné. Takto ale zarátame každú možnosť dvakrát, raz z pohľadu jedného červeného a raz z pohľadu druhého, a teda počet takýchto ofarbení je $48 : 2 = 24$. Uvažujme však aj otočenia tabuľky. Pre každé z týchto 24 rozložení je zarátané aj jeho otočenie, ktoré je len jedno, keďže po dvoch otočeniach sa dostaneme k rovnakému zafarbeniu, a teda celkovo je týchto ofarbení $24 : 2 = 12$.

Teraz sa pozrime na zafarbenia, ktoré nie sú stredovo súmerné a obsahujú stred tabuľky. Tých je $48 : 4 = 12$, keďže, uvažujúc aj otočenia tabuľky, pre každé z nájdených zafarbení sú v daných 48 možnostiach zarátané aj jeho zvyšné otočenia (tie sú tri, keďže nie sú stredovo súmerné).

Ako posledné uvažujme všetky zvyšné zafarbenia, teda také, ktoré nie sú stredovo súmerné a neobsahujú stred. Pre každé umiestnenie prvého políčka, okrem toho stredného, na ktoré je $7 \cdot 7 = 48$ možností, nám ostáva $48 - 1 - 1 = 46$ možných umiestnení druhého políčka (okrem už vybraného políčka a políčka s ním stredovo súmerným). Avšak v týchto možnostiach je každá zarátaná dvakrát, raz z pohľadu jedného červeného a raz z pohľadu druhého, a teda spolu je možností na umiestnenie $48 \cdot 46 : 2 = 1104$. Uvažujme však aj otočenia tabuľky. Pre každé z týchto 1104 rozložení sú zarátané aj jeho zvyšné otočenia (a tie sú tri, keďže nie sú stredovo súmerné). Preto je celkovo týchto ofarbení $1104 : 4 = 276$.

Zhrnutím všetkých možností dostávame, že celkovo je ofarbení tabuľky $12 + 12 + 276 = 300$.

Úloha 39:

Malý Riško sa pýtal otca Alojza, koľko má Octavií a koľko Škôd Superb. Tomu záleží na mentálnom vývine Riška, a tak mu dal takéto údaje s tým, že a predstavuje počet Octavií a b počet Škôd Superb:

- $a + 7b$ je prvočíslo
- $a + 1$ je deliteľné b
- $a = 2b + 5$
- $a + b$ je deliteľné 3

Určte všetky možné dvojice a, b predstavujúce tieto počty, ak jedno z tvrdení nebolo pravdivé.

Výsledok: (9, 2), (17, 6)

Riešenie:

Podme najprv zistiť, ktoré z tvrdení bude nepravdivé. Zoberme si posledné 2 tvrdenia. Ak by obe mali platiť, tak z tretieho $a = 2b + 5$ vyplýva, že $2b + 5 + b = 3b + 5$ má byť deliteľné 3, čo sa nedá. Teda jedno z týchto dvoch tvrdení musí byť nepravdivé.

Ak $a + b$ by bolo deliteľné 3, potom $a + b = 3n$, tak si prvé tvrdenie vieme rozpísať na $a + b + 6b$, teda $3n + 6b = 3(n + 2b)$. Tento výraz bude deliteľný 3. Z toho vyplýva, že štvrté tvrdenie je nepravdivé.

Z tretieho tvrdenia vyplýva, že a je nepárne. Podme zistiť či b je párne alebo nepárne. $a + 7b$ má byť prvočíslo (tento výraz nemôže byť rovný 2), teda výraz musí byť nepárny. Číslo a je nepárne a na to, aby celý súčet bol nepárny tak $7b$ musí byť párne, teda b bude párne.

Číslo b delí $a + 1$, za a si dosadíme tretie tvrdenie, teda b delí $2b + 5 + 1 = 2b + 6$, z čoho vyplýva, že b delí 6. Číslo 6 má delitele 1, 2, 3, 6, a zároveň b má byť párne, teda b môže byť 2 a 6.

Teraz si podme overiť tvrdenia pre 2 a 6. Ak $b = 2$, potom $a = 2 \cdot 2 + 5 = 9$, $9 + 7b = 9 + 7 \cdot 2 = 23$, čo je prvočíslo. Posledné tvrdenie b má deliť $a + 1$, $9 + 1 = 10$, 2 delí 10, teda jedna z dvojíc je 9 a 2. Ak $b = 6$, potom $a = 2 \cdot 6 + 5 = 17$, $17 + 7b = 17 + 7 \cdot 6 = 73$, čo je prvočíslo. Podľa posledného tvrdenia má b deliť $a + 1 = 17 + 1 = 18$. Keďže 6 delí 18, druhá dvojica je 17 a 6.

Úloha 40:

Otec Alojz má 5 traktorov, 1 fúrik a 1 motorku. Každý deň môže buď zdvojnásobiť počet svojich fúrikov, alebo vynásobiť deviatimi počet svojich motoriek (musí urobiť práve jedno z toho). Koľkokrát mohol zväčšiť počet svojich fúrikov za 30 dní, ak každý deň niečo urobil a na konci mal dokopy počet vozidiel (teda traktorov, fúrikov a motoriek) deliteľný 7? Ako odpoveď zadajte súčet všetkých možností.

Výsledok: 165

Riešenie:

Keďže súčet vozidiel musí byť deliteľný 7, tak súčet zvyškov počtov traktorov, fúrikov a motoriek po delení 7 musí byť 0. Keďže s traktormi nenarábame, ich zvyšok sa meniť nebude, bude vždy 5.

Preskúmame, ako fungujú zvyšky pri násobení. Majme dve čísla, ktoré majú zvyšky k a l po delení 7. Vieme ich potom zapísať ako $7a + k$ a $7b + l$ pre nejaké nezáporné celé a, b . Ich súčin je potom $(7a + k) \cdot (7b + l) = 49ab + 7al + 7bk + kl = 7 \cdot (7ab + al + bk) + kl$. Môžeme si všimnúť, že jediné, čo nie je deliteľné 7 v tomto výraze, je člen kl . Preto zvyšok súčinu týchto dvoch čísel po delení 7 je rovný súčinu ich zvyškov, teda kl .

Pozrime sa najprv na to, ako vyzerajú zvyšky počtov motoriek, teda mocnín 9. Na začiatku máme zvyšok 1. Následne vždy násobíme číslom 9, ktoré má zvyšok 2 po delení 7. Zvyšky po delení 7 preto postupne budú:

- $9^0 = 1 \rightarrow$ zvyšok 1
- $9^1 = 9^0 \cdot 9 \rightarrow$ zvyšok $1 \cdot 2 = 2$
- $9^2 = 9^1 \cdot 9 \rightarrow$ zvyšok $2 \cdot 2 = 4$
- $9^3 = 9^2 \cdot 9 \rightarrow$ zvyšok $4 \cdot 2 = 8$, čo je to isté, ako zvyšok 1

Keďže sme dospeli k začiatočnému zvyšku a naďalej násobíme rovnakým číslom, tak zvyšky ďalších mocnín 9 sa budú opakovať v poradí 1, 2, 4, 1, 2, 4, ... Všimnime si, že pre počty fúrikov, teda mocniny 2, dostaneme úplne rovnaké opakovanie zvyškov, keďže 2 a 9 majú rovnaký zvyšok po delení 7.

Chceme, aby súčet zvyškov fúrikov a motoriek dával na konci zvyšok 2, keďže následne spolu s piatimi traktormi bude tento súčet deliteľný 7. Jediná dvojica zvyškov, pre ktoré to funguje, je, ak zvyšok fúrikov aj motoriek je 1. Vyššie sme ukázali, že počty fúrikov aj motoriek, teda mocnín 2 a 9, dávajú zvyšok 1 len vtedy, ak sú umocnené na exponent deliteľný trojkou. Preto vieme fúriky umocniť s exponentami 0, 3, 6, ..., 30. Vo všetkých týchto možnostiach dostávame aj exponent deliteľný 3 pre počet motoriek, keďže dokopy je ich súčet 30. Teda ak jeden z exponentov je deliteľný 3, tak musí byť aj druhý. Ak teraz spočítame všetky tieto možnosti, tak nám vyjde $0 + 3 + 6 + \dots + 30 = 165$.

Hádanky

Hádanka 1:

Vytiahli ma z bane a zavreli do drevenej debny, z ktorej ma nikdy nevypustili, a napriek tomu ma používa takmer každý. Čo som?

Výsledok: tuha do ceruzky

Hádanka 2:

Na moju mamku nezabudneš, mňa sa nevieš zbaviť a moje deti túžobne očakávaš. Čo som?

Výsledok: prítomnosť

Hádanka 3:

Čo vyhodíš, keď to chceš použiť, ale vezmeš si späť, keď to použiť nechceš.

Výsledok: kotva

Hádanka 4:

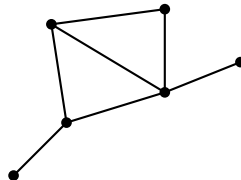
Keď sa mením, vydávam hlasný zvuk. Keď sa zmením, priberiem, ale vážim menej. Čo som?

Výsledok: popcorn

Hlavalamy

Hlavalam 1:

Medzi mestami A, B, C, D, E a F vedie niekoľko ciest ako na obrázku. Roznáška halušiek 1 chodí medzi mestami C-E-B-F-D a späť. Roznáška halušiek 2 chodí medzi mestami A-C-F-E a späť. Dopíšte mestá do mapy.



Výsledok: 62

Hlavalam 2:

Zakrúžkuj každé číslo 1 – 9 práve raz, nech v každom riadku, stĺpci, vyznačenom štvorci 3×3 a diagonále je práve 1 zakrúžkované

		3		6		1		
	1		9	2			2	
9					1			3
		5	2		1		4	
9	6						4	9
	9		8		4	2		
9			7					5
	5			6	2		1	
		6		4		7		

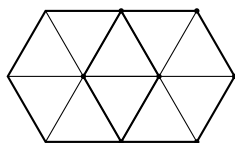
Výsledok:

		3		6		1	
	1		9	2			2
9					1		3
		5	2		1		4
9	6					4	9
	9		8		4	2	
9			7				5
	5			6	2		1
		6		4		7	

Hlavalam 3:

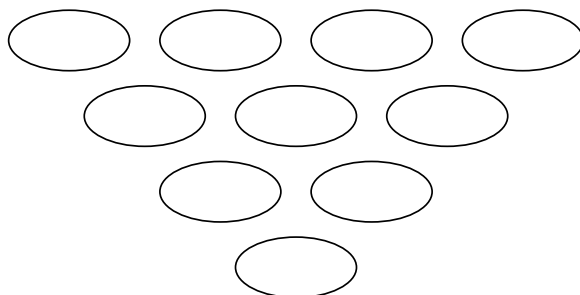
Kolko najmenej rovných korbáčov musíme použiť, aby sme v rovine vytvorili 10 rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky jedného korbáča? Rozloženie korbáčov aj nakreslite.

Výsledok: 19

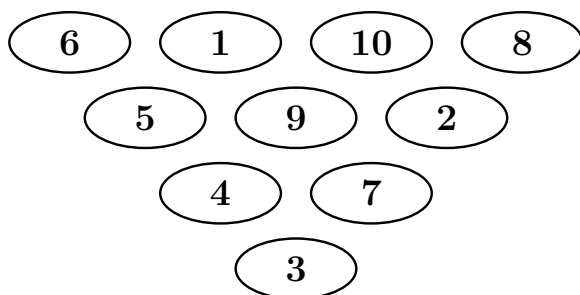


Hlavalam 4:

Doplňte čísla od 1 do 10 tak, by každé číslo od druhého riadku nižšie bolo rozdielom dvoch čísel nad ním.



Výsledok: Napríklad:



Lomihlav

Lomihlav je matematická súťaž organizovaná Združením STROM a Prírodovedeckou fakultou Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach pre žiakov základných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií. V zime roku 2023 sa koná už 23. ročník tejto súťaže.

Trvanie súťaže je magických 99 minút. Na začiatku každý tím dostane 6 matematických úloh a 1 bonus (vo forme hlavolamu alebo hádanky). Po úspešnom vyrátaní úlohy vymení tím úlohu za novú. Po každej päťici správne vyriešených úloh tím dostane jeden bonus (vo forme hlavolamu alebo hádanky). Bonus sa odovzdáva rovnako ako úloha, ale už zaň tím nedostáva novú úlohu, iba sa mu zarátavajú body.

Tímy získavajú body podľa ročníkov súťažiach v tíme, a to podľa nasledovnej tabuľky:

Ročník				Správny výsledok	
1. žiak	2. žiak	3. žiak	4. žiak	úloha	bonus
7	7	7	7	3,80	2
7	7	7	8	3,70	2
7	7	7	9	3,60	2
7	7	8	8	3,60	2
7	7	8	9	3,50	2
7	7	9	9	3,40	2
7	8	8	8	3,50	2
7	8	8	9	3,40	2
7	8	9	9	3,30	2
7	9	9	9	3,20	2
8	8	8	8	3,40	2
8	8	8	9	3,30	2
8	8	9	9	3,20	2
8	9	9	9	3,10	2
9	9	9	9	3,00	2

Zadania starších ročníkov nájdete na strom.sk/matik/akcie/lomihlav.

autori:	Alena Bálintová, Nina Anna Betáková, Tomáš Cabúk, Martin Dudjak, Michal Ilkovič, Branislav Ječim, Jakub Katrák, Eva Krajčiová, Matúš Libák, Livia Lukáčová, Matúš Masrna, Martin Mihálik, Martina Osuská, Patrik Palovčík, Natália Poliačiková, Michal Revický, Oliver Seman, Kalista Semancová, Sophia Sotáková, Jakub Stramba, Tomáš Sukeľ, Daniel Ryan Takáč, Natália Tkáčová, Lubomír Vargovčík, Štefan Vašak, Michal Vodička, Richard Vodička, Magdaléna Škriabová, Martin Šmilňák
recenzia a úprava:	Eva Krajčiová, Matúš Masrna, Oliver Seman, Veronika Vodičková
názov:	Lomihlav – 28.11.2025
vydavatelia:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta Združenie STROM
web:	strom.sk/matik/akcie/lomihlav