Prešovský matboj, 6. 12. 2002, 1. časť

1.1. Peter trénoval na streleckú súťaž. Prvý výstrel síce netrafil do terča, ale všetky ďalšie už trafil. Tréner od neho chcel, aby dokopy trafil viac ako 90% zásahov. Koľko najmenej výstrelov musel Peter trafiť do terča, aby splnil požiadavku trénera?

1.2. Namiesto znakov $\bigcirc$ je treba doplniť znaky + (sčítanie) alebo . (násobenie):

$$1 \bigcirc 2 \bigcirc 3 \bigcirc 4 \bigcirc 5 \bigcirc 6 \bigcirc 7 \bigcirc 8 \bigcirc 9$$

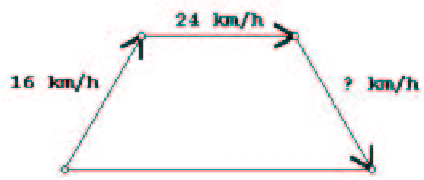
Akú najmenšiu hodnotu môže tento výraz nadobudnúť (násobenie má prednosť pred sčítaním)?

1.3. Nejaký fagan napísal na stenu štvorciferné číslo $\overline{abcd}$. Vymyslel si ho tak, aby platilo $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + \overline{a} = 2002$. Zistite, aké číslo bolo napísané na stene.

1.4. *Magický štvorec* rozmerov 3×3 je tabuľka čísel 3×3 taká, že ak spočítame čísla v ľubovoľnom riadku, alebo ľubovoľnom stĺpci, alebo na jednej z uhlopriečok, dostaneme stále to isté číslo. Jeden z nich je na obrázku. Ak do štvorca vieme vpísať čísla $n, n+3, n+6, \ldots, n+24$ tak, že nám vznikne magický štvorec, aký je súčet čísel v riadku takého magického štvorca (vyjadrené za pomoci n)?

6	1	8
7	5	3
2	9	4

1.5. Cyklisti Adam a Boris sa vybrali na túru a aby sa trocha zapotili, chcú dodržať v neľahkom teréne priemernú rýchlosť 24 km/h. Ich trasa povedie cez tri rovnako dlhé úseky, jeden do kopca, kde vedia ísť rýchlosťou 16 km/h, potom po rovinke, kde pôjdu rýchlosťou 24 km/h a posledný úsek je dole kopcom (pozri obr.). Akou rýchlosťou musia uhánať dole kopcom, aby splnili svoj záväzok?

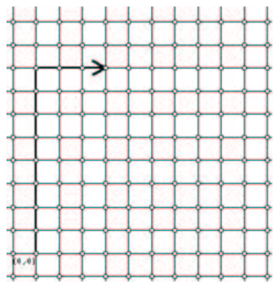


1.6. Otec dal svojim deťom na úlohu napísať číslo -1 ako súčet po sebe idúcich celých čísel (hoci aj jedného). Každé dieťa to napísalo iným spôsobom (poradie sčítancov nehrá rolu). Nanajvýš koľko detí mohlo byť v jeho rodine?

1.7. V matematickej triede padla ťažká písomka: z 50-tich študentov bol bodový priemer iba 68 bodov zo sto. Je pravda aj to, že najlepších desať študentov malo plný počet bodov. Zistite, aký priemerný počet bodov získali zvyšní štyridsiati študenti.

1.8. Predavačka robila inventúru. Zistila, že má c gramov kávy v každom z k rovnakých vreciek. Potrebovala ale viac vreciek kávy, preto všetku kávu rozdelila na $k+n$ rovnakých dielov. O koľko sa zmenšila hmotnosť kávy v jednom vrecku (vyjadrite ako zlomok)?

1.9. Predstavte si nekonečnú štvorcovú mriežku, označte si jeden jej vrchol ako $(0,0)$ a postavte si na ten bod figúrku. Touto figúrkou je možné skákať tak, že sa posunie o 8 vrcholov v jednom smere a o tri v smere na ňom kolmom. Zistite, na najmenej koľko skokov sa vie figúrka dostať z bodu $(0,0)$ do bodu $(19,0)$.



1.10. Chemik má roztok, v ktorom je 5 litrov propanolu a 18 litrov vody. Chcel by dosiahnuť 40%-ný roztok propanolu. Koľko propanolu má ešte pridať do svojho roztoku?

1.11. Na večernej párty sa stretlo 7 žien a 5 mužov. Pri zoznamovaní si každý muž podal ruku s každým zo zúčastnených, ale každá žena si podala ruku iba s každým mužom. Koľko podaní rúk prebehlo na párty?

1.12. Kocka $4 \times 4 \times 4$ (zlepená z kociek $1 \times 1 \times 1$) má 32 kociek nafarbených na čierno a zvyšné na bielo. Aká je najväčšia možná na čierno zafarbená plocha kocky $4 \times 4 \times 4$? (v zlomku z celej plochy)

Prešovský matboj, 6. 12. 2002, 2. časť

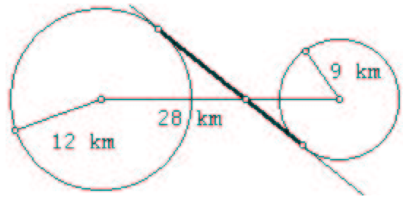
2.1. Jano má toľko rokov, že súčin cifier jeho dvojciferného veku je rovnaký (a nenulový), ako bol pred šiestimi rokmi. Koľko rokov má Jano?

2.2. Číslo 700 245 vieme rozložiť na súčin troch dvojciferných čísel jediným spôsobom. Aký je súčet takýchto troch činiteľov?

2.3. V novej dedine vytesávali majstri na domy postupne čísla $1, 2, \ldots$ a minuli presne 999 číslic. Koľko domov má táto dedinka?

2.4. Gabika a Cyril si pozvali na návštevu svojich priateľov Alicu, Borisa, Daniela, Emíliu a Fera a usádzali sa okolo okrúhleho stola. Hostitelia nechcú sedieť vedľa seba a Gabika chce sedieť na stoličke najbližšie ku kuchyni. Koľkými rôznymi spôsobmi sa môžu všetci usadiť?

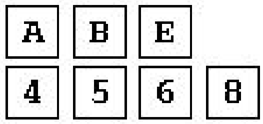
2.5. Tentokrát nie drak, ale dva zúrivé psy strážia princeznú. Sú uviazané na lanách dlhých 12 a 9 kilometrov, ktoré sú pripevnené 28 kilometrov od seba (pozri obrázok). Udatný rytier sa chce priamou cestou predrať cez týchto psov tak, že si chce pozrieť každého zblízka, ale práve raz. Zistite, koľko minút prejde medzi dvoma stretnutiami so psami, ak udatný rytier cvála rýchlosťou $70\sqrt{7}$ metrov za minútu.



2.6. V jazykovej triede hovoria dve tretiny dievčat a polovica chlapcov aj španielsky. Ak viete, že pomer chlapcov a dievčat v triede je $4 : 3$, zistite aká časť (zlomok) všetkých študentov hovorí španielsky.

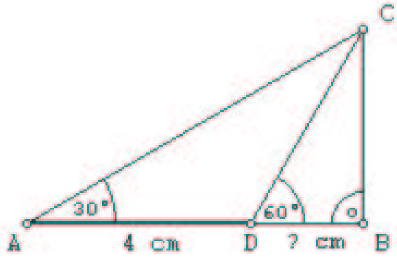
2.7. Za každý rok klesne cena auta o rovnakú sumu. Viete, že cena nového auta klesla za 10 rokov z 200 000 Sk na 20 000 Sk. Aká bola cena auta 6 rokov po tom, ako bolo vyrobené?

2.8. Na stole sú poukladané také kartičky, ktoré majú na jednej strane nejaké písmeno a na druhej nejakú číslicu; presne ako na obrázku. Koľko najmenej kartičiek musíme obrátiť na druhú stranu, aby sme sa presvedčili o platnosti výroku: „Každá kartička so samohláskou má na druhej strane prvočíslo”?



2.9. Farmár chcel rozdeliť svoje stádo koní medzi štyroch synov. Najstaršiemu chcel dať tretinu, druhému najstaršiemu štvrtinu a dvom najmladším chcel dať každému pätinu počtu koní. Nevedel to urobiť presne bez toho, aby musel „rozdeliť” koňa. Potom sa im narodilo žriebä, ktoré keď do toho započítal, vedel svoje stádo rozdeliť medzi synov, a žriebä si mohol nechať. Zistite, koľko koní malo farmárovo stádo pred narodením žriebätka.

2.10. Prizrite sa na takýto trojuholník ABC. Ak viete veľkosti uhlov $|\sphericalangle BDC| = 60°$, $|\sphericalangle BAC| = 30°$, $|\sphericalangle DBC| = 90°$ a $|AD| = 4\,\mathrm{cm}$, zistite dĺžku úsečky BD.



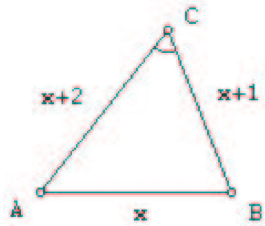
2.11. Tri reálne čísla x, y, z spĺňajú rovnicu $|x+2|+|y+3|+|z-5| = 1$. Napíšte najväčšiu možnú hodnotu, akú môže mať súčet $x+y+z$.

2.12. Ak je číslo $x > 5$, ktorý z nasledujúcich zlomkov je najmenší?
a) $\dfrac{5}{x}$ b) $\dfrac{5}{x-1}$ c) $\dfrac{x}{5}$ d) $\dfrac{5}{x+1}$ e) $\dfrac{x+1}{5}$

Prešovský matboj, 6. 12. 2002, 3. časť

3.1. V športovom klube ŠKP Solivary sa združujú športovci v troch športoch: basketbal hrá 21, volejbal 29 a futbal 26 športovcov. Niektorí z nich, tí zdatnejší, sa podujali na viacero športov: 14-ti trénujú basketbal aj futbal, 15-ti futbal aj volejbal a 12-ti volejbal aj basketbal. Medzi nimi je aj 8 nadšencov všetkých troch športov. Koľko športovcov má tento klub?

3.2. Daný je trojuholník (pozri obr.), v ktorom sú dĺžky jeho strán postupne x, $x+1$ a $x+2$. Ktoré z nasledujúcich tvrdení musia platiť?
a) $x \geq 1$,
b) $x \leq 5\sqrt{2}$,
c) $|\sphericalangle ACB| \leq 60°$?

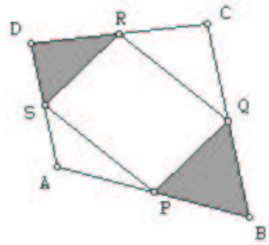


3.3. Adamovi Malyczovi sa na Svetovom pohári poradil vynikajúci skok. Od piatich rozhodcov dostal priemerné skóre 91 bodov. Ak by sme bodové hodnotenia rozhodcov zoradili podľa veľkosti, v strede (na 3. mieste zľava) by bolo číslo 92. Najčastejšie vyskytujúce sa hodnotenie bolo 95 bodov. Aký je súčet dvoch najmenších bodových hodnotení poľského skokana na lyžiach?

3.4. Zistite čo najrýchlejšie, aký je súčin koreňov tejto rovnice:

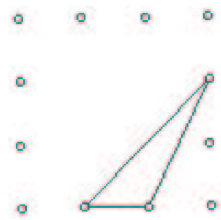
$$(x-1)(x-3)+(x-4)(x+5)+(x-3)(x-7)=0$$

3.5. V štvoruholníku $ABCD$ označme stredy jeho strán postupne P, Q, R a S. Akú časť obsahu štvoruholníka tvorí obsah vyšrafovanej časti?



3.6. Nejaké tri celé čísla a, b, c spĺňajú rovnicu $28a+30b+31c=365$. Zistite, akou číslicou potom končí číslo $c-2a$.

3.7. Koľkými spôsobmi je možné vybrať tri vrcholy z týchto dvanástich tak, aby sme ich spojením dostali trojuholník? (jedna z možností je na obrázku)

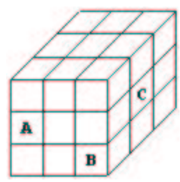


3.8. Na vysokej škole to majú študenti ťažké. Bolo zistené, že v priemere iba 65% študentov urobí skúšku na prvý termín. Z tých, čo to šťastie nemajú, iba 70% prejde druhým termínom. Spomedzi tých, ktorí idú na skúšku potretí krát, iba polovica uspeje. Koľko percent študentov v priemere neurobí skúšku ani na tretí pokus?

3.9. Obsah kružnice opísanej pravidelnému šesťuholníku je 200π. Aký je obsah tohto pravidelného šesťuholníka?

3.10. Aká je posledná číslica čísla 3^{2002}?

3.11. Ak z kocky $3\times3\times3\,\mathrm{cm}$ odoberieme kocky $1\times1\times1$ označené písmenami A, B a C, aký bude povrch výsledného telesa?



3.12. Koľko existuje nepárnych trojciferných čísel, ktorých všetky cifry sú rôzne?

Riešenia

1.1. 10

1.2. 44

1.3. 1803

1.4. $3n + 36$

1.5. $48\,\mathrm{km/h}$

1.6. 2

1.7. 60

1.8. $\dfrac{cn}{k+n}$

1.9. 11

1.10. 7 litrov

1.11. 45

1.12. $\frac{3}{4} = 0.75$

2.1. 24

2.2. 267

2.3. 369

2.4. 480

2.5. 100

2.6. $\dfrac{4}{7}$

2.7. 92 000 Sk

2.8. 5

2.9. 59

2.10. $2\,\mathrm{cm}$

2.11. 1

2.12. d) $\dfrac{5}{x+1}$

3.1. 43

3.2. a) $x \geq 1$ a c) $|\sphericalangle ACB| \leq 60°$

3.3. 173

3.4. $\dfrac{4}{3}$

3.5. $\dfrac{1}{4}$

3.6. 5

3.7. 204

3.8. 5.25%

3.9. $300\sqrt{3}$

3.10. 9

3.11. $60\,\mathrm{cm}^2$

3.12. 320