Košický Matboj

Košice, 25. 10. 2019

1. časť

Úloha 1.1: Nájdite najmenšie kladné celé číslo, pre ktoré platí, že keď pred neho pridáme cifru 6, dostaneme jeho 25-násobok.

Výsledok: 25

Riešenie: Novovytvorené číslo je deliteľné 25 a musí začínať cifrou 6. Toto číslo musí byť aspoň trojciferné, pretože žiadne dvojciferné číslo deliteľné 25 nezačína 6 ($\{25, 50, 75\}$), takže pôvodné číslo bolo aspoň dvojciferné. Máme nájsť najmenšie také číslo, tak skúsme, či existuje dvojciferné. Keď k dvojcifernému číslu pripíšeme 6 na začiatok, tak k nemu iba pripočítame 600 (k trojcifernému 6000, k štvorcifernému 60000, ...). Nech n je pôvodné číslo a skúsme, či môže byť dvojciferné. Potom hľadáme n také, že $n + 600 = 25 \cdot n$, a teda $600 = 24 \cdot n$, z čoho $n = 25$. Našli sme najmenšie také číslo, a to 25.

Úloha 1.2: Mihál sčítal aspoň dve za sebou idúce kladné celé čísla a dostal výsledok 1000. Aké najväčšie číslo medzi nimi mohlo byť?

Výsledok: 202

Riešenie: Na začiatku je dobré uvedomiť si, že čím viac čísel sčítavame, tým menšie sú. To znamená, že najprv potrebujeme zistiť, koľko najmenej čísel mohol Mihál sčítať. My vieme, že sčítal aspoň dve čísla. Veľmi rýchlo dokážeme overiť, že s dvoma číslami nemohol vyhovieť zadaniu. Ak by mal tri čísla, tak ich súčet je trojnásobok stredného čísla - to je opäť v spore so zadaním, pretože 1000 nie je deliteľné tromi. Pre štyri čísla riešenie taktiež neexistuje. Vieme urobiť súčet $249+250+251$, ak však k nemu pridáme 248 alebo 252, tak súčet bude buď menší, alebo väčší ako 1000. Pre päť čísel sme už schopní riešenie nájsť. Budeme sčítavať čísla od 198 do 202. Keďže chceme vedieť, aké najväčšie číslo mohlo byť súčasťou súčtu, tak odpoveďou je 202.

Úloha 1.3: Koľko najviac kladných celých čísel môžeme sčítať tak, že ich súčet je 2019, ale pri ich sčítavaní nedochádza k žiadnemu prechodu cez desiatku?

Výsledok: 12

Riešenie: Keďže sa pri sčítaní nesmie použiť prechod cez desiatku, musí číslu na mieste jednotiek odpovedať súčet cifier na mieste jednotiek vo všetkých sčítavaných číslach. Analogicky pre desiatky a tak ďalej. Z toho vyplýva, že ciferný súčet čísla 2019 sa musí rovnať súčtu ciferných súčtov všetkých sčítavaných čísel dokopy. Na základe týchto znalostí si ukážeme, že nie je možné sčítať viac ako 12 čísel. Predpokladajme, že vieme sčítať 13 kladných celých čísel bez prechodu cez desiatku na číslo 2019. Ak by súčet ciferných súčtov 13 čísel bol 12, nutne by musel byť aspoň jeden z týchto ciferných súčtov nulový, a teda číslo s týmto ciferným súčtom by muselo byť rovné 0. Lenže 0 nie je kladné číslo, čím sa dostávame do sporu. Ostáva overiť, že to ide s dvanástimi číslami. Príklad nájdeme jednoducho tak, že budeme sčítavať čísla v tvare 10^n. Konkrétne $2 \times 1000 + 10 + 9 \times 1$.

Úloha 1.4: Na sústredení bolo menej ako 90 účastníkov, ktorých chceli vedúci rozdeliť do družiniek po 2, 3, 5 alebo 7 účastníkoch. V niektorých troch prípadoch im jeden účastník zvýšil a v tom štvrtom im to vyšlo presne. Koľko bolo účastníkov?

Výsledok: 85

Riešenie: Postupne rozoberieme možnosti podľa toho, v ktorom prípade sa rozdelili presne.

Nech sa im podarilo vytvoriť dvojice. Pozrime sa na číslo o jedna menšie ako ich počet. Toto číslo má byť deliteľné 3, 5 aj 7, takže bude v tvare $105k$, z čoho ich počet musí byť v tvare $105k + 1$. Najmenšie párne číslo v tomto tvare je 106, čo je viac ako 90.

Ak by sa im podarilo vytvoriť trojice, tak číslo o jedna menšie bude v tvare $70k$ (deliteľné 2, 5 a 7). V tom prípade môže byť počet účastníkov len 1 alebo 71, no ani jedno nie je deliteľné číslom 3.

Pri päticiach musí byť ich počet v tvare $42k + 1$, čo nám dáva možnosti 1, 43 a 85 a vidíme, že vyhovuje len 85.

Ostáva nám skontrolovať, či nie je aj nejaká možnosť, ak sa rozdelili na sedmice. Ich počet musí byť v tvare $30k + 1$, ale ani jedno z čísel 1, 31 a 61 nie je deliteľné siedmimi.

Takže jediná vyhovujúca možnosť bola 85 účastníkov.

Úloha 1.5: Majme štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 10. Rovnoramenný trojuholník XAB má základňu AB a obsah spoločnej časti štvorca a trojuholníka je 80. Nájdite dĺžku výšky na stranu AB v trojuholníku XAB.

Výsledok: 25

Riešenie: Bod X musí ležať mimo štvorca $ABCD$, pretože inak by mal trojuholník XAB obsah najviac 50, teda polovicu obsahu štvorca. Spoločná časť trojuholníka XAB a štvorca $ABCD$ s obsahom 80 má tvar rovnoramenného lichobežníka. Nazvime jeho dlhšiu základňu a a kratšiu c. Vieme, že $a = 10$ a výška lichobežníka je tiež 10. Vyjadrime si c pomocou obsahu lichobežníka $S = v(a + c)/2$.

$$c = \frac{2 \cdot S}{v} - a = \frac{2 \cdot 80}{10} - 10 = 6$$

Takže $c = 6$. Nech $AX \cap DC = P$, $BX \cap DC = R$. Ďalej označme Q stred úsečky PR a M stred úsečky AB. Zo symetrie vieme, že $|DP| = |RC| = 2$. Trojuholník APD je podobný s trojuholníkom XAM podľa vety uu. XM je kolmé na MA, pretože sa jedná o ťažnicu v rovnoramennom trojuholníku a tá je kolmá na základňu. Preto $|AD|/|PD| = |XM|/|AM|$, z toho

$$|XM| = \frac{|AD|}{|PD|} \cdot |AM| = \frac{10}{2} \cdot 5 = 25.$$

Výška trojuholníka XAB je 25.

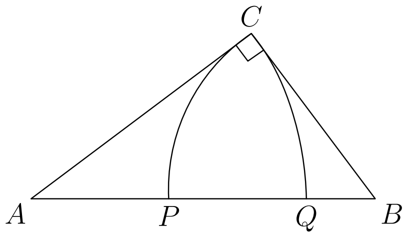
Úloha 1.6: Vodka si vybral päť čísel z množiny $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ a povedal Matúšovi ich súčin. Matúš sa snažil zistiť, či je súčet Vodkových čísel párny alebo nepárny. Po chvíli usúdil, že sa to zistiť nedá. Aký bol súčin, ktorý Vodka povedal Matúšovi?

Výsledok: 7560

Riešenie: Keďže Matúš poznal súčin čísel, ale nevedel povedať, či je ich súčet párny alebo nepárny, tak to znamená, že z danej množiny vieme vybrať dve rôzne pätice, ktoré majú rovnaký súčin, ale rôznu paritu súčtu. Vieme, že to, či je súčet párny alebo nepárny, závisí len od toho, koľko párnych a nepárnych čísel sčítavame. V množine sú 3 párne a 4 nepárne čísla. To znamená, že ak vyberáme pätícu, tak v nej bude aspoň 1 a najviac 3 párne čísla. Ak vyberieme 1 alebo 3 párne čísla a doplníme to nepárnymi, tak súčet bude párny. Ak vyberieme 2 párne čísla, tak súčet bude nepárny.

Keďže hľadáme pätice s rovnakým súčinom, tak musia mať v prvočíselnom rozklade rovnaký počet dvojok. Ak by sme do jednej pätice vybrali všetky 3 párne čísla, tak v ich prvočíselnom rozklade bude určite viac dvojok než v druhej pätici, do ktorej vyberieme len 2 z nich, lebo každé párne číslo obsahuje aspoň 1 dvojku. Preto do jednej pätice musíme vybrať jedno párne číslo a do druhej dve tak, aby ich súčin obsahoval rovnaký počet dvojok. To sa dá len jedným spôsobom – do prvej pätice dáme 8 a do druhej 4 a 6. Do prvej pätice už nemôžeme pridať párne číslo, tak ju doplníme všetkými nepárnymi. Druhú päticu doplníme číslami 5, 7 a 9, aby mali rovnaký súčin. Vidíme, že obe pätice majú súčin $8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 7560$ a rozdielnu paritu súčtu.

Úloha 1.7: V trojuholníku ABC je pravý uhol pri vrchole C. Kružnica so stredom v bode A a polomerom AC pretne stranu AB v bode Q. Analogicky, kružnica so stredom v bode B a polomerom BC pretne AB v bode P (viď obrázok). Aká je dĺžka PQ, ak vieme, že $|AP| = 16$ a $|BQ| = 8$.



Výsledok: 16

Riešenie: Nech $|PQ| = x$. Potom $|AC| = |AP| + |PQ| = 16 + x$ a taktiež $|BC| = |BQ| + |QP| = 8 + x$ (zároveň $|AB| = 24 + x$). Z Pytagorovej vety (pre trojuholník ABC) dostávame rovnosť $2x^2 + 48x + 320 = x^2 + 48x + 576$. Z toho však vidíme, že $x^2 = 256$, a keďže hľadáme dĺžku úsečky PQ, čo je nezáporné číslo, dostávame $x = |PQ| = 16$.

Úloha 1.8: V klobúku je 8 čiernych a 4 biele zajace. Ak náhodne vytiahneme 6 zajacov, aká je pravdepodobnosť, že posledný vytiahnutý zajac bude čierny?

Výsledok: $\frac{2}{3}$

Riešenie: Predstavme si, že zajace sú očíslované číslami od 1 do 12 a všetky biele. Keďže všetky zajace sú rovnaké, každý z nich má rovnakú šancu ($\frac{1}{12}$) na to, že bude vytiahnutý ako šiesty v poradí. Teraz si predstavme, že zajacov očíslovaných 1 až 8 zafarbíme na čierno. Spolu majú šancu $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, že jeden z nich bude vytiahnutý ako šiesty.

Úloha 1.9: Funkcia f je definovaná nasledovne: $f(0, 0) = 0$ a pre nezáporné celé čísla n, m platí: $f(n + 1, m) = f(n, m) + n$, $f(n, m + 1) = f(n, m) - m$. Pre koľko rôznych dvojíc čísel n, m je $f(n, m) = 2019$?

Výsledok: 4

Riešenie: Keďže poznáme hodnotu funkcie f len pre $n = m = 0$, bude pre nás užitočné vyjadriť si $f(n, m)$ pomocou $f(0, 0)$. Pomocou prvého vzťahu zo zadania vieme postupne zmenšovať prvý argument z n až na 0. Takto dostaneme

$$f(n, m) = f(n-1, m) + (n-1) = f(n-2, m) + (n-1) + (n-2) = \cdots = f(0, m) + \frac{n(n-1)}{2}. \quad (1)$$

Funkčnú hodnotu $f(n, m)$ vieme teda napísať ako súčet $f(0, m)$ a prvých $n - 1$ prirodzených čísel. Takto dostaneme vzťah (1). Rovnakým spôsobom, pomocou druhého vzťahu zo zadania, vieme zmenšovať druhý argument.

$$f(0, m) = f(0, m-1) - (m-1) = f(0, m-2) - (m-1) - (m-2) = \cdots = f(0, 0) - \frac{m(m-1)}{2} \quad (2)$$

Tentokrát vidíme, že $f(0, m)$ sa dá napísať ako rozdiel hodnoty $f(0, 0)$ a súčtu prvých $m - 1$ prirodzených čísel. Zo zadania však vieme, že $f(0, 0) = 0$. Dosadením (2) do (1) dostaneme

$$f(n, m) = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2}.$$

Teraz už len potrebujeme zistiť, pre ktoré n a m sa $f(n, m)$ rovná 2019.

$$2019 = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2}$$
$$2 \cdot 2019 = n^2 - n - m^2 + m$$

Obe strany poslednej rovnosti rozložíme na súčin a využijeme deliteľnosť.

$$2 \cdot 3 \cdot 673 = (n - m)(n + m - 1)$$

Pravá strana poslednej rovnosti musí byť kladná, a preto $n > m$. Navyše pre $m = 0$ neexistuje riešenie ($n(n-1)$ je súčin dvoch po sebe idúcich čísel), a preto $n - m \leq n + m - 1$. Pravá strana je teda súčinom dvoch deliteľov čísla 4038, z ktorých prvý deliteľ je menší. To nám dáva 4 možnosti:

$$\begin{aligned}
(n - m)(n + m - 1) &= 1 \cdot 4038, \\
(n - m)(n + m - 1) &= 2 \cdot 2019, \\
(n - m)(n + m - 1) &= 3 \cdot 1346, \\
(n - m)(n + m - 1) &= 6 \cdot 673.
\end{aligned}$$

Každá z týchto možností vedie k jednému riešeniu.

Úloha 1.10: Martin sa hral so štyrmi kladnými celými číslami a, b, c, d a všimol si, že platia rovnosti:

$$\begin{aligned}
ab + a + b &= 27, \\
bc + b + c &= 146, \\
cd + c + d &= 104.
\end{aligned}$$

Nájdite súčet čísel $a + b + c + d$.

Výsledok: 33

Riešenie: Pri riešení rovníc v celých číslach je často užitočné upraviť rovnice na súčin a využiť deliteľnosť. Ak pripočítame 1 k obom stranám každej z rovníc a použijeme rovnosť $(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$, dostaneme

$$\begin{aligned}
(a + 1)(b + 1) &= 28, \\
(b + 1)(c + 1) &= 147, \\
(c + 1)(d + 1) &= 105.
\end{aligned}$$

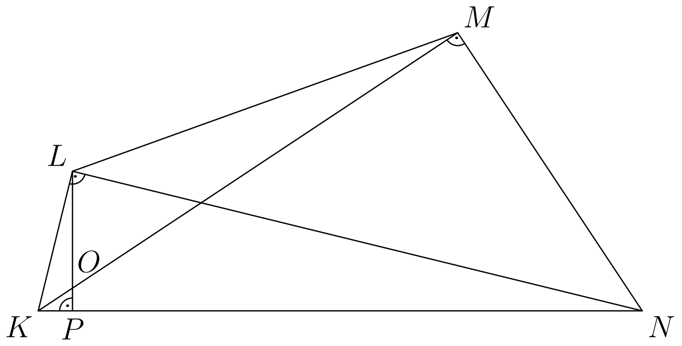
Z prvej rovnice vidíme, že $a + 1$ delí 28. Keďže 28 nemá veľa deliteľov, môžeme skúsiť rozobrať všetky možnosti. Takéto riešenie by bolo samozrejme v poriadku. Táto úloha sa však dá vyriešiť aj bez rozoberania možností. Z prvej rovnice vidíme, že $b + 1$ delí 28 a z druhej rovnice vidíme, že $b + 1$ delí aj 147. Preto $b + 1$ musí deliť aj najväčší spoločný deliteľ týchto čísel, čiže $b + 1$ delí aj číslo 7. Keďže b je kladné celé číslo a 7 je prvočíslo, dostávame, že $b = 6$. Z prvej rovnice potom dostávame $a = 3$, z druhej dostávame $c = 20$ a z tretej $d = 4$. Preto súčet $a + b + c + d$ má hodnotu $3 + 6 + 20 + 4 = 33$.

Úloha 1.11: V konvexnom štvoruholníku $KLMN$ platí, že strana MN je kolmá na uhlopriečku KM, strana KL je kolmá na uhlopriečku LN, $|MN| = 65$ a $|KL| = 28$. Priamka prechádzajúca bodom L, ktorá je kolmá na stranu KN, pretína uhlopriečku KM v bode O, pričom $|KO| = 8$. Určte dĺžku MO.

Výsledok: 90

Riešenie: Označme priesečník priamok LO a KN ako bod P. Platí, že trojuholníky KPL a KLN sú podobné, keďže zo zadania máme $|\angle KPL| = |\angle KLN| = 90°$ a $|\angle LKP| = |\angle NKL|$. Vďaka pomeru podobnosti a následnej malej úprave môžeme písať:

$$\begin{aligned}
\frac{|KP|}{|KL|} &= \frac{|KL|}{|KN|} \\
|KP| = \frac{|KL| \cdot |KL|}{|KN|} &= \frac{28^2}{|KN|} = \frac{784}{|KN|}
\end{aligned}$$



Analogicky sú podobné aj trojuholníky KMN a KPO, keďže $|\angle KMN| = |\angle KPO| = 90°$ a $|\angle OKP| = |\angle NKM|$. Opäť si zapíšeme a upravíme pomer podobnosti:

$$\frac{|KP|}{|KO|} = \frac{|KM|}{|KN|}$$
$$|KP| = \frac{|KO| \cdot |KM|}{|KN|} = \frac{8 \cdot |KM|}{|KN|}$$

Dostali sme dve rôzne vyjadrenia dĺžky strany KP, ktoré môžeme dať do rovnosti.

$$|KP| = \frac{8 \cdot |KM|}{|KN|} = \frac{784}{|KN|} = |KP|$$
$$8 \cdot |KM| = 784$$
$$|KM| = 98$$

A nakoniec len využijeme, že $|MO| = |KM| - |KO| = 98 - 8 = 90$.

Úloha 1.12: Nájdite najväčšie prvočíslo p, ktoré delí $2^{p+1} + 3^{p+1} + 5^{p+1} + 7^{p+1}$.

Výsledok: 29

Riešenie: V riešení použijeme Malú Fermatovu vetu, ktorá hovorí, že pre prvočíslo p a celé číslo a, ktoré nie je deliteľné p, platí $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (zápisom $x \equiv z \pmod{n}$ sa myslí, že číslo x dáva zvyšok z po delení číslom n). Hľadáme čo najväčšie prvočíslo p s vlastnosťou zo zadania, takže budeme predpokladať $p > 7$ (ak také nenájdeme, musíme sa tohto predpokladu vzdať). Môžeme teda použiť Malú Fermatovu vetu pre $a = 2,\ 3,\ 5,\ 7$ a prvočíslo p. Vynásobením vzťahu $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ číslom a^2 dostávame, že $a^{p+1} \equiv a^2 \pmod{p}$. Pre výraz zo zadania dostávame sčítaním týchto vzťahov pre $a = 2,\ 3,\ 5,\ 7$, že $2^{p+1} + 3^{p+1} + 5^{p+1} + 7^{p+1} \equiv 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 = 87 \pmod{p}$. Hľadáme teda najväčšie prvočíslo p také, že 87 dáva zvyšok 0 po delení p, t.j. p delí 87. Z toho vidíme, že najväčšie také p je 29.

2. časť

Úloha 2.1: Nájdite čo najväčšie číslo také, že všetky jeho cifry sú rôzne a číslo je deliteľné 8.

Výsledok: 9876543120

Riešenie: Číslo je deliteľné 8, ak je jeho posledné trojčíslie deliteľné 8. Aby hľadané číslo bolo čo najväčšie, potrebujeme posledné trojčíslie vytvoriť ideálne z troch najmenších cifier, čo sú 0, 1 a 2. Všetky možné permutácie cifier zoradené od najväčšej sú 210, 201, 120, 102, 021, 012. Tie nám stačí postupne prejsť až kým nenájdeme vyhovujúcu. 210 a 201 nie sú deliteľné 8, no 120 už áno. 120 je teda najväčšie vyhovujúce číslo. Zvyšné cifry hľadaného čísla už len doplníme zostupne a dostaneme 9876543120.

Úloha 2.2: Matúš dostal na skúške z Algebry desať otázok, na ktoré vedel odpovedať len „ÁNO“ alebo „NIE“. Test je pripravený natoľko prefíkane, že ak Matúš odpovie na ľubovoľných päť otázok „ÁNO“ a na zvyšných päť otázok „NIE“, bude mať vždy aspoň štyri správne odpovede. Zistite, koľkými spôsobmi je možné takýto test vytvoriť.

Výsledok: 22

Riešenie: Najprv treba zistiť, koľko správnych odpovedí môže byť „ÁNO“ a koľko „NIE“. V tabuľke sú vypísané všetky možnosti, keď Matúš môže správne odpovedať na menej ako 4 otázky.

Poradie správnych odpovedí	Poradie Matúšových odpovedí	Počet správnych odpovedí
A-A-A-A-A-N-N-N-N-N	N-N-N-N-N-A-A-A-A-A	0
A-A-A-A-A-A-N-N-N-N	N-N-N-N-N-A-A-A-A-A	1
A-A-A-A-A-A-A-N-N-N	N-N-N-N-N-A-A-A-A-A	2
A-A-A-A-A-A-A-A-N-N	N-N-N-N-N-A-A-A-A-A	3

Vidíme, že pokiaľ je 5, 6, 7 alebo 8 správnych odpovedí „ÁNO“, tak sa môže stať, že Matúš odpovie správne na menej ako 4 otázky. Rovnako by to dopadlo, pokiaľ by odpovede „ÁNO“ a „NIE“ vymenené a poradie Matúšových odpovedí by bolo A-A-A-A-A-N-N-N-N-N.

Ak by bola na 9 otázok správna odpoveď „ÁNO“, tak by nesprávne mohol odpovedať na maximálne 5 z nich (lebo iba na 5 otázok odpovedal „NIE“), a teda aspoň na 4 z nich musel odpovedať správne. A ak by na všetky otázky bola správna odpoveď „ÁNO“, tak by na 5 z nich určite odpovedal správne. Rovnako v prípade, že by na 9 alebo 10 otázok správna odpoveď „NIE“.

Ostáva nám teda iba zistiť, koľko takýchto rôznych testov môže existovať. Existuje 10 rôznych testov, v ktorých je na 9 otázok správna odpoveď „ÁNO“ (podľa toho, na ktorú z desiatich otázok je správna odpoveď „NIE“), a rovnako 10 rôznych testov, v ktorých je na 9 otázok správna odpoveď „NIE“. A existuje iba jeden test, ktorý má všetky odpovede „ÁNO“ a iba jeden test, ktorý má všetky odpovede „NIE“. To je spolu $10 + 10 + 1 + 1 = 22$ rôznych testov, pri ktorých Matúš musel správne odpovedať na aspoň 4 otázky.

Úloha 2.3: Koľko najviac rôznych prirodzených čísel môžeme sčítať tak, že ich súčet je 2019, ale pri ich sčítavaní nedochádza k žiadnemu prechodu cez desiatku?

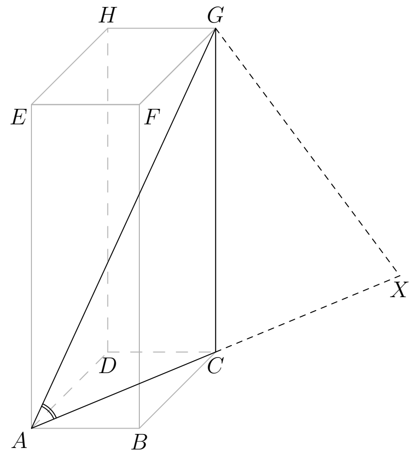
Výsledok: 6

Riešenie: Z úlohy 1.3 už vieme, koľko najviac čísel môžeme sčítať, aby sme dostali číslo 2019 bez prechodov cez desiatky (je ich 12). Tieto čísla však nie sú všetky rôzne, a tak musíme niektoré z nich sčítať dokopy, aby nám ostali iba rôzne čísla. Medzi tieto čísla môžu patriť najviac dve štvorciferné, žiadne trojciferné, najviac jedno dvojciferné a niekoľko jednociferných čísel. Jednociferné čísla dokážeme vytvárať len z deviatich jednotiek. Najmenšie číslo, ktoré sa dá vyjadriť ako súčet štyroch rôznych čísel je $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, takže z deviatich jednotiek dokážeme vytvoriť najviac tri rôzne čísla. Z toho dostávame, že 2019 sa dá vyjadriť ako súčet najviac $2 + 0 + 1 + 3 = 6$ rôznych čísel tak, aby nedochádzalo k prechodom pri sčítavaní. To, že to na šesť čísel naozaj ide, si môžeme ukázať na súčte $1001 + 1000 + 10 + 5 + 2 + 1$.

Úloha 2.4: Telesová uhlopriečka kvádra so štvorcovou podstavou zviera s podstavou uhol 60°. Hrana podstavy má dĺžku 10. Vypočítajte objem telesa.

Výsledok: $1000 \cdot \sqrt{6}$

Riešenie: Majme kváder $ABCDEFGH$ so štvorcovými podstavami $ABCD$ a $EFGH$. Vieme, že objem kvádra vypočítame ako obsah podstavy vynásobený výškou kvádra. Obsah podstavy je $10 \cdot 10 = 100$ a na to, aby sme vypočítali jeho objem, potrebujeme teda ešte vypočítať jeho výšku. Podľa zadania telesová uhlopriečka zviera so štvorcovou podstavou uhol 60°. Nech tá telesová uhlopriečka je AG a vieme, že so stenovou uhlopriečkou AC podstavy $ABCD$ zviera uhol 60°. Vezmime si trojuholník ACG (tvorený telesovou uhlopriečkou, stenovou uhlopriečkou (podstavy) a výškou kvádra). Vieme, že veľkosť uhla GAC je 60° (zo zadania) a GCA je 90° (keďže sa jedná o kváder, tak bočné steny sú kolmé na podstavy).



Tento trojuholník vieme doplniť na rovnostranný trojuholník GAX (keďže veľkosť uhla GAC je 60°), pričom bod C je stredom strany AX a CG je teda výškou aj ťažnicou – je kolmá na AX, prechádza jej stredom aj protiľahlým vrcholom. Keďže sa jedná o rovnostranný trojuholník, tak $|AG| = |AX| = 2|AC|$ a z toho pomocou Pytagorovej vety pre trojuholník ACG vypočítame výšku kvádra CG:

$$|CG|^2 = |AG|^2 - |AC|^2 = (2|AC|)^2 - |AC|^2 = 4|AC|^2 - |AC|^2 = 3|AC|^2.$$

Dĺžku stenovej uhlopriečky podstavy (AC) vypočítame taktiež z Pytagorovej vety pre pravouhlý trojuholník ABC:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200.$$

To môžeme dosadiť do Pytagorovej vety pre trojuholník ACG a dostávame $|CG|^2 = 3|AC|^2 = 3 \cdot 200 = 600$, teda výška kvádra je: $|CG| = \sqrt{600} = \sqrt{6 \cdot 100} = 10\sqrt{6}$. Objem nášho kvádra je preto $100 \cdot 10\sqrt{6} = 1000 \cdot \sqrt{6}$.

Úloha 2.5: Koľko existuje dvojíc uhlopriečok v konvexnom 16-uholníku takých, že majú práve jeden spoločný bod vo vnútri daného 16-uholníka? (Pozn. Body na obvode mnohouholníka nie sú jeho vnútornými bodmi a uhlopriečka je úsečka spájajúca dva rôzne nesusediace vrcholy.)

Výsledok: 1820

Riešenie: Uvedomme si, čo musí uhlopriečka spĺňať, aby pretínala nejakú inú nami vopred zvolenú uhlopriečku – jej body sa musia nachádzať vo vrcholoch na opačných „stranách" 16-uholníka rozdeleného zvolenou uhlopriečkou. Ak si predstavíme, že napríklad napravo od uhlopriečky sú 3 vrcholy a vľavo je zvyšných 11 vrcholov, tak počet uhlopriečok pretínajúcich zvolenú je $3 \cdot 11$. Takto si to vieme spočítať pre každú uhlopriečku.

Zvoľme si preto jeden bod a pozrime sa, na aké počty vrcholov môže uhlopriečka vedená z neho rozdeliť vrcholy 16-uholníka: 1 a 13, 2 a 12, 3 a 11, 4 a 10, 5 a 9, 6 a 8, 7 a 7, 8 a 6, …, 13 a 1. Postupne nám teda vyjde počet uhlopriečok pretínajúcich nami zvolenú uhlopriečku (ktorý odpovedá počtu dvojíc s touto uhlopriečkou) ako 13, 24, 33, 40, 45, 48, 49, 48, …, 13. Po sčítaní všetkých týchto dvojíc dostávame 455 – ak tak urobíme pre uhlopriečky z každého vrcholu, tak dostávame $455 \cdot 16 = 7280$.

Tu je však dôležité uvedomiť si koľko krát sme do tohto celkového súčtu zarátali každú dvojicu. Po krátkej úvahe si uvedomíme, že každú dvojicu uhlopriečok sme zarátali 4-krát, pretože každý zo 4 vrcholov týchto dvoch uhlopriečok bol raz zvolený ako vrchol, z ktorého vedie uhlopriečka rozdeľujúca 16-uholník. Následne sme preň túto dvojicu prirátali (a takto aj pre zvyšné 3 vrcholy). Výsledný počet dvojíc uhlopriečok, ktoré sa spolu vo vnútri 16-uholníka pretínajú je $7280/4 = 1820$.

Úloha 2.6: Do trojuholníka ABC, kde $|AC| = 60$ a $|BC| = 90$ je vpísaný kosoštvorec $CDEF$ tak, že bod D leží na strane BC, bod E na strane AB a bod F na strane AC. Vypočítajte dĺžku strany kosoštvorca.

Výsledok: 36

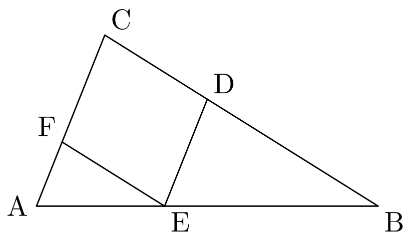
Riešenie: Všimnime si, že trojuholník ABC je podobný s trojuholníkom AEF, pretože EF je rovnobežné s BC, a teda majú všetky 3 uhly zhodných veľkostí. V podobných trojuholníkoch platí, že pomer ľubovoľných dvoch odpovedajúcich si strán je rovnaký. Špeciálne teda:

$$\frac{|EF|}{|BC|} = \frac{|AF|}{|AC|}$$

Označme si stranu kosoštvorca ako a:

$$\frac{a}{90} = \frac{60 - a}{60}$$
$$2a = 180 - 3a$$
$$5a = 180$$

Strana košotvorca teda bude rovná 180/5=36



Úloha 2.7: Duch žije vo vile s 27 izbami, ktoré sú usporiadané v tvare kocky $3 \times 3 \times 3$. Pohybovať sa vie medzi ktorýmikoľvek izbami, ktoré susedia stenou. Chce sa dostať z izby v jednom z rohov do izby, ktorá je od tejto najďalej (v opačnom rohu), pričom chce prejsť najmenším možným počtom izieb. Bohužiaľ, v izbe, ktorá je v strede domu, je pasca, ktorej sa chce za každých okolností vyhnúť. Koľkými rôznymi cestami vie ísť?

Výsledok: 54

Riešenie: Bez ujmy na všeobecnosti nech duch je na začiatku svojej cesty v ľavej prednej dolnej izbe (izba Š) a chce sa dostať do pravej zadnej hornej izby (izba C). Izba C je od izby Š o dve izby viac napravo, o dve izby viac vzadu a o dve izby vyššie. Pretože ide jednou z najkratších ciest, musí spraviť práve 2 kroky doprava, práve 2 kroky dozadu a práve 2 kroky hore.

Máme 6! možností ako usporiadať týchto 6 krokov do poradia, ale ak vymeníme medzi sebou dva kroky doprava, cestu to nezmení, rovnako ako keď medzi sebou vymeníme 2 kroky dozadu alebo 2 kroky hore, čiže počet možností musíme vydeliť číslom 2^3. Preto je počet rôznych ciest $\frac{6!}{2^3} = \frac{6!}{2!2!2!} = 90$. Treba poznamenať, že ak by sme mali napríklad kocku $4 \times 4 \times 4$, tak je počet ciest $\frac{9!}{3!3!3!}$, keďže existuje 3! poradí pre každý typ kroku.

Nakoniec je potrebné si rozmyslieť, že niektoré postupnosti z týchto 90 nevyhovujú. Sú to tie, ktoré prechádzajú izbou v strede kocky. Pretože tá sa nachádza o jedno políčko ďalej v každom smere od izby Š aj od izby C, každá možná najkratšia cesta z Š do strednej izby je nejakým zoradením krokov hore, doprava, dozadu (tých je 3!) a rovnako aj každá možná najkratšia cesta zo strednej izby do C je nejakým zoradením krokov hore, doprava a dozadu, a teda je ich rovnako 3!. Celkovo je ciest z Š do C prechádzajúcich stredom $3! \cdot 3! = 36$, a teda ciest z Š do C vyhovujúcich podmienkam zo zadania je $90 - 36 = 54$.

Úloha 2.8: Na hodinovom ciferníku spojte priamkami body, ktoré sú označené číslami 1, 5, 8. Aké sú vnútorné uhly takto vzniknutého trojuholníka?

Výsledok: 45, 60, 75

Riešenie: Označme bod pri čísle 1 ako A, bod pri čísle 5 ako B, bod pri čísle 8 ako C a stred ciferníku S. Keďže každý bod na obvode ciferníka je od stredu vzdialený rovnako, tak vieme, že ABS, BCS a CAS sú rovnoramenné trojuholníky. Uhol v strede ciferníka je 360°, čiže každá hodina zaberá 30°. Preto $|\angle ASB| = 120°$, $|\angle BSC| = 90°$ a $|\angle CSA| = 150°$. Rovnoramenné trojuholníky majú pri základni rovnaké uhly, takže $|\angle SAB| = |\angle SBA| = 30°$, $|\angle SBC| = |\angle SCB| = 45°$ a $|\angle SCA| = |\angle SAC| = 15°$. Z toho už vieme, že vnútorné uhly trojuholníka ABC sú 45°, 75° a 60°.

Úloha 2.9: Janka si pre každú dvojicu celých čísel a a b, pre ktoré platí $1 \leq a < b \leq 20$, napísala na kartičku číslo $(b-a)$. Potom si spočítala $\mathcal{P}$ ako súčin všetkých týchto čísel na kartičkách. Nájdite najväčšie kladné celé číslo n také, že 2^n delí $\mathcal{P}$.

Výsledok: 150

Riešenie: Označme si číslo na kartičke ako q, čiže $b - a = q$. Pre q platí, že $1 \leq q \leq 19$. Teraz sa pozrime na to, koľko rôznych dvojíc (a, b) existuje pre jednotlivé hodnoty q. Ak $q = 19$, potom existuje iba jedna dvojica – (1, 20). Ak $q = 18$, potom existujú iba dve dvojice – (1,19) a (2,20). Ak $q = 17$, potom existujú 3 dvojice atď., až napokon pre $q = 1$ existuje 19 dvojíc. Vieme teda, koľkokrát bude každá z hodnôt q na kartičkách. Pre každú hodnotu treba už len zistiť, aká najvyššia mocnina dvojky ju delí. Toto číslo potom vynásobíme počtom kartičiek danej hodnoty. Následne tieto súčiny spočítame a dostaneme tak najvyššiu mocninu dvojky, ktorá delí súčin čísel na všetkých kartičkách. Stačí sa nám pozerať iba na párne hodnoty q:

q	Max 2^n, ktoré delí q	Počet kartičiek(k)	$n \cdot k$
18	2^1, $n = 1$	2	2
16	2^4, $n = 4$	4	16
14	2^1, $n = 1$	6	6
12	2^2, $n = 2$	8	16
10	2^1, $n = 1$	10	10
8	2^3, $n = 3$	12	36
6	2^1, $n = 1$	14	14
4	2^2, $n = 2$	16	32
2	2^1, $n = 1$	18	18
Súčet			150

Najvyššia mocnina dvojky, ktorá delí súčin čísel na všetkých kartičkách, je teda 2^{150}.

Úloha 2.10: Pre funkciu f a všetky celé čísla $n > 2$ platí $f(1) = f(2) = 1$ a $f(n) = f(n-1) - f(n-2) + n$. Aká je hodnota $f(2019)$?

Výsledok: 2019

Riešenie: Skúsme si vypísať prvých pár čísel. Môžeme si všimnúť istý vzor opakovania s periódou 6. Zoberme si teda podmienku zo zadania a nahrádzajme ňou pravú stranu rovnice, až kým nedostaneme $f(n) = f(n-6) + x$, kde x je ľubovoľný výraz.

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(n-1) - f(n-2) + n \\
f(n) &= (f(n-2) - f(n-3) + (n-1)) - f(n-2) + n \\
f(n) &= -f(n-3) + 2n - 1 \\
f(n) &= -(f(n-4) - f(n-5) + (n-3)) + 2n - 1 \\
f(n) &= -f(n-4) + f(n-5) + n + 2 \\
f(n) &= -(f(n-5) - f(n-6) + (n-4)) + f(n-5) + n + 2 \\
f(n) &= f(n-6) + 6
\end{aligned}
$$

Opakovanou aplikáciou zistenej podmienky na seba samú vieme zovšeobecniť, že $f(n) = f(n-6k) + 6k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Vieme, že $f(3) = f(2) - f(1) + 3 = 3$ a $2019 = 336 \cdot 6 + 3$. Potom $f(2019) = f(2019 - 6 \cdot 336) + 6 \cdot 336 = f(3) + 2016 = 2019$.

Úloha 2.11: Majme n jednotiek v rade. Keď medzi ne doplníme ľubovoľne veľa znamienok $+$, dostaneme výraz. Pre koľko rôznych hodnôt n môže tento výraz nadobúdať hodnotu 1111?

Výsledok: 121

Riešenie: Majme na začiatku 1111 jednotiek za sebou. V každom kroku ich počet vieme zmenšiť troma spôsobmi. Môžeme nahradiť 1111 jednotiek číslom 1111, čím ušetríme $1111 - 4 = 1107$ jednotiek, 111 jednotiek číslom 111, čím ušetríme $111 - 3 = 108$ jednotiek, alebo 11 jednotiek číslom 11, čím ušetríme $11 - 2 = 9$ jednotiek. 1107, 108 aj 9 sú násobky deviatky, čiže nakoniec nám musí zostať počet jednotiek v tvare $1111 - 9k$, kde k môže nadobúdať hodnoty od 0 po 123, lebo $1111 - 9 \cdot 123 = 4$ a menej jednotiek zjavne nestačí.

Ostáva overiť, či pre každý takýto počet jednotiek môže výraz nadobúdať hodnotu 1111. Začnime od najmenších počtov jednotiek.

Pre $k = 123$ máme 4 jednotky, ktoré budú tvoriť číslo 1111. Pre väčší počet jednotiek číslo 1111 v našom súčte už byť nemôže. Bez tohoto čísla potrebujeme aspoň 10 čísel 111 a jedno číslo 1, čo je dokopy až 31 jednotiek, z čoho vyplýva, že k rovné 122 ani 121 nevyhovujú, a tiež, že 120 vyhovuje.

Najbližší väčší počet vieme dosiahnuť tak, že zmenšíme počet čísel 111, čiže jedno z nich môžeme nahradiť 10 číslami 11 a jedným číslom 1. To je dokopy 49 jednotiek, čiže $k = 119$ nevyhovuje, ale 118 áno. Ďalej nahradením čísla 11 jedenástimi číslami 1 vidíme, že vyhovuje aj $k = 117$.

Odtiaľ môžeme pokračovať indukciou pre $k \geq 2$. Ak vieme súčet 1111 dostať pre $1111 - 9k$ a $1111 - 9(k-1)$ jednotiek, tak ho vieme dostať aj pre $1111 - 9(k-2)$ jednotiek. Buď varianta pre $1111 - 9(k-1)$ jednotiek obsahuje číslo 11, ktoré nahradíme jedenástimi číslami 1, alebo, ak ho neobsahuje, tak varianta pre $1111 - 9k$ musí obsahovať číslo 111, ktoré nahradíme desiatimi číslami 11 a jedným číslom 1, čím počet jednotiek vzrastie o 18. Keďže vieme, že $k = 118$ aj $k = 117$ vyhovujú, tak potom vyhovujú aj všetky menšie k.

Ukázali sme, že n môže nadobúdať všetky hodnoty v tvare $1111 - 9k$, pre k od 0 po 123 okrem troch, čo je 121 možností.

Úloha 2.12: Hovoríme, že kladné celé číslo m obsahuje nezáporné celé číslo n, ak niekoľko po sebe idúcich cifier čísla m tvorí číslo n. Napríklad číslo 2019 obsahuje čísla 2, 0, 1, 9, 20, 19, 201, 2019. Nájdite najväčšie kladné celé číslo, ktoré neobsahuje žiadny násobok 7.

Výsledok: 999993

Riešenie: Predpokladajme, že by hľadané číslo malo aspoň 7 cifier. Pozrime sa na najmenších sedem čísel, ktoré obsahuje a končia sa jeho poslednou cifrou (napríklad ak máme číslo 87654321, tak sa pozrime na čísla 1, 21, 321, ..., 7654321). Vieme, že žiadne z týchto čísel nemôže mať zvyšok po delení siedmimi 0, takže určite tam budú dve čísla, ktoré majú rovnaký zvyšok po delení siedmimi (keďže tam je aspoň 7 zvyškov po delení 7 a žiaden z týchto zvyškov nie je 0, tak z Dirichletovho princípu tam budú aspoň 2 rovnaké).

Označme ich a a b, pričom a má viac cifier, a označme počet cifier čísla b ako p. Potom vieme, že číslo $a - b$ je určite deliteľné siedmimi, a teda aj číslo $(a - b)/10^p$ (toto číslo je celé, pretože posledných p cifier čísla a sú práve cifry čísla b). Navyše hľadané číslo obsahuje číslo $(a - b)/10^p$. Napríklad, keď máme číslo 9682167, tak si zoberme čísla 2167 a 67. Obe majú zvyšok po delení siedmimi 4 a keď zoberieme číslo $(2167 - 67)/10^2 = 2100/100 = 21$, tak to číslo je deliteľné siedmimi.

Takže vidíme, že keby malo hľadané číslo 7 cifier, tak by obsahovalo nejaké číslo, ktoré je deliteľné siedmimi. Takže môže mať najviac 6 cifier.

Najväčšie také číslo je 999999, no to je deliteľné siedmimi. Potom je 999998, no 98 je deliteľné 7. Takto vylúčime všetky čísla až po 999993, ktoré naozaj vyhovuje, a teda je to najväčšie také číslo.

3. časť

Úloha 3.1: Najmenej koľko cifier musíme vyškrtnúť z čísla 25102019 tak, aby výsledné číslo bolo deliteľné 3, 5 aj 8?

Výsledok: 4

Riešenie: Aby číslo bolo deliteľné 5 a zároveň 8, tak musí končiť na cifru 0, preto cifry 1 a 9 na konci nášho čísla musíme vyškrtnúť. (Vyškrtli sme už dve cifry.) Aktuálne máme číslo 251020, ktoré nespĺňa deliteľnosť 3 ani 8. Musíme teda vyškrtnúť ešte aspoň jednu cifru. Aby číslo bolo deliteľné 3, tak musí byť jeho ciferný súčet deliteľný 3. Ciferný súčet aktuálneho čísla je 10. Preto musíme škrtnúť cifry, ktorých súčet je 1, 4, 7 (prípadne 10). Ak by sme chceli škrtnúť už len jednu cifru, tak to musí byť cifra 1 (lebo cifru 4 ani 7 naše číslo neobsahuje), a teda výsledné číslo by bolo 25020, ktoré však nie je deliteľné 8. Čiže musíme škrtnúť aspoň 2 cifry. Ak škrtneme cifry 1 a 0, tak dostaneme číslo 2520, ktoré je deliteľné 3, 5 aj 8. Celkovo musíme vyškrtnúť aspoň 4 cifry.

Úloha 3.2: Vieme, že predseda STROMu je niekto z trojice Matúš, Kristín, Janka. Zo zvyšných dvoch ľudí jeden vždy klame a druhý vždy hovorí pravdu. Navzájom o sebe povedali:

- Matúš: Predseda je žena.
- Kristín: Matúš klame.
- Janka: Nie som predseda.

Zistite, kto z nich je predseda, a či hovorí pravdu alebo klame.

Výsledok: Predseda je Janka a klame.

Riešenie: Ak by bol predseda Matúš, tak by klamal, a teda by Kristín hovorila pravdu. Janka by ale tiež hovorila pravdu, čo je v rozpore s podmienkou zo zadania.

Ak by bola predseda Kristín, tak Matúš hovorí pravdu, a rovnako aj Janka, čo je opäť v rozpore s podmienkou.

Ak by bola predseda Janka, tak Matúš hovorí pravdu, a teda Kristín klame, rovnako ako Janka. Iba v tomto prípade je podmienka zo zadania splnená.

Úloha 3.3: Koľko je dvojíc kladných celých čísel takých, že ich súčet je 2019, ale pri ich sčítavaní nedochádzalo k žiadnemu prechodu cez desiatku?

Výsledok: 29

Riešenie: Predstavme si úlohu ako sčítavanie pod seba, v ktorom nemôže dochádzať k prechodom cez desiatky. Chceme teda napísať jednotlivé cifry v čísle 2019 iba ako súčet dvoch cifier. Začnime od konca po cifrách. Cifru 9 môžeme napísať 5 spôsobmi – ako $0+9$, $1+8$, $2+7$, $3+6$, $4+5$. K týmto 5 možnostiam existujú 2 možnosti ako napísať 1 – ako $1+0$ a $0+1$ (záleží na tom, ktorú možnosť napíšeme ku ktorému spôsobu zapísania 9ky), to je dokopy $5 \cdot 2 = 10$ možností na posledné dve cifry. Cifra 0 sa dá zapísať len ako $0+0$, čiže tu nám nové možnosti nepribudnú. A nakoniec cifra 2 sa dá zapísať ako $0+2$, $1+1$ a $2+0$ – znovu záleží na poradí cifier, teda dokopy to sú 3 možnosti. Spolu sme našli $5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 30$ možností. Avšak v zadaní sa nás pýtajú na kladné celé čísla, teda možnosť $0 + 2019$ musíme z našich možností vynechať (to sme vedeli dostať len jedným spôsobom), preto existuje len 29 dvojíc kladných celých čísel, ktorých súčet je 2019.

Úloha 3.4: Pravouhlý trojuholník KLM má dĺžky odvesien $|KM| = 16$ a $|LM| = 12$. Vypočítajte vzdialenosť bodu M od stredu O prepony KL.

Výsledok: 10

Riešenie: Dĺžku prepony pravouhlého trojuholníka KLM vypočítame z Pytagorovej vety: $|KL|^2 = |KM|^2 + |LM|^2 = 16^2 + 12^2 = 400$, teda $|KL| = 20$. Pravouhlému trojuholníku KLM vieme opísať Tálesovu kružnicu so stredom v bode O (stred prepony), keďže uhol KML je pravý. Polomer kružnice je rovný $|KO| = |MO| = |LO| = 20/2 = 10$. Preto vzdialenosť bodu M od stredu O je 10.

Úloha 3.5: Matematickej súťaže sa zúčastnili súťažiaci z troch rôznych krajín. Na začiatku súťaže si každý podal ruku so všetkými jeho krajanmi (z každej krajiny prišli aspoň dvaja súťažiaci). Koľko ľudí sa zúčastnilo súťaže, ak vieme, že dokopy prebehlo 42 podaní rúk a zo žiadnych dvoch krajín neprišiel rovnaký počet účastníkov?

Výsledok: 17

Riešenie: Ak z jednej krajiny prišlo n súťažiacich, tak medzi nimi prebehlo $n(n-1)/2$ podaní rúk (keďže každý si podal ruku so všetkými súťažiacimi zo svojej krajiny okrem seba a každé podanie sme započítali 2-krát). Dokopy bolo 42 podaní rúk, takže zo žiadnej krajiny nemohlo prísť viac ako 9 súťažiacich, lebo potom by vrámci jednej krajiny prebehlo aspoň $10 \cdot 9/2 = 45$ podaní rúk. Preto z každej krajiny bolo 2 (zo zadania) až 9 súťažiacich. Pomocou tabuľky si vypíšeme pre tieto počty krajanov počty podaní rúk.

počet krajanov	2	3	4	5	6	7	8	9
počet podaní rúk	1	3	6	10	15	21	28	36

Keby z každej krajiny prišlo najviac 6 súťažiacich, tak by prebehlo najviac $15 + 10 + 6 = 31$ podaní rúk, preto z aspoň jednej krajiny prišlo 7, 8 alebo 9 súťažiacich. Rozoberme teraz tieto 3 možnosti:

1. **Z jednej krajiny prišlo 9 súťažiacich** – v nej prebehlo 36 podaní rúk, teda ostáva ešte 6 podaní rúk pre 2 krajiny, čo nie je možné zabezpečiť (keďže na výber máme 1, 3 a 6 podaní rúk a zo žiadnych dvoch krajín neprišiel rovnaký počet účastníkov).
2. **Z jednej krajiny prišlo 8 súťažiacich** – v nej prebehlo 28 podaní rúk, teda ostáva ešte 14 podaní rúk pre 2 krajiny, čo nie je možné zabezpečiť (keďže na výber máme 1, 3, 6 a 10 podaní rúk).
3. **Z jednej krajiny prišlo 7 súťažiacich** – v nej prebehlo 21 podaní rúk, teda ostáva ešte 21 podaní rúk pre 2 krajiny, čo je možné vytvoriť len ako 15 (6 krajania) a 6 (4 krajania) podaní rúk.

Matematickej súťaže sa zúčastnilo $7 + 6 + 4 = 17$ účastníkov.

Úloha 3.6: Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré platí, že $6 + n$ delí $6n$.

Výsledok: 3, 6, 12, 30

Riešenie: Keďže $6+n$ je deliteľ $6n$ väčší ako n, tak 6 a $6+n$ musia byť súdeliteľné čísla. To znamená, že $6 + n$ musí byť násobok 2 alebo 3 (alebo oboch súčasne). Rozoberme tieto možnosti.

Ak $6 + n$ je násobok 3, tak n musí byť násobok 3, čiže $n = 3x$ pre nejaké kladné celé číslo x. Potom platí, že $6 + 3x$ delí $18x$, čo, po vydelení 3, znamená, že $2 + x$ delí $6x$. Keďže $2 + x$ a x sú čísla s rozdielom 2, tak sú buď nesúdeliteľné (ak sú nepárne), alebo ich najväčší spoločný deliteľ je 2 (ak sú párne). To znamená, že buď $2 + x$ delí 6, pričom x je nepárne, alebo $2 + x$ delí 12, pričom x je párne. V prvom prípade x môže byť iba 1, v druhom prípade x môže byť 2, 4 alebo 10. Teda n je 3, 6, 12 alebo 30.

Zostala možnosť, že $6+n$ je násobok 2, ale nie 3. V tom prípade n musí byť násobok 2, ale nie 3, čiže $n=2x$ pre nejaké kladné celé číslo x, ktoré nie je násobok 3. Potom platí, že $6+2x$ delí $12x$, čiže $3+x$ delí $6x$. Čísla $3+x$ a x sú čísla s rozdielom 3, ktoré nie sú deliteľné 3, takže sú nesúdeliteľné. Preto $3+x$ musí deliť 6, ale keďže x nemôže byť 3, tak v tejto vetve nedostávame žiadne riešenie.

Vidíme, že jediné vyhovujúce n sú 3, 6, 12 a 30.

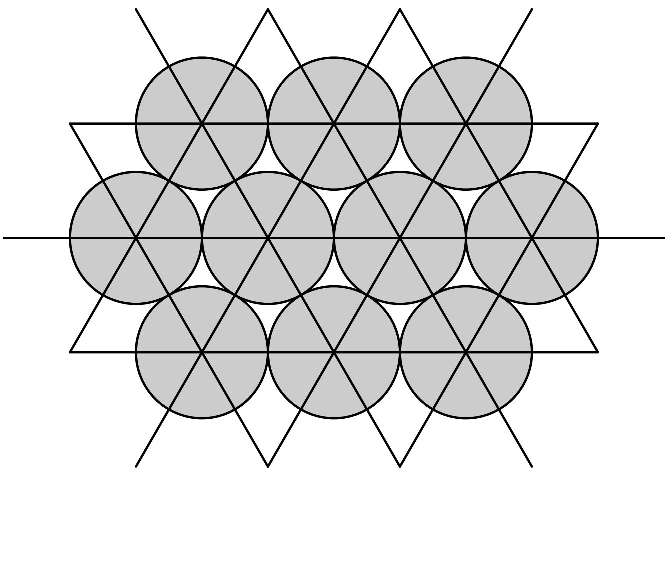
Úloha 3.7: Rovnoramennému trojuholníku, ktorého ramená zvierajú uhol 45 stupňov, sme opísali kružnicu s polomerom $\sqrt{32}$. Aký je obsah tohto trojuholníka?

Výsledok: $16+4\sqrt{32}=16\cdot(1+\sqrt{2})$

Riešenie: Trojuholník označme ABC so základňou AB a stredom kružnice opísanej S. Keďže obvodový uhol nad základňou AB pri vrchole C je 45°, tak stredový uhol nad AB pri S bude 90°. Potom ABS je rovnoramenný pravouhlý trojuholník s ramenami dĺžky $\sqrt{32}$, teda podľa Pytagorovej vety má prepona AB dĺžku 8. Keďže ABS je pravouhlý rovnoramenný trojuholník, má ťažnicu z vrcholu oproti prepone totožnú s výškou a stred kružnice opísanej v strede prepony, takže výška je polovicou dĺžky prepony. Potom výška trojuholníka ABC je $4+\sqrt{32}$, keďže ide o rovnoramený trojuholník, čiže výšku z vrcholu oproti základni má totožnú s osou základne. Jeho základňa je 8, a teda obsah trojuholníka je

$$\frac{(4+\sqrt{32})\cdot 8}{2}=16\cdot(1+\sqrt{2}).$$

Úloha 3.8: Parašutista zoskočil nad ovocným sadom. Stromy sú vysadené vo vrcholoch nekonečne veľkej siete zloženej z rovnostranných trojuholníkov, medzi kmeňmi stromov je vzdialenosť 8 metrov a priemer koruny každého stromu je 8 metrov. Aká je pravdepodobnosť, že parašutista ostane visieť na strome a nespadne na zem?



Výsledok: $\pi/(2\sqrt{3})$

Riešenie: Keďže parašutista určite spadne do niektorého z trojuholníkov v sieti, pravdepodobnosť pádu do koruny stromu je pomerom obsahu korún stromov v jednom trojuholníku a obsahu celého takého trojuholníka.

Začnime určením obsahu trojuholníka. Jedná sa o rovnostranný trojuholník s dĺžkou strany 8. Jeho výšku môžeme vypočítať pomocou Pytagorovej vety. Nachádza sa v pravouhlom trojuholníku s preponou dĺžky 8 (strana trojuholníka) a jednou odvesnou dĺžky 4 (polovica strany trojuholníka). Výška je teda rovná $\sqrt{8^2-4^2}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$. Keď poznáme výšku, obsah trojuholníka dorátame ako polovicu súčinu výšky a strany, čiže $(8\cdot 4\sqrt{3})/2=16\sqrt{3}$.

Ďalej potrebujeme určiť obsah, ktorý pokrývajú koruny stromov v jednom trojuholníku. Nachádzajú sa v ňom tri 60 stupňové kruhové výseky, každý z nich teda predstavuje šestinu obsahu kruhu s polomerom 4. Obsah takého kruhu je $\pi \cdot 4^2$, takže obsah všetkých troch korún je spolu $3/6 \cdot \pi \cdot 4^2 = 8\pi$.

Teraz nám ostáva určiť už len pomer týchto dvoch obsahov, čo je $8\pi/(16\sqrt{3}) = \pi/(2\sqrt{3})$.

Úloha 3.9: Označme S_i množinu všetkých celých čísel n takých, že $100i \leq n < 100(i+1)$. Napríklad S_4 je množina čísel 400, 401, ... , 499. Koľko z množín S_0, S_1, ... , S_{999} neobsahuje druhú mocninu celého čísla?

Výsledok: 708

Riešenie: Najprv sa pozrieme na rozdiel dvoch po sebe idúcich druhých mocnín: $(x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$. Pre všetky druhé mocniny menšie ako $50^2 = 2500$ platí, že rozdiel dvoch po sebe idúcich bude menší ako 100. V každej stovke medzi číslami 0 až 2499 tým pádom určite bude aspoň jedna druhá mocnina, čo sú množiny S_0, S_1, ... , S_{24}, a zároveň v S_{25} bude práve číslo 50^2.

Keďže nás zaujímajú množiny S_0, S_1, ... , S_{999}, tak najväčšia druhá mocnina, ktorá sa v nich bude nachádzať je $316^2 = 99856 < 100000$. Zároveň vieme, že každé dve po sebe idúce druhé mocniny väčšie ako 50^2 sú od seba vzdialené o viac ako 100, a teda v každej množine sa bude nachádzať maximálne jedna. Jedná sa o $316 - 50 = 266$ druhých mocnín.

Dokopy dostávame, že nejaká druhá mocnina sa bude nachádzať v každej z množín S_0, S_1, ... , S_{25} a v nejakých 266 množinách spomedzi S_{26}, S_{27}, ... , S_{999}. Počet množín, ktoré neobsahujú druhú mocninu, je $1000 - 266 - 26 = 708$.

Úloha 3.10: Nájdite všetky usporiadané dvojice prvočísel $(p,\ q)$, pre ktoré platí $3p^2 + 6p = 2q^2 + 7q$?

Výsledok: (11, 13)

Riešenie: Upravíme rovnicu zo zadania na $3p(p+2) = q(2q+7)$. Prvočíslo q delí súčin $3p(p+2)$, takže musí deliť jedno z čísel 3, p a $p+2$. Ak by q delilo číslo 3, potom $q = 3$, podobne, ak q delí p, nutne $q = p$. Ľahko overíme, že pre $q = 3$ ani pre $q = p$ neexistuje vhodné prvočíslo p, ktoré by spĺňalo rovnicu. Musí byť preto $p + 2 = kq$ pre nejaké prirodzené k. Dosadíme do zadaného vzťahu $p = kq - 2$, potom po úprave a vydelení q dostávame $q(3k^2 - 2) = 6k + 7$. Keďže $q > 1$, musí platiť $3k^2 - 2 < 6k + 7$, po úprave $(k-1)^2 < 4$, čiže do úvahy prichádzajú len hodnoty $k = 1$ a $k = 2$. Pre $k = 2$ by bol výraz $p+2$ párny, čiže prvočíslo p by muselo byť 2 a pre túto voľbu p neexistuje vhodné prvočíslo q tak, aby platila rovnosť zo zadania. Pre $k = 1$ nájdeme jediné riešenie $p = 11$, $q = 13$.

Úloha 3.11: Kladné celé čísla a, b, c, d spĺňajú $a > b > c > d$, $a + b + c + d - 1 = 2019$ a $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - 1 = 2019$. Koľko rôznych hodnôt môže nadobúdať a?

Výsledok: 503

Riešenie: Úpravou prvej a druhej rovnosti a následným odčítaním prvej rovnosti od druhej dostávame vzťah $(a+b)(a-b-1) + (c+d)(c-d-1) = 0$. Pretože a, b, c, d sú podľa zadania kladné celé čísla, tak výrazy $(a+b)$ a $(c+d)$ sú kladné celé čísla. Navyše, $a > b$ je ekvivalentné neostrej nerovnosti $a - b - 1 \geq 0$, analogicky $c > d$ je ekvivalentné $c - d - 1 \geq 0$, z čoho dostávame, že rovnosť $(a+b)(a-b-1) + (c+d)(c-d-1) = 0$ platí iba v prípadoch, keď $a - 1 = b$ a zároveň $c - 1 = d$.

Dosadením predchádzajúcich dvoch rovností do prvej z rovností zo zadania dostaneme $2a - 1 + 2c - 1 = 2020$, z čoho ďalšími úpravami dostaneme vzťah $a = 1011 - c$. Potrebujeme už iba rozlíšiť, koľko hodnôt môže nadobúdať c, keďže toľko hodnôt môže nadobúdať a.

Pretože $c - 1 = d$ a d je kladné celé číslo, tak $c \geq 2$. Podobne pretože $a > c$, tak $c \leq \lfloor \frac{1011}{2} \rfloor$ (c môže byť najviac toľko, koľko je polovica súčtu a a c), teda $c \leq 505$. Nakoniec si však musíme uvedomiť, že kvôli vzťahu $a > b > c$ nevyhovuje možnosť $c = 505$, lebo potom $a = 506$ a medzi a a c už neexistuje ďalšie celé číslo. Pre ľubovoľné menšie c je aj táto podmienka splnená automaticky, lebo ak $c \leq 504$, tak $a - c \geq 3$.

Takto získaná hodnota a bude skutočne spĺňať obe rovnosti zo zadania, o čom sa možno presvedčiť skúškou. Celkovo môže a nadobúdať toľko rôznych hodnôt, koľko je čísel od 2 do 504 vrátane, teda 503.

Úloha 3.12: Koľkými rôznymi spôsobmi vieme vybrať 6 čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 49\}$ tak, aby sme vybrali aspoň 2 po sebe nasledujúce čísla?

Výsledok: $\binom{49}{6} - \binom{44}{6}$

Riešenie: Najprv zrátame všetky možnosti ako vybrať 6 čísel z tejto množiny. Tých je $\binom{49}{6}$. Následne odpočítame tie, v ktorých nie sú žiadne po sebe nasledujúce čísla. Zoraďme si vybraté čísla vzostupne. Ak žiadne dve nenasledujú za sebou, tak za každým z prvých piatich vybratých čísel nasleduje nevybraté číslo. Zároveň, ak vyberieme 6 čísel zo 44 a následne k piatim najmenším doplníme čísla o jedna väčšie, ktorých voľbu sme zakázali, tak sme vybrali 6 čísel zo 49, z ktorých žiadne dve nenasledujú za sebou.

Predstaviť si to môžete napríklad takto:

Vyberme z čísel 1 až 44 čísla 1, 2, 3, 6, 8 a 44. Doplnenie si môžeme predstaviť tak, že najprv vytvoríme čísla 1,5; 2,5; 3,5; 6,5 a 8,5. Dokopy tak máme 49 čísel a z nich je vybratých 6. Následne všetky čísla prečíslujeme číslami od 1 po 49 tak, ako idú za sebou. Teda vybraté čísla sú 1, 3, 5, 9, 12 a 49 a doplnené boli čísla 2, 4, 6, 10 a 13. Pri postupe opačným smerom by sme najprv škrtli čísla 2, 4, 6, 10 a 13, keďže nasledujú bezprostredne za prvými piatimi vybratými číslami, a následne by sme čísla prečíslovali od 1 po 44, čím dostaneme 6 čísel, ktoré sme vybrali na začiatku.

Preto vidíme, že od všetkých možností stačí odčítať $\binom{44}{6}$.

autori:	Jakub Genči, Florián Hatala, Peter Kovács, Martin Masrna, Kristína Mišlanová, Daniel Onduš, Zuzana Ontkovičová, Žaneta Semanišinová, Roman Staňo
recenzia a úprava:	Jana Baranová, Erik Berta, Viktória Brezinová, Matúš Hlaváčik, Róberta Juríková, Tomáš Kocák, Samuel Krajči, Martin Mihálik, Martin Spišák, Martin Števko
názov:	**Košický Matboj – 25. 10. 2019**
vydavatelia:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta Združenie STROM
web:	`seminar.strom.sk/sk/matboj/` `www.itakademia.sk`

EURÓPSKA ÚNIA
Európsky sociálny fond
Európsky fond regionálneho rozvoja

OPERAČNÝ PROGRAM
ĽUDSKÉ ZDROJE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVA, VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Tento projekt sa realizuje vďaka podpore z Európskeho sociálneho fondu a Európskeho fondu regionálneho rozvoja v rámci Operačného programu Ľudské zdroje

www.minedu.sk www.employment.gov.sk/sk/esf/ www.itakademia.sk