

Košický matboj, 19. 10. 2012, 1. časť

1.1. Rodiny s číslami 1, 2, 3, 4, ..., 8 žijú v domoch na ulici v tomto poradí. Každá rodina by sa však chcela presťahovať do domu za ňou, len rodina číslo 8 do domu, kde je rodina číslo 1. V jednom kole sťahovania si môžu dve rodiny vymeniť medzi sebou domy. Koľko najmenej kôl sťahovania musí prebehnúť, aby všetky rodiny bývali vo svojich vysnívaných domoch?

1.2. Nájdite počet podmnožín množiny $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, pre ktoré je súčin všetkých prvkov rovný 5040.

1.3. V trojuholníku ABC máme $|AC| = |BC| = 7$ a $|AB| = 2$. Nech D je taký bod na priamke AB , že B leží medzi A a D , pričom $|CD| = 8$. Aká je dĺžka úsečky BD ?

1.4. Určte počet dvojíc dvojiciferných kladných celých čísel x,y , pre ktoré platí

$$||x - y| + y| = ||x + y| - y|.$$

1.5. Máme knihu s 287 stranami. Na každej zo strán je aspoň 355, ale najviac 395 slov. Aké najväčšie prirodzené číslo môžeme doplniť namiesto znaku ♠, aby mal študent pravdu, keď povedal: „Aspoň ♠ strán tejto knihy musí mať presne rovnaký počet slov.“?

1.6. Peťo a Janka radi behajú. Raz sa stretli na okruhu a naraz sa rozbehli z toho istého miesta rovnakým smerom. Peťo zabehne kolečko za minútu a 13 sekúnd, Janke to trvá minútu a 20 sekúnd. Po akom čase (v sekundách) sa znovu stretnú prvýkrát?

1.7. Pre koľko rôznych usporiadaných trojíc prirodzených čísel a, b, c platí $42 = a+b+c$? Usporiadané trojice sú také, v ktorých záleží na poradí, napr. $(1, 1, 40)$ je iná trojica ako $(1, 40, 1)$.

1.8. Koľko je rôznych desaťciferných čísel, pre ktoré platí, že prvá cifra určuje počet jednotiek v tomto čísle, druhá počet dvojak, atď., až desiata počet núl?

1.9. Obchodník kupuje mak po 6, 9 a 20 zrnkách. Tento obchodný ťah má aj svoje nevýhody a to hlavne, že si nevie kúpiť isté počty zrníek, napr. 5 zrníek maku si nevie kúpiť. Koľko najviac celých zrníek maku si nemôže kúpiť?

1.10. Aké je najväčšie kladné celé číslo n , pre ktoré existuje jediné celé kladné k také, že $\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}$?

1.11. Dve kružnice k_1, k_2 o polomere 1 sa navzájom zvonka dotýkajú v bode S . Nech KS je priemer kružnice k_1 a LM je priemer kružnice k_2 kolmý na KS . Aký je polomer kružnice opísanej trojuholníku KLM ?

1.12. Pre ktoré usporiadané dvojice $[m,n]$ má rovnica $m^n = n^{m-n}$ riešenie v obore prirodzených čísel.

Košický matboj, 19. 10. 2012, 2. časť

2.1. Snehulienka upiekla trpaslíkom úžasnú tortu. Hundroš, Mudroš, Kýblik a Spachtoško sa ale vrátili skôr ako ostatní a niekto z nich neodolal a zjedol celú tortu! Keď sa Snehulienka opýtala, kto to urobil, odpovedali takto:

Hundroš: Ja som to nebol!

Mudroš: Bol to Kýblik!

Kýblik: Ja som to nebol!

Spachtoško: Bol to Mudroš!

Jeden z trpaslíkov klamal. Kto zjedol Snehulienkinu chutnú tortu?

2.2. Čomu sa rovná výraz:

$$\frac{\sin^2(A)}{\cos^2(A)} + \frac{\cos^2(A)}{\sin^2(A)},$$

ak $\operatorname{tg}(A) = \frac{1}{3}$?

2.3. Sčítajte všetky šesťciferné čísla, z ktorých každé obsahuje všetky číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2.4. Trojuholník ABC má veľkosti vnútorných uhlov pri vrchoch A a B rovné 50° a 70° v tomto poradí. Označme D a E päty výšok z A a B . Vypočítajte koeficient podobnosti trojuholníkov CDE a CAB .

2.5. V rovine máme 5 bodov, žiadne tri z nich neležia na priamke. Aký je najmenší možný počet všetkých konvexných mnohoúholníkov (3, 4 a 5-uholníkov), ktoré majú vrcholy v týchto bodoch?

2.6. V nepriehľadnom vrecúšku máme lístočky s číslami od 1 po 15 vrátane. Aká je pravdepodobnosť, že ak vytiahneme 3 čísla, tak najväčšie z nich bude 10?

2.7. Súčet niekoľkých prirodzených čísel je 22. Aký najväčší môže byť ich súčin?

2.8. Aké sú posledné dve číslice súčtu $6^{2012} + 7^{2012}$?

2.9. Nech a, b, c sú kladné celé čísla, nájdite všetky riešenia rovnice $a^2b^2 + b^2c^2 - 3b^2 - c^2 - a^2 = 1999$.

2.10. Do rovnostranného trojuholníka ABC je vpísaný rovnostranný trojuholník KLM tak, že KL je kolmé na AB . Ak obsah trojuholníka KLM je 10, aký je obsah trojuholníka ABC ?

2.11. Nájdite všetky usporiadané trojice prirodzených čísel (a, b, c) , pre ktoré platí:

$$a! + b! + c! = a! \cdot b!.$$

2.12. Priemer AC kružnice k rozdelíme na 4 zhodné úseky bodmi P, O a R (O je stred kružnice a P je bližšie k A ako k C). Bodom P vedieme sečnicu kružnice k , ktorá ju pretína v bodoch B a D tak, že platí $|AP| = \frac{2|PD|}{3}$. Vieme, že obsah trojuholníka APD je 7. Aký je obsah štvoruholníka $ABCD$?

Košický matboj, 19. 10. 2012, 3. časť

3.1. Pre koľko dvojíc prirodzených čísel $[x, y]$ platí $x + 3y = 100$?

3.2. Janka, Ivka, Monča, Tomáš, Robčo, Matúš a Jožo sa rozhodli zistiť výšku prostredného z nich. Zistili, že priemerná výška štyroch najnižších je 167,5 cm a priemerná výška štyroch najvyšších je 180 cm. Priemerná výška všetkých je 174 cm. Akú výšku má prostredný z nich?

3.3. Danko má čokoládu s rozmermi 101×51 kociek. Keďže drží diétu, rozhodol sa, že každý deň zje práve jednu kocku čokolády. Aby ho to veľmi nelákalo, rozdelil si celú čokoládu na kocky 1×1 . Najmenej koľko krát Danko prelomil čokoládu, ak nemôže prelomiť kocku a naraz môže lámať iba jednu časť čokolády?

3.4. Obyčajný lístok do kina stojí 7 Eur a študentský o 2 Eura menej. Na nedeľnej premiére sa predalo 45 lístkov dokopy za 265 Eur. Koľko študentov bolo na premiére?

3.5. Na tabuľu napíšeme všetky sedemciferné čísla, ktoré obsahujú každú z cifier 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 práve raz a nie sú deliteľné 5. Čísla sú usporiadané vzostupne. Ktoré číslo je na 2012-tej pozícii?

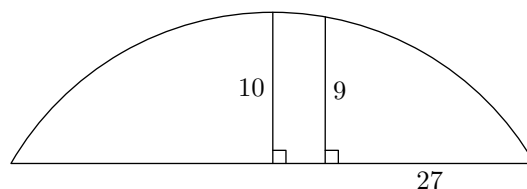
3.6. V obdĺžniku $ABCD$ sú dĺžky strán $|AB| = 5$ a $|BC| = 3$. Body F a G ležia na úsečke CD tak, že $|DF| = 1$ a $|CG| = 2$. Priamky AF a BG sa pretínajú v bode E . Aký je obsah trojuholníka AEB ?

3.7. Pre nejaké reálne čísla a, b platí $a + b = 8$ a $a^3 + b^3 = 56$. Vypočítajte $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

3.8. Majme kváder $6 \times 8 \times 12$. Nakreslíme v ňom jednu telesovú uhlopriečku a rozrežeme ho na kocky $1 \times 1 \times 1$. Koľkými z týchto kociek prechádza nakreslená diagonála?

3.9. Nech $N = 0.136051865568150\dots$ je číslo, ktoré vznikne tak, že za desatinnú čiarku píšeme postupne jednotkové cifry trojuholníkových čísel postupne 1, 3, 6, 10, \dots . Zistite, či je toto číslo iracionálne. Ak je, napíšte, že je. Ak nie je, tak ako odpoveď uveďte zlomok, ktorý sa rovná N . (n -té trojuholníkové číslo je také, ktoré sa dá zapísať ako súčet prvých n po sebe idúcich prirodzených čísel: $1 + 2 + 3 + \dots + n$.)

3.10. Prierez tunela na autodráhe je kruhový odsek ako na obrázku. Maximálna výška je 10 cm a podopiera ho zvislý 9 cm stĺp vzdialený 27 cm od okraja. Vypočítajte šírku tunela.



3.11. V trojuholníku ABC označme D stred BC . Ak $|\sphericalangle ADB| = 45^\circ$ a $|\sphericalangle ACD| = 30^\circ$, určte $|\sphericalangle BAD|$.

3.12. Vytvorte z čísel 1 až 9 všetky také 9 ciferné čísla A , že pre každé číslo B od 1 do 9 vrátane platí, že prvých B cifier čísla A tvorí číslo deliteľné číslom B .

Riešenia

- 1.1 7
- 1.2 4
- 1.3 3
- 1.4 4095
- 1.5 7
- 1.6 $\frac{5840s}{7} = \frac{(80 \cdot 73)s}{7}$
- 1.7 $\binom{41}{2} = 820$
- 1.8 1
- 1.9 43
- 1.10 112
- 1.11 $\frac{5}{3}$
- 1.12 $[1,1],[9,3],[4,2]$
- 3.1 33
- 3.2 172
- 3.3 5150
- 3.4 25
- 3.5 4321576
- 3.6 $\frac{25}{2} = 12,5$
- 3.7 $\frac{8}{19}$
- 3.8 16
- 3.9 $\frac{13605186556815063100}{99999999999999999999} = \frac{13605186556815063100}{(10^{20}-1)}$
- 3.10 40
- 3.11 30°
- 3.12 381654729
-
- 2.1 Mudroš
- 2.2 $\frac{82}{9} = 9,\overline{111} \dots$
- 2.3 $(21 \cdot 5!) * 111111 = 279999720$
- 2.4 $1/2$
- 2.5 $11 = \binom{5}{3} + 1$
- 2.6 $\frac{36}{455}$
- 2.7 2916
- 2.8 37
- 2.9 $(1,12,4),(4,12,1)$
- 2.10 30
- 2.11 $[3,3,4]$
- 2.12 $\frac{196}{3}$

Aktivita je podporená z grantu APVV LPP-0057-09
Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží



AGENTÚRA
NA PODPORU
VÝSKUMU A VÝVOJA

Košický matboj, 19. 10. 2012, riešenia 1. časti

Škola.....

Družstvo

Číslo družstva.....

Za správnu odpoveď sú 2 body, za nesprávnu -1 bod, za neodpovedanie 0 bodov.

1.1.

1.2.

1.3.

1.4.

1.5.

1.6.

1.7.

1.8.

1.9.

1.10.

1.11.

1.12.

Príklady.....

Opravoval.....

Košický matboj, 19. 10. 2012, riešenia 2. časti

Škola.....

Družstvo

Číslo družstva.....

Za správnu odpoveď sú 2 body, za nesprávnu -1 bod, za neodpovedanie 0 bodov.

2.1.

2.2.

2.3.

2.4.

2.5.

2.6.

2.7.

2.8.

2.9.

2.10.

2.11.

2.12.

Príklady.....

Opravoval.....

Košický matboj, 19. 10. 2012, riešenia 3. časti

Škola.....

Družstvo

Číslo družstva.....

Za správnu odpoveď sú 2 body, za nesprávnu -1 bod, za neodpovedanie 0 bodov.

3.1.

3.2.

3.3.

3.4.

3.5.

3.6.

3.7.

3.8.

3.9.

3.10.

3.11.

3.12.

Príklady.....

Opravoval.....